第一章　集合、映射和 Lebesgue 积分

本章摘要地介绍集合论和实分析的一般概念，以及几个常用的不等式，为学习后继几章内容打下基础。

§1.1　集合及其运算

集合是数学中最基本而又最原始的概念之一。它不能用其它任何概念来定义，而是用公理化的方法加以引入，或者是作一个描述性的说明。粗略地讲，凡是具有某种共同特征的一些对象组成的总体就称为一个集合（或简称为集），而其中的每个对象称为集合的元素（或元），通常用大写字母 A、B、X、Y、…表示集合，用小写字母 $a,b,x,y,\cdots$表示集合的元素。如果 A 是一个集合，那末，$x\in A$ 表示 x 是 A 的一个元素，当 x 不是 A 的元素时，则记为 $x\overline{\in}A$（或 $x\notin A$）。

集合有两种表示法：

列举法　把集合中的元素列举出来称列举法。例如，$A=\{-2,2\}$表示$-2,2$ 两个元素组成的集合；$B=\{a,b,c\}$表示 a,b,c 三个元素组成的集合；$N=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$表示全体自然数组成的集合。

特性表示法　把集合中元素的特性表示出来称特性表示法。例如，$E=\{x|x$ 具有性质 $p(x)\}$，表示具有性质 $p(x)$的一切 x 构成的集合；$A=\{x|x^2=1\}$表示满足条件 $x^2=1$ 全体作成的集合即$\{-1,1\}$；而 $B=\{f(x)|x\in[a,b]\}$表示定义在闭区间$[a,b]$上的全体函数值所成的集合。

必须指出，集合的元素并非一定都是数。例如，$\{f(x)|f(x)$在$[a,b]$上连续$\}$表示在闭区间$[a,b]$上连续函数的全体所成的集合，记为 $C[a,b]$；$\{x|x=(\xi_1,\xi_2,\cdots),\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<+\infty,\xi_i\in K$ $(i=1,2,\cdots)$，K 是数域（实数域或复数域）$\}$，表示满足条件：$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<+\infty$的实数（或复数）列$(\xi_1,\xi_2,\cdots)$的全体所成的集合，记为 l^p。

另外，不同的集合所含元素的数目一般也不相同。凡是只有有限个元素的集合称为有限集；不含任何元素的集合称为空集，记为$\varnothing$，例如，方程 $x^2+1=0$ 的实数解组成的集合是空集，即$\{x\in R|x^2+1=0\}=\varnothing$；既非空集又非有限集的集合称为无限集。

在集论中，常使用下述定义：

设 A,B 是给定的两个集合，如果对于每一个 $x\in A$ 必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$（或 $B\supset A$）；如果 $A\subset B$，同时 $B\supset A$，即 A 和 B 含有完全相同的元素，则称 A 和 B 相等，记作 $A=B$；如果 A 和 B 不相等，则记作 $A\neq B$；如果 $A\subset B$，且 $A\neq B$，则 A 为 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$。我们规定空集是任何集合的子集，而每一个非空集合 A 至少有两个明显的子集：A 和$\varnothing$。

设 A，B 是给定的两个集合，由 A 和 B 所有元素组成的集合称为 A 和 B 的并集，记作 A

$\cup B$,即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

A 和 B 所共有的元素组成的集合称为 A 和 B 的交集,记作 $A \cap B$,即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

属于集 A 而不属于集 B 的元素组成的集合称为 A 和 B 的差集,记作 $A-B$(或 $A \backslash B$),即

$$A - B = \{x | x \in A \text{ 但 } x \overline{\in} B\}$$

必须指出,在集 A 和集 B 差集的定义中,B 可以是也可以不是 A 的子集。

在研究具体问题时,如果所考虑的一切集都是集 X 的子集,则称 X 为基本集。如果 X 是一个非空的基本集,$A \subset X$,则定义 $X-A$ 为 A 关于 X 的余集(或补集),记作 A_X^c 或 A^c。

并和交的定义可以推广到任意个集合的情形。设 $\{A_\alpha | \alpha \in J\}$ 是一族集合,即对于每个 $\alpha \in J$ 可确定一个集 A_α,J 为指标集。这一族集合的并 $\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ 和交 $\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$ 分别定义为

$$\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = \{x | \text{ 存在 } \alpha \in J, \text{使得 } x \in A_\alpha\}$$

和

$$\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \{x | \text{ 对于任意 } \alpha \in J, \text{均有 } x \in A_\alpha\}$$

设 A,B 是给定的二非空集合,对于 $a \in A$ 和 $b \in B$,以 (a,b) 表示有序元素对,简称为序对。如果 $a_1=a_2, b_1=b_2$ 则称序对 (a_1,b_1) 和序对 (a_2,b_2) 相等,记作 $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$。由集合 A,B 中元素构成的所有序对组成的集合称为 A 和 B 的直积(或积集),记作 $A \times B$,即

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$$

例如,已知 $A=[-1,1]$,$B=[-1,1]$,那末,直积 $A \times B$ 就是一个面积为 4 个平方单位的正方形,即

$$A \times B = \{(a,b) | a \in [-1,1], b \in [-1,1]\}$$

一般说来,$n(n \geqslant 2)$ 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的直积(或积集)类似地定义为

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} A_i &= A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \\ &= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \cdots, x_n \in A_n\}\end{aligned}$$

其中每个 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为此直积的坐标集。例如,两个实直线 R 的直积就是实平面,即 $R^2=R \times R$,R^n 就是 n 个实直线 R 的直积,即 $R^n=R \times R \times \cdots \times R$。

设 A,B,C 是给定的三个集合,则集合的运算规律如下:

(1)等幂律　$A \cup A=A, A \cap A=A$;

(2)交换律　$A \cup B=B \cup A, A \cap B=B \cap A$;

(3)结合律　$A \cup (B \cup C)=(A \cup B) \cup C=A \cup B \cup C$,

　　　　　$A \cap (B \cap C)=(A \cap B) \cap C=A \cap B \cap C$;

(4)分配律　$A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$,

　　　　　$A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$。

定理(De—Morgan 法则)　设一族集 $A_n, A_n \subset X(n=1,2,\cdots)$,$X$ 是基本集,则有

(1) $(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$;

(2) $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$。

证明　先证(2)。设 $x \in (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c$,则 $x \overline{\in} A_n(n=1,2,\cdots)$,于是 $x \in A_n^c(n=1,2,\cdots)$,因此

$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n^c$，从而推得$(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)^c\subset\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n^c$。

反之，设$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n^c$，则$x\in A_n^c(n=1,2,\cdots)$，因此，$x\overline{\in}A_n(n=1,2,\cdots)$，即$x\overline{\in}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，于是$x\in(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)^c$，从而推得$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n^c\subset(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)^c$。所以

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)^c=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c$$

再对(2)两端同时取余集，可得

$$[(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)^c]^c=(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c)^c$$

于是

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c)^c$$

将上式中A_n换成A_n^c，有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^c=[\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n^c)^c]^c=(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)^c$$

De－Morgan法则常称为对偶原理，我们概括地叙述为：并的余等于余的交，交的余等于余的并，它在集论中有着广泛的应用。

§1.2 映　　射

在微积分中，函数的概念得到了详细而深入的分析和讨论。如果用具有任意属性的集合代替函数概念中的数集，那末，就可以得到函数最一般的概念，即所谓映射的概念。它是现代数学最基本的概念之一。

定义1　设A和B是两个非空集合，f是A，B元素间的一个对应关系(法则)，如果对于任一$x\in A$，依照法则f，B中有唯一确定的元素$y\in B$与之对应，那末，称f为A到B的映射，记为

$$f:A\to B\text{ 或 }x\mapsto y$$

y称为x在映射f下的象，记作$y=f(x)$或$y=fx$。集合A称为映射f的定义域，记为$\mathscr{D}(f)$，对于任意$x\in\mathscr{D}(f)$在f下的象构成的象集$f(A)=\{y\mid y=f(x),x\in\mathscr{D}(f)\}$称为$f$的值域，记作$\mathscr{R}(f)$。一般地，值域$\mathscr{R}(f)$是$B$的一个子集。

一点$y\in B$的逆象(或原象)是使得$f(x)=y$的所有$x\in\mathscr{D}(f)$的集合，记作$f^{-1}(y)$，即$f^{-1}(y)=\{x\mid f(x)=y,x\in\mathscr{D}(f)\}$；子集$B_1\subset B$的逆象集(或原象集)是使得$f(x)\in B_1$的一切$x\in\mathscr{D}(f)$的集合，记作$f^{-1}(B_1)$，即$f^{-1}(B_1)=\{x\mid f(x)\in B_1,x\in\mathscr{D}(f)\}$。

必须注意，点$y\in B$的逆象可以是空集、单点集或$\mathscr{D}(f)$的子集，这取决于给定的元素$y\in B$和映射f。还要指出，当A和B两个集合为数集时，这里定义的映射f就是通常所说的函数概念。

定义2　设映射$f:A\to B$，如果$\mathscr{R}(f)=B$，则称f为从A到B上的映射，又简称为满射；如果对于A中任意元素x_1和x_2，当$x_1\neq x_2$时，蕴含$f(x_1)\neq f(x_2)$，则称f为单射或一一映射；如果f既是单射又是满射，则称f为双射或从A到B的一一对应的映射。

设f是$A\to B$的单射，对于任意$b\in\mathscr{R}(f)$，一定有唯一的$a\in\mathscr{D}(f)$与之对应，因此存在一个对应法则g，且对任意$a\in A$，有$g(f(a))=a$，以及对任意$b\in B$，有$f(g(b))=b$，则称g为f的逆映射，记作$g=f^{-1}$。

设有两个映射 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$，且规定 $(g\circ f)(a)=g(f(a))$，这种从 $A\to C$ 的映射称为复合映射，记作 $g\circ f:A\to C$。

设 f_1,f_2 是给定的两个映射，如果 $\mathscr{D}(f_1)=\mathscr{D}(f_2)$，并且对于一切 $x\in\mathscr{D}(f_1)=\mathscr{D}(f_2)$ 都有 $f_1(x)=f_2(x)$，则称映射 f_1 和 f_2 是相等的。

设 A 为一非空集合，如果集合 A 到 A 上的映射 $f:a\mapsto a$，则称 f 为 A 上的恒等映射，记作 I。

设映射 $f:X\to Y$，且 $A\subset X,B\subset X,D\subset Y,F\subset Y$，则有

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$；

(2) $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$；

(3) $f^{-1}(D\cup F)=f^{-1}(D)\cup f^{-1}(F)$；

(4) $f^{-1}(D\cap F)=f^{-1}(D)\cap f^{-1}(F)$。

定义 3 设 f,g 分别是定义域 $\mathscr{D}(f),\mathscr{D}(g)$ 到 B 的映射，如果 $\mathscr{D}(f)\subset\mathscr{D}(g)$，而且对于 $\mathscr{D}(f)$ 中的每一个元素 x 成立着

$$g(x)=f(x)$$

则称映射 g 是映射 f 在 $\mathscr{D}(g)$ 上的延拓，记作 $f=g|_{\mathscr{D}(g)}$；反之称 f 是 g 在 $\mathscr{D}(f)$ 上的限制，记作 $g=f|_{\mathscr{D}(f)}$。

必须指出，g 在 $\mathscr{D}(f)$ 上的限制 $g|_{\mathscr{D}(f)}$ 是由 g 和 $\mathscr{D}(f)$ 所唯一确定的，而 f 在一个更大区域上的延拓并不是唯一的，因此在许多问题中，常要求延拓后的映射满足一定的附加条件。

例 1 用 R 表示全体实数的集合（简称实数集），R^+ 表示非负实数的集合，映射 f 表示规则 $f(x)=x^2$，试考察下列映射：

$f:R\to R$ 不是单射，因为 $-x$ 和 x 都映成 x^2。它也不是满射，因为 R 中的负实数不是 f 的象；

$f:R\to R^+$ 不是单射，但是满射；

$f:R^+\to R$ 是单射，但不是满射；

$f:R^+\to R^+$ 是双射。

例 2 设 $A=\{2,4,6\},B=\{\alpha,\beta,\gamma\}$，如果定义映射 $f:A\to B$ 使得 $f(2)=\alpha,f(4)=\beta,f(6)=\beta$，这种映射既不是单射也不是满射；如果定义映射 $f:A\to B$ 使得 $f(2)=\alpha,f(4)=\beta,f(6)=\gamma$，则此映射是双射。

定义 4 设 A,B 是两个非空集合，如果存在双射 $f:A\to B$，则称 A 和 B 是对等的集合，记作 $A\sim B$。

必须指出，$A\sim B$ 和 $A=B$ 具有不同的含义。$A\sim B$ 意味着 A 的元素与 B 的元素之间有一一对应的关系；而 $A=B$ 等价于它们的元素完全相同，因此对等的两个集合不必相等。

例如，$\{1,2,3\}\sim\{2,4,6\}$；$\{1,3,5,\cdots\}\sim\{1,2,3\cdots\}$；实数集 R 中的区间 $(-1,1)$ 与 R 是对等的，因为 $f(x)=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ 就是这两集合间的双射。

凡是能与自然数集 N 对等的集合称为可数集或可列集，否则就是不可数集或不可列集。

定理 1 一个集合 A 的可数的充分必要条件是 A 的全部元素能用自然数编号，即 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$。

定理 1 可由定义 4 直接推得。

定理 2 任何无限集必含有可数子集。

证明 设 A 是无限集，取 $a_1\in A$，由于 A 为无限集，于是 $A\backslash a_1$ 非空，再取 $a_2\in A\backslash\{a_1\}$，而 $A\backslash\{a_1,a_2\}$非空，如此继续下去，则可得 A 的一个可数子集$\{a_1,a_2,\cdots\}\subset A$。

定理 3 (1)可数集的任何子集或者是有限集或者是可数集；

(2)可数多个可数集之并集仍是可数集。

证明 (1)设 A 是可数集，即 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，如果 B 是 A 的子集，当 $B\neq\varnothing$，则

$$B=\{a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k},\cdots\}\subset A$$

若指标集$\{n_k\}$中有最大者，则 B 是有限集；若指标集$\{n_k\}$无最大者，则 B 是可数集。

(2)设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$都是可数集，要证明 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 也是可数集。令

$$\begin{array}{l}
A_1=\{a_{11},\quad a_{12},\quad a_{13},\quad a_{14},\cdots\}\\
A_2=\{a_{21},\quad a_{22},\quad a_{23},\quad a_{24},\cdots\}\\
A_3=\{a_{31},\quad a_{32},\quad a_{33},\quad a_{34},\cdots\}\\
\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
A_k=\{a_{k1},\quad a_{k2},\quad a_{k3},\quad a_{k4},\cdots\}\\
\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots
\end{array}$$

按上面的顺序排列得到

$$\{a_{11},a_{12},a_{21},a_{31},a_{22},a_{13},a_{14},a_{23},a_{32},\cdots\}$$

从中删去重复的元素，这样 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的元素可以排列成一个无穷序列，即能用自然数编号，故它是可数的。

例 3 奇数全体组成的集合、偶数全体组成的集合、整数全体组成的集合都是可数集。显然，这些集合与自然数集 N 对等。

例 4 有理数全体构成一可数集。

事实上，任何有理数 p 均可写成既约分数$\frac{m}{n}$，m、n 皆为整数，且 $n\neq 0$。我们可以把$\frac{m}{n}$认为是与直角坐标平面上的点(m,n)对应，由定理 3 可知，这种格点(m,n)的全体至多是可数的。所以，有理数全体组成的集合是可数的，有理数集记作 Q。

例 5 有理系数多项式全体组成的集合是可数的，

事实上，零次有理系数多项式$\{a\}$全体是可数的，一次有理系数多项式全体$\{ax+b\}$是可数的，……，k 次有理系数多项式全体$\{ax^k+bx^{k-1}+\cdots+c\}$是可数的，……。根据定理 3，故有理系数多项式全体构成的集合是可数的。

可以证明，闭区间$[0,1]$中全体实数是不可数集，于是，开区间$(0,1)$中全体实数也是不可数集。再对每一个 $x\in(0,1)$，令 $f(x)=\mathrm{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$，可得开区间$(0,1)$和全体实数 R 是对等的，故实数集 R 是不可数集，从而推得全体无理数也是不可数集。

§1.3 实数集的完备性

全体实数组成的集合为实数集 R，因为它与数轴上的点集有一一对应的关系，所以，对实数集的研究与直线上点集的研究是完全一致的。同时还要指出，我们在一维空间 R 中引进的一些基本概念及所得到的定理，原则上可以直接推广到 n 维空间 R^n 中去。

一、上确界和下确界

实数集 R 最简单的子集是区间，它包括开区间、闭区间和半开区间等。现在我们要讨论的是直线上一般的点集。

定义 1 设 $a\in R$，集合

$$O(a,\delta)\triangleq\{x\mid |x-a|<\delta\}$$

(符号$\triangleq$表示"定义为"或"恒等于")称为 a 的 δ 邻域，其中 δ 是给定的正数。

设 $A\subset R$，$a\in A$，如果 $O(a,\delta)\subset A$，则称 a 为集 A 的内点；如果 A 中的每一点都是内点，则称 A 为开集；如果 $A^c=R-A$ 是开集，则称 A 为闭集。

定义 2 设 $A\subset R$，如果存在数 $a\in R$，使得对于所有的 $x\in A$，都有 $x\leqslant a$，则称 A 有上界；如果 $A\neq\varnothing$，则集 A 的最小上界称为 A 的上确界，记作 $\sup A$。这就是说，对于 A 的每一个上界 a，都有 $\sup A\leqslant a$，但是，对于任给的 $\varepsilon>0$，必存在 $x_0\in A$，使得 $x_0>\sup A-\varepsilon$。显然，如果 $B\subset A$ 且 $B\neq\varnothing$，则有 $\sup B\leqslant\sup A$。

类似地，如果存在数 $b\in R$，使得对于所有的 $x\in B$ 都有 $x\geqslant b$，则称 B 有下界；如果 $B\neq\varnothing$，则集 B 的最大下界，称为 B 的下确界，记作 $\inf B$。这就是说，对于 B 的每一个下界 b，都有 $\inf B\geqslant b$，然而对于任给 $\varepsilon>0$，必存在 $x_0\in B$，使得 $x_0<\inf A+\varepsilon$。显然，如果 $B\subset A$ 且 $B\neq\varnothing$，则 $\inf B\geqslant\inf A$。

如果 A 上有界且下有界，则称集 A 是有界的。因此，如果 $A\neq\varnothing$，则有

$$\inf A\leqslant\sup A$$

必须注意，集 A 的上确界或下确界不一定属于集 A。

根据定义 2，可以证明以下定理：

定理 1(确界存在定理) 有上(下)界的非空数集必有唯一的上(下)确界。

二、Cauchy 收敛准则

定义 3 设实数列$\{x_n\}$和实数 x，如果对于任给 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得对一切 $n>N$，有 $|x_n-x|<\varepsilon$，则 x 称为实数列$\{x_n\}$的极限，或称实数列$\{x_n\}$收敛于 x，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$。显然，这个实数列和极限在数轴上就有与之相对应的点列和极限点。

如果点列$\{x_n\}$满足：对于任给 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N>0$，使得当 $m,n>N$ 时，总有 $|x_m-x_n|<\varepsilon$，则称点列$\{x_n\}$是 Cauchy 点列或基本列。

我们知道，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则点列$\{x_n\}$必有界，但其逆不成立。

定理 2 (Bolzana－Weierstrass 定理) 有界的无穷点列必有收敛子点列。

定理 2 指出，任何有界点列$\{x_n\}$至少有一个极限点。如何判断一个点列$\{x_n\}$是否收敛呢？下面叙述 Cauchy 收敛准则，其重要性在于这样一个事实：它从给定点列$\{x_n\}$本身即可判断其收敛性而无需知道它的极限。

定理 3 (Cauchy 收敛准则) 点列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是点列$\{x_n\}$是基本列。

证明 *必要性* 如果$\{x_n\}$收敛于 a，则对于任给的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N>0$，使当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是，对于 $m、n>N$，推得

$$|x_m - x_n| \leqslant |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

故点列 $\{x_n\}$ 是基本列。

充分性 设点列 $\{x_n\}$ 是基本列，于是对于给定的 $\varepsilon=1$，总可选择一个 N_0，当 $m、n>N_0$ 时，有 $|x_n-x_m|<1$。特别地，当 $n>N_0, m=N_0+1$ 时，有 $|x_n-x_{N_0+1}|<1$，从而当 $n\geqslant N_0$ 时，有 $|x_n| \leqslant |x_n-x_{N_0+1}|+|x_{N_0+1}|<1+|x_{N_0+1}|$。

令 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_{N_0+1}|,1+|x_{N_0+1}|\}$ 时，则对一切自然数 n，都有

$$|x_n| < M$$

所以点列 $\{x_n\}$ 是有界的。

根据 Bolzana—Weierstrass 定理可知，该点列 $\{x_n\}$ 必有收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$ 即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$，这意味着对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $K>0$，当 $k>K$ 时，有

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

取一正整数 $k_0=\max(K+1,N+1)$，于是必有 $k_0>K$，且 $n_{k_0}\geqslant n_{N+1}\geqslant N+1>N$。由于已知点列 $\{x_n\}$ 是基本列，因此，当 $n、m>N$ 时，有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$，所以

$$|x_n - a| \leqslant |x_n - x_{n_{k_0}}| + |x_{n_{k_0}} - a| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

定义 4 设 A 是 R 中的点集，如果 A 中任意基本点列都在 A 中收敛，则称集 A 是完备的。例如，区间 $(0,1)$ 不是完备的点集，因为点列 $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ 是集 $(0,1)$ 中的基本列，但它在 $(0,1)$ 中没有极限点即不收敛，因而集 $(0,1)$ 是不完备的。如果在 $(0,1)$ 中加上一些点，使之成为闭集 $[0,1]$，这样，它就成为完备的点集。

通过以上的讨论，可以指出，确界存在定理、Bolzana－Weierstrass 定理及 Cauchy 收敛准则都是等价的，它们从不同角度刻划了实数的本质属性——连续性即完备性，从而得出实数集 R 是完备的。也就是说，它关于极限运算是封闭的，所以，它们都是很重要的一批基本定理。

§1.4 集合的测度与可测函数

Riemann 积分的定义是函数 $f(x)$ 具有连续性或"间断点不太多"的条件下作出的，这种积分虽然解决了很多的实际问题，但随着科学技术的发展，它的局限性也明显地表现出来。另外，在理论上这种积分也存在一些弊端，如积分与极限换序、积分与微分换序、积分与积分换序等这些基本运算所要求的条件较苛刻。鉴于 Riemann 积分的这些缺陷，建立新的积分势在必行，经过人们长期的探索，在总结前人工作的基础上，1902 年法国数学家 Lebesgue 成功地引入了一种新的积分，即 Lebesgue 积分，它已成为近代数学、物理及工程技术等领域中方便而有力的工具。

根据 Riemann 积分的结构可以看出，要在原积分的基础上产生 Lebesgue 积分的概念，我们必须扩大可积函数类，同时对直线上一般点集也要引入类似于区间长度的定义。为此，本节介绍点集的测度和可测函数及其基本性质。

限于篇幅，以下两节涉及到的定理，一般不予证明，有兴趣的读者可参阅文献[1]。

一、点集的测度

为了便于理解，我们从直线上的点集引入 Lebesgue 测度（以下简称测度）的有关概念和结论，这些内容从一维空间 R 推广到 n 维空间 R^n 没有本质上的困难。

考虑 R 中的有界点集 E。设 $I_1, I_2, \cdots, I_n, \cdots$ 是一串区间，$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$，用 mI_n 表示开区间 I_n 的长度，那末，$\sum_{n=1}^{\infty} mI_n$ 是一个非负的数集，且 $\{\sum_{n=1}^{\infty} mI_n | E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\}$ 是下方有界的，因此，必有下确界。

定义 1 点集 E 的外测度定义为

$$\mu^*(E) \triangleq \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} mI_n | E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\}$$

设 $E \subset [a,b]$，E 的余集 $E^c = [a,b] - E$ 的外测度为 $\mu^*(E^c)$，则称数

$$\mu_*(E) \triangleq (b-a) - \mu^*(E^c)$$

为 E 的内测度。

从定义中可以推出：对任何点集 E，有

$$\mu_*(E) \leqslant \mu^*(E)$$

定义 2 对于有界点集 E，如果

$$\mu^*(E) = \mu_*(E)$$

则称 E 是 Lebesgue 可测集，简称可测集；E 的外测度和内测度的公共值称为 E 的 Lebesgue 测度，简称测度，记作 $\mu(E) = \mu^*(E) = \mu_*(E)$。

如果

$$\mu(E) = 0$$

则称点集 E 为零测集。

显然，如果 E 是区间，则 $\mu(E) = mE$。

对于二维的情形，即 E 是 R^2 中的点集时，只要在定义中取一串开矩形代替 $\{I_n\}$ 就可以，以此类推，故测度的定义不难推广到 R^n 中的点集。由此可见，所谓测度就是普通长度、面积和体积等概念的推广。

现在叙述可测集的一些基本性质。

定理 1 (1) 如果 E_1 和 E_2 可测，则 $E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2, E_1 - E_2$ 均可测；

(2) 如果 E_1 和 E_2 可测，且 $E_1 \subset E_2$，则 $\mu(E_1) \leqslant \mu(E_2)$；

(3) 如果 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ 是可测集，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 及 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ 也可测，而且当 $\{E_n\}$ 中两两不相交时，有

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \qquad \text{（测度的完全可加性）}$$

(4) 有界开集、有界闭集都是可测集。

例 1 证明有界可数集 $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ 是零测集即可测集。

证明 对 $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ 中任一点 x_n，作一小开区间

$$I_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$$

其中 $\varepsilon>0$ 是任意小的正数，显然，$E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$，且

$$0\leqslant\mu^*(E)\leqslant m(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}mI_n$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+\cdots+\frac{\varepsilon}{2^n}+\cdots=\varepsilon$$

由 ε 的任意性知，$\mu^*(E)=0$，而 $0\leqslant\mu_*(E)\leqslant\mu^*(E)$，故 $\mu(E)=0$，所以，E 是一个零测集。

例 2 设 E 是$[0,1]$中无理点集，则 $\mu(E)=1$。

事实上，由例 1 知，$[0,1]$中的全体有理数构成之集是可数集 Q，其测度 $\mu(Q)=0$，因而$[0,1]$中全体无理数构成之集 E 是可测集。根据测度的可加性得

$$\mu(E)=\mu([0,1])-\mu(Q)=1$$

由以上两例可知，单点集的测度为零，我们还规定空集$\varnothing$的测度为零。另外，区间(开、闭或半开半闭)都是可测集，且测度等于区间的长度。

定义 3 设 E 是无界点集，作区间

$$J_k=\{x\,|\,|x|<k\}\qquad(k=1,2,\cdots)$$

如果对每个 k，$E\cap J_k$ 是可测集，则称 E 是可测的，其测度定义为

$$\mu(E)=\lim_{k\to\infty}\mu(E\cap J_k)$$

在此可测意义下，定理 1 仍然成立。

应该指出，R 中全体可测集组成的集类称为可测集类，记作 L。在 L 中，交、并、可列交、可列并，以及有限差运算的结果仍是可测集，即 L 对这些运算是封闭的。

同时，由于开集、闭集都是可测的，从开集、闭集出发，经过上述运算可得到构造极为复杂的可测集，称此集类为 Borel 集类，记作 B。显然，$B\subset L$。

由此可以看到，可测集的范围非常广泛，在实际问题中所碰到的有界集几乎全部都是可测集。但是现在已研究清楚了，不属于可测集的有界集以及属于可测集而不属于 Borel 集的有界集确实存在。由于其构造太抽象又很复杂，我们这里不再叙述。

二、可测函数

定义 4 设 $f(x)$是定义在可测集 E 上的实值函数，如果对任意实数 a，集合

$$E(f>a)=\{x\,|\,f(x)>a,x\in E\}$$

恒可测，则称 $f(x)$是 E 上的 Lebesgue 可测函数，或简称为可测函数。

例 3 零测集 E 上定义的任意实值函数均是可测函数。

证明 因对$\forall\ a\in R$，集

$$E(f>a)=\{x\,|\,f(x)>a,x\in E\}$$

是 E 的子集，即 $E(f>a)\subset E$，故 $E(f>a)$ 是可测的，且 $\mu(E(f>a))=0$，所以，$f(x)$是可测函数。

例 4 设 E 是可测集，证明定义在 E 上的常值函数

$$f(x)=c$$

是可测函数。

证明 因对$\forall\ a\in R$，有

$$E(f>a)=\{x\,|\,f(x)>a,x\in E\}=\begin{cases}\varnothing,a\geqslant c\\E,a<c\end{cases}$$

故 $E(f>a)$ 可测，所以 $f(x)$ 是可测函数。

例 5 设 E 是可测集，$E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$，E_i 可测且互不相交($i=1,2,\cdots,n$)，$f(x)$ 是定义在 E 上，且在各 E_i 上分别取常数 c_i 的函数(称为简单函数)，则 $f(x)$ 是可测函数。

证明 因对 $\forall a\in R$，集

$$E(f>a)=\{x\mid f(x)>a,x\in E\}$$

或为空集 $\varnothing$，或为有限个 E_i 之并，因此 $E(f>a)$ 是可测集，所以 $f(x)$ 是可测函数。

例 6 设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的可测函数，则对任意 $a\in R$，集

$$E(f\geqslant a)=\{x\mid f(x)\geqslant a,x\in E\}$$
$$E(f\leqslant a)=\{x\mid f(x)\leqslant a,x\in E\}$$
$$E(f=a)=\{x\mid f(x)=a,x\in E\}$$
$$E(a\leqslant f\leqslant b)=\{x\mid a\leqslant f(x)\leqslant b,x\in E,a,b\in R\}$$

都是可测的。

事实上

$$E(f\geqslant a)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left(f>a-\frac{1}{n}\right)$$
$$E(f\leqslant a)=E-E(f>a)$$
$$E(f=a)=E(f\geqslant a)-E(f>a)$$
$$E(a\leqslant f\leqslant b)=E(f\geqslant a)\cap E(f\leqslant b)$$

根据已知条件和定理 1，上述集合都是可测集。

例 7 定义在 R 上的连续函数 $f(x)$ 是可测函数。

证明 对 $\forall a\in R$，如果集合 $E(f>a)=\varnothing$，则因空集 $\varnothing$ 是具有零测度的可测集，故 $f(x)$ 可测；如果集 $E(f>a)$ 非空，则可证明它是开集。为此，任取 $x_0\in E(f>a)$，则 $f(x_0)>a$。由于 $f(x)$ 在 x_0 处连续，故存在 $\delta>0$，使当 $x\in O(x_0,\delta)$ 时，$f(x)>a$，这表明 $O(x_0,\delta)\subset E(f>a)$，因此，$x_0$ 是 $E(f>a)$ 的内点。由 x_0 的任意性知，$E(f>a)$ 是开集，从而可测，所以 $f(x)$ 是可测函数。

可以证明，可测集上的连续函数必为可测函数，但是，可测函数不一定是连续函数。

例 8 Dirichlet 函数 $f(x)$ 定义为

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为}[0,1]\text{ 中的有理数时}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为}[0,1]\text{ 中的无理数时}\end{cases}$$

证明 $f(x)$ 是 $E=[0,1]$ 上的可测函数。

证明 令 E_1,E_2 分别表示有理点集、无理点集，a 为任意实数，根据 Dirichlet 函数 $f(x)$ 的定义，有

$$E(f>a)=\begin{cases}E, & \text{当 } a<0 \text{ 时}\\ E_1, & \text{当 } 0\leqslant a<1 \text{ 时}\\ \varnothing, & \text{当 } a\geqslant 1 \text{ 时}\end{cases}$$

由于 E,E_1 和 $\varnothing$ 都是可测集，因此，不论 a 是怎样的实数，集 $E(f>a)$ 恒可测，故 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，但 $f(x)$ 在 E 上处处不连续。

定理 2 设 $f(x)$，$g(x)$ 是定义在可测集 E 上的可测函数，则 $kf(x)$，$f(x)\pm g(x)$，$|f(x)|$，$|f(x)|^{\alpha}$，$f(x)g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$($g(x)\neq 0$，k、α 为实常数)都是可测函数。

证明略。

定义 5 设 E 是可测集，P 是一确定在 E 上的数学命题(如连续、可微、收敛等)。如果存在 $E_0 \subset E$ 且 $\mu(E_0)=0$，使 P 在 $E-E_0$ 上成立，则称 P 几乎处处成立于 E，记作 $P a.e.$ 于 E。

必须指出，因空集 $\varnothing$ 是零测集，故 P 在 $\varnothing$ 上成立，也可说 P 在 $\varnothing$ 上几乎处处成立。

例 9 已知 $f(x)=\sin x$，则 $f(x)$ 在 R 上几乎处处不为零，记作 $f(x)\overset{a.e.}{\neq}0$。

例 10 已知 $f(x)=\mathrm{tg}x$，则 $f(x)$ 在 R 上几乎处处连续，记作 $f(x)_{a.e.}$ 于 R 上连续。

例 11 如果 $f(x)=\mathrm{tg}x$，$g(x)=\begin{cases} x^2, & x \text{ 为有理数} \\ \mathrm{tg}x, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$，则 $f(x)$ 几乎处处等于 $g(x)$，记作 $f(x)\overset{a.e}{=\!=}g(x)$。

最后，为了更深入了解可测函数，我们给出可测函数和连续函数的关系。

定理 3(Lusin 定理) 如果 $f(x)$ 是 E 上的几乎处处有限的可测函数，则对于 $\forall\ \delta>0$，存在闭集 $F \subset E$，使得 $\mu(E-F)<\delta$，且 $f(x)$ 限制在 F 上是连续函数。

通过定理 3 可知，可测函数是比连续函数广泛得多的函数类。但从结构上来看，它们之间的关系是很密切的，且实际上只差"一点点"。所谓"一点点"指的就是在 E 中去掉一个测度任意小的子集后，可测函数就成为连续函数了。

§1.5 Lebesgue 积分

本节首先对有界函数引进 Lebesgue 积分的概念，然后扩充到非负函数及一般函数。建立这种积分理论有多种方法，下面采用类似于 Riemann 积分方案。这样，一是便于和 Riemann 积分相对照；二是能更好地突出积分概念的基本思想，即分割求和。

设 E 为可测集，而 $\mu(E)<+\infty$，$f(x)$ 是 $E=[a,b]$ 上的有界函数。Lebesgue 建立新的积分的方法不是对 $[a,b]$ 进行分割，而是对函数值进行分割，即把函数值很相近的那些点 x 归在一起，从而得到 $[a,b]$ 的一个分法。具体地说，$f(x)$ 的值介于 A 与 B 之间，在 $[A,B]$ 中插入分点

$$A=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=B$$

令

$$E_k=\{x \mid y_{k-1} \leqslant f(x)<y_k, x \in [a,b]\}(k=1,2,\cdots,n)$$

如果 y_k-y_{k-1} 很小，那末，同一点集 E_k 中的两点所对应的函数也很接近。它与 Riemann 方法的不同之处在于：E_k 中相异的两点可能相距很远，E 可能不是小区间的形式。

定义 1 设 $\mu(E)<+\infty$，$f(x)$ 是定义在可测集 E 上的有界函数，如果 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k$，其中每个 E_k 都是可测集，诸 E_k 互不相交，且 $\mu(E)=\sum\limits_{k=1}^{n}\mu(E_k)$，则称 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 构成 E 的一个分划，这种分划称为可测分划，记作 D。

任取 $f(\xi_i)\in[y_{i-1},y_i]$，$\xi_i \in E_i(i=1,2,\cdots,n)$，作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\mu(E_i) \tag{1.5.1}$$

若当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(y_i-y_{i-1})\to 0$ 时，和式(1.5.1)的极限存在，且此极限值不依赖于可测分划 D 和 $f(\xi_i)$ 的选取方法，则 f 称为在 E 上关于测度 μ 是 Lebesgue 可积的，简称为 L—可积的，此极限值称为 f 在 E 上的 Lebesgue 积分，简称 L—积分，记作

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\mu(E_i)$$

有时为了与其他积分区别，也记作$(L)\int_E f(x)\mathrm{d}x$。

定义 2 设在可测集 E 上 $f(x)\geqslant 0$，对于任意的正整数 n，令

$$\{f(x)\}_n = \begin{cases} f(x), & \text{当 } f(x)\leqslant n \text{ 时} \\ n, & \text{当 } f(x) > n \text{ 时} \end{cases}$$

如果$\{f(x)\}_n$都是有界可积函数，则称 $f(x)$在 E 上有积分值，其值为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E \{f(x)\}_n \mathrm{d}x$$

由于$\{f(x)\}_n$随 n 增加而单调上升，因此右端的极限总是存在的（可能为$+\infty$），特别当其为有限值时，则称 $f(x)$为在 E 上的非负 L—可积函数。

定义 3 设 $f(x)$是定义在可测集 E 上的可测函数，令

$$\begin{cases} f^{+}(x) = \max\{f(x),0\} \\ f^{-}(x) = \max\{-f(x),0\} \end{cases}$$

则 f^+和 f^-都是非负可测函数，且 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$，因此，对 f 的积分的研究可化为对 f^+和 f^-的积分的研究。如果非负可测函数 f^+和 f^-都在 E 上有积分值，且不同时为正无穷大，则称 $f(x)$在 E 上有积分值，其积分值为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E f^{+}(x)\mathrm{d}x - \int_E f^{-}(x)\mathrm{d}x$$

如果 f^+和 f^-的积分值都是有限值，则称 $f(x)$是 E 上的 L—可积函数。

定义 4 设 $\mu(E)=+\infty$（一维情形），令

$$J_n = [-n,n], E_n = E\cap J_n \quad (n = 1,2,\cdots)$$

于是，$E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots\subset E$ 且 $E=\lim\limits_{n\to\infty}E_n$，又设 $f(x)$在每个 E_k 上可测，如果

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x$$

为有限值，则称 $f(x)$在 E 上为 L—可积，并且称此极限值为 $f(x)$在 E 上的 L—积分，记作

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x$$

如果$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 为 $+\infty$ 或 $-\infty$，则称 $f(x)$ 在 E 上有积分值 $+\infty$ 或 $-\infty$。

我们把 Lebesgue 积分和 Riemann 积分作一比较，可以看出，在 Riemann 积分的定义中，它是把区间$[a,b]$划分为若干小区间，这可以看作是 Lebesgue 划分方法的一种特殊情形。可以证明，如果 $f(x)$在 $E=[a,b]$上是 R—可积，则 $f(x)$在 E 上是 L—可积的，且两个积分值相等，即

$$(R)\int_E f(x)\mathrm{d}x = (L)\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

其逆不真。

以上公式表明，在计算$(L)\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 时，如果能用熟悉的方法（Newton − Leibniz 公式）求得$(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x (E = [a,b])$，则 R— 积分的值就是所求 L— 积分的值。

另外，Lebesgue 积分确为 Riemann 积分的推广。可以指出，Lebesgue 积分对函数 $f(x)$及

诸多换序运算所要求的条件大为减弱，因此，作为一个积分工具而言，Lebesgue 积分是更为灵活方便，且应用的范围更加广泛。

定理 1 一切有界可测函数都是 L—可积的。

必须指出：(1)定理 1 给出 L—可积函数的一个范围，但由于不可测的有界函数“极少”，故 L—可积函数的范围很大，例如，处处不连续的函数

$$f(x)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数},\\0, x\text{ 为无理数},\end{cases}\quad x\in E=[a,b]$$

便是一个 L—可积函数，且积分值为

$$(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$$

(2)定理 1 的逆定理也是成立的。即在可测集 E 上的有界函数，如果它是 L—可积的，则必定是可测的。

定理 2 设 E 是可测集，$\mu(E)<+\infty$

(1)如果 $f(x)$在 E 上 L—可积，那末，对任何常数 c，$cf(x)$也在 E 上 L—可积，且

$$\int_E cf(x)\mathrm{d}x=c\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

(2)如果 $f(x)$在 E_1 和 E_2 上 L—可积，且 $E_1\cap E_2=\varnothing$，则 $f(x)$在 $E_1\cup E_2$ 上 L—可积，且

$$\int_{E_1\cup E_2}f(x)\mathrm{d}x=\int_{E_1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_2}f(x)\mathrm{d}x$$

(3)如果 $f(x)$和 $g(x)$都在 E 上 L—可积，则 $f(x)+g(x)$也在 E 上 L—可积，且

$$\int_E(f(x)+g(x))\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x$$

(4)如果 $f(x)$和 $g(x)$都在 E 上有界可测，则 $f(x)g(x)$在 E 上 L—可积。

定理 3 $f(x)$在$[a,b]$上 R—可积的充分必要条件是 $f(x)$在$[a,b]$上几乎处处连续。

这个定理回答了 Riemann 积分本身没有解决的问题。下面我们继续给出 L—积分的几个重要定理，从中可以看出 L—积分的优点。

定理 4 （Lebesgue 控制收敛定理） 设$\{f_n(x)\}$是可测集 E 上的可测函数列，满足条件：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\overset{a.e.}{=\!=}f(x)$；

(2) 存在可积函数 $F(x)$，使得对一切 $x\in E$，有

$$|f_n(x)|\leqslant F(x)(n=1,2,\cdots)(a.e.)$$

则 f 在 E 上是 L—可积的，且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$$

定理 5(逐项积分定理) 设$\{f_n\}$是可测集 E 上的一列非负可测函数，且在 E 上 $f(x)\overset{a.e}{=\!=}\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$$

定理 6 （Levi 定理） 设$\{f_n\}$是可测集 E 上的一列非负可测函数，且

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$$

如果在 E 上 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \overset{a.e.}{=\!=} f(x)$，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$$

定理 7(Fubini 定理)　设 $f(x,y)$是乘积空间 $R^{p+q}=R^pR^q$ 上的可积函数，则

(1) 几乎对于所有的 $x\in R^p$，$f(x,y)$是 y 的可积函数。

(2) 几乎处处有定义的函数

$$g(x) = \int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y$$

是在 R^p 上可积的。

(3)下列等式成立。

$$\int_{R^{p+q}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{R^p}\mathrm{d}x\int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{R^q}\mathrm{d}y\int_{R^p} f(x,y)\mathrm{d}x$$

§1.6　几个常用的不等式

1. 对任意 $a,b\in R$，有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \tag{1.6.1}$$

证明　设 $f(t)=\frac{t}{1+t}$，$t>-1$，于是 $f'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}>0$，所以，$f(t)$是增函数。因此

$$f(|a+b|) = \frac{|a+b|}{1+|a+b|}$$

$$f(|a|+|b|) = \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$$

所以

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

2. 设 $p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$($p,q$ 称为相伴数)，$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，则有

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{1.6.2}$$

证明　考察(x,y)平面上，由方程 $y=x^{p-1}$所定义的曲线，这曲线也可用方程 $x=y^{q-1}$来表示(图 1.1)。从图 1.1 中可见，不论 a,b 是什么样的正数，总有

$$ab \leqslant s_1 + s_2$$

而面积

$$s_1 = \int_0^a x^{p-1}\mathrm{d}x = \frac{a^p}{p}$$

$$s_2 = \int_0^b x^{q-1}\mathrm{d}y = \frac{a^q}{q}$$

所以，式(1.6.2)得证。

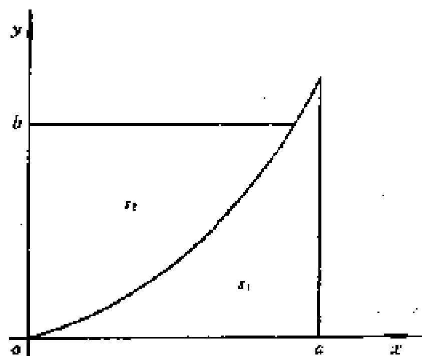


图 1.1

3. Hölder 不等式。设 p,q 为式(1.6.2)中所设的相伴数，$x_k,y_k(k=1,2,\cdots,n)$是实数，则有不等式

$$\sum_{k=1}^{n}|x_ky_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.6.3}$$

证明 令

$$a_k = \frac{|x_k|}{\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \qquad b_k = \frac{|y_k|}{\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

根据式(1.6.2)，有

$$a_kb_k \leqslant \frac{a_k^p}{p} + \frac{b_k^q}{q}$$

将 a_k，b_k 的表达式代入上式，并对 k 从 1 到 n 求和，得

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}|x_k||y_k|}{\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p}{p\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)} + \frac{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q}{q\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

由于$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，所以不等式(1.6.3)成立。

如果在不等式(1.6.3)中取 $p=2$，于是 $q=2$，则式(1.6.3)化为 Cauchy－Schwarz 不等式

$$\sum_{k=1}^{n}|x_ky_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2} \tag{1.6.4}$$

4. 积分型的 Hölder 不等式。设 p、q 为式(1.6.2)所设的相伴数，则有积分型不等式

$$\int_a^b |x(t)y(t)|\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |y(t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.6.5}$$

式(1.6.5)对于使右边的积分有意义的任何函数 $x(t)$，$y(t)$都成立。

5. Minkowski 不等式。设 $1\leqslant p<+\infty$，则对实数 x_k，$y_k(k=1,2,\cdots,n)$有不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.6.6}$$

证明 当 $p=1$ 时，不等式(1.6.6)显然成立。

设 $1<p<+\infty$，则有

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k + y_k|^p \leqslant \sum_{k=1}^{n}|x_k||x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n}|y_k||x_k + y_k|^{p-1}$$

对上式右端的每一个和数应用 Hölder 不等式(1.6.3)，并注意$(p-1)q=p$，于是

$$\sum_{k=1}^{n}(|x_k| + |y_k|)^p \leqslant \left\{\sum_{k=1}^{n}(|x_k| + |y_k|)^p\right\}^{\frac{1}{q}}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

再用 $\left\{\sum_{k=1}^{n}(|x_k| + |y_k|)^p\right\}^{\frac{1}{q}}$ 除上述不等式的两边，即得式(1.6.6)成立。

6. 积分型的 Minkowski 不等式。设 $p\geqslant 1$，则有

$$\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.6.7}$$

式(1.6.7)对于使右边有意义的任何函数 $x(t)$，$y(t)$都成立。

习 题 一

1. 证明 $A-B=A\cap B^c$。

2. 设 A、B 是直线上的开集，证明 $A\cup B$ 和 $A\cap B$ 也是开集。

3. 设 f 是 $X\to Y$ 的映射，且 $A\subset X$，$B\subset Y$，证明：

(1)$A\subset f^{-1}[f(A)]$；

(2)$f[f^{-1}(B)]\subset B$；

(3)$f^{-1}(B^c)=[f^{-1}(B)]^c$。

4. 设 B 是 A 的非空子集，证明：

$$\inf A\leqslant\inf B\leqslant\sup B\leqslant\sup A$$

5. 证明所有系数为有理数的多项式的全体组成一个可数集。

6. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件

$$|a_n-a_{n+1}|<\frac{1}{2^n},n=1,2,\cdots$$

证明数列 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 点列。

7. 证明区间 $(0,1)$ 不是零测集，并且直线上任一开集都不是零测集。

8. 证明集合 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left\{x\,|\,\frac{1}{n+1}\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}\right\}$ 的测度为 1。

9. 如果 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数，k 是一个有限数，则 (1)$f(x)+k$；(2)$kf(x)$；(3)$|f(x)|$ 都是可测函数。

10. 设 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 在区间 I 上的递增函数列，令 $u_n=\max\{f_n,g_n\}$，$U_n=\min\{f_n,g_n\}$

(1)证明 $\{u_n\}$ 和 $\{U_n\}$ 是 I 上的递增函数列；

(2)若 $f_n\nearrow f$ a.e. 于 I，$g_n\nearrow g$ a.e. 于 I，证明 $u_n\nearrow\max(f,g)$，$U_n\nearrow\min(f,g)$。

11. 求函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\text{ 为无理点}\\ 1, & x\text{ 为有理点}\end{cases}$ 在区间 $[0,1]$ 上 L—积分。

12. 函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 在 $[0,1]$ 上是否 L—可积？

第二章 Banach 空间和 Hilbert 空间

在许多工程技术中，我们考察的系统不仅是它的某个状态，而且是所有可能状态的全体，这种情况经过抽象反映到数学上，就是要求研究函数或函数列所组成的集合。在处理具体问题时还要求在非空集合上引入某种数学结构，这种具有某种数学结构的集合称之为抽象空间。本章首先在非空集合上用公理化的方法给出线性空间、度量空间、赋范空间(Banach 空间)及内积空间(Hilbert 空间)的定义，然后分别讨论这几个空间的性质，这些内容是泛函分析最精华的部分。

§2.1 线性空间

定义 1 设 X 是一个非空集合，K 是一个数域(K 为实数域 R 或为复数域 C)。如果在 X 中定义加法运算和数乘运算，且具有下列性质，则 X 称为数域 K 上的线性空间。

1. 加法运算

对于任意 $x,y\in X$，都有唯一确定的元素 $z\in X$ 与它对应，即 $(x,y)\mapsto z$，称 z 为 x 与 y 之和，记作 $z=x+y$，且满足：

(1) $x+y=y+x$；

(2) 对任意 $z\in X$，$(x+y)+z=x+(y+z)$；

(3) 存在 $\theta\in X$，使得对任意 $x\in X$ 有 $x+\theta=x$(此元素 θ 称为 X 的零元素)；

(4) 对任意 $x\in X$，$\exists\ x'\in X$，使得 $x+x'=\theta$，x' 称为元素 x 的负元素，记作 $x'=-x$。

2. 数乘运算

对任意 $\alpha\in K$，任意 $x\in X$ 都有 X 中唯一确定的元素 w 与之对应，即 $(\alpha,x)\mapsto w$，称 w 为 α 与 x 的积，记作 $w=\alpha x$，且满足：

(1) 对于任意 $\beta\in K$，$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$；

(2) $1x=x(1\in K)$；

(3) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$，$\beta\in K$；

(4) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$，$y\in X$。

如果 K 为实数域 R，则称 X 为实线性空间；如果 K 为复数域 C，则称 X 为复线性空间，或称为实或复的向量空间。线性空间的元素又称为向量或点，零元素 θ 也叫做空间的原点(有时为了方便起见，仍把零元素 θ 记作 0)，X 中元素的相加及数与元素相乘统称为线性运算。

例 1 R^n(n 个 R 的直积)是一个实线性空间。对于 $\forall\ x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in R^n$ 和 $\forall\ y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\in R^n$，$\alpha\in R$，定义加法运算和数乘运算为

$$x+y\triangleq(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n)$$

$$\alpha x\triangleq(\alpha\xi_1,\alpha\xi_2,\cdots,\alpha\xi_n)$$

容易验证，此线性运算都满足线性空间定义中的所有公理，因此 R^n 是实线性空间。

类似地可以定义与验证 C^n(n 个复数集 C 的直积)是一复线性空间。

例 2 $C^{m\times n}$表示 $m\times n$ 复矩阵的全体组成的集合,它是复线性空间。

实际上,按照复矩阵加法和数乘的运算,定义 $C^{m\times n}$上的线性运算,即对任意的

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}\in C^{m\times n},\text{即}$$

$A,B\in C^{m\times n}$及 $\alpha\in C$

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$$

$$\alpha A=\begin{pmatrix}\alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn}\end{pmatrix}$$

容易验证,上述运算满足线性空间定义中的所有条件,所以 $C^{m\times n}$是复线性空间。

同样,$m\times n$ 实矩阵的全体组成的集合 $R^{m\times n}$在实数域 R 上,按上述方法定义线性运算而成为实线性空间。

例 3 连续函数空间 $C[a,b]$是一个线性空间。对于 $C[a,b]$中任意两个元素 $x(t)$和 $y(t)$,$\alpha\in K$,定义

$$(x+y)(t)\xlongequal{\triangle}x(t)+y(t),t\in[a,b]$$

$$(\alpha x)(t)\xlongequal{\triangle}\alpha x(t),t\in[a,b]$$

显然,上述运算满足线性空间定义中的所有条件,因此 $C[a,b]$按上述加法运算和数乘运算成为线性空间。

例 4 $l^p(p\geqslant 1)$是一线性空间。对 l^p 中的任意两个元素 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$,$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$和 $\alpha\in K$,定义

$$x+y\xlongequal{\triangle}(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots)$$

$$\alpha x\xlongequal{\triangle}(\alpha\xi_1,\alpha\xi_2,\cdots)$$

现在证明这样定义的 $x+y$ 和 αx 仍属于 l^p。

事实上,因

$$|\xi_i+\eta_i|^p\leqslant(|\xi_i|+|\eta_i|)^p\leqslant(2\max_i(|\xi_i|,|\eta_i|))^p$$

$$=2^p(\max_i(|\xi_i|,|\eta_i|))^p\leqslant 2^p(|\xi_i|^p+|\eta_i|^p)$$

所以

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^p\leqslant 2^p\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p+\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^p\right)<+\infty$$

因此,$x+y\in l^p$,显然,易于验证 $\alpha x\in l^p$。这种运算满足线性空间定义中的所有条件,故 $l^p(p\geqslant 1)$按上述加法与数乘运算成为线性空间。

定义 2 设 X 是数域 K 上的线性空间,X_0 是 X 的非空子集,如果对$\forall\ x,\ y\in X_0$ 及 $\alpha\in K$,都有 $x+y\in X_0$ 及 $\alpha x\in X_0$,那末 X_0 按 X 中加法及数乘运算也成为线性空间,则称 X_0 为

X 的线性子空间。X 和 $\{0\}$ 是 X 的两个线性子空间，称为平凡的子空间。若 $X_0 \neq X$，则称 X_0 是 X 的真子空间。例如，R^3 是一个实线性空间，其上的两种运算规定为：对于任意的 $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 和 $y=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，$\alpha \in K$，有

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \xi_3 + \eta_3)$$
$$\alpha x = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \alpha\xi_3)$$

令 Y 是形如 $y=(\xi_1,0,0)$ 全体构成的集合，在上述运算中，Y 是 R^3 的一个真子空间。

为了今后叙述方便，下面再介绍线性空间中的几个重要概念。

设 X 是数域 K 上的线性空间，$x \in X$，如果存在数 $\alpha_i \in K$，$i=1,2,\cdots,n$，使得

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n, \qquad x_i \in X(i = 1,2,\cdots,n)$$

则称 x 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性组合，或称 x 可用 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性表示；如果存在不全为零的数 $\alpha_i \in K(i=1,2,\cdots,n)$，使

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

则称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为线性相关的一组向量，否则就称向量组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性无关的。

设 $E \subset X$，$E \neq \varnothing$，则 E 中任意有限个元素的线性组合的全体

$$\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n | x_i \in E, \alpha_i \in K \quad (i = 1,2,\cdots,n), n \in N\}$$

是 X 的一个子空间，这个子空间称为由 E 张成的或生成的子空间，记作 span E。

可以证明，span E 是线性空间 X 中包含 E 的最小子空间。换句话说

$$\text{span } E = \bigcap \{Y | Y \subset X, \text{且 } Y \supset E\}$$

通常，将包含 E 的一切子空间的交称为 E 的线性包，因此 span E 是 E 的线性包。

设 $E \subset X$，如果 E 的每一个有限子集都是线性无关的，则 E 称为是线性无关的；如果 E 不是线性无关的，则称 E 是线性相关的。

定义 3 设 X 是数域 K 上的线性空间，如果存在一个正整数 n，使得：

(1) X 中包含一个由 n 个元素组成的线性无关集；

(2) 任何多于或等于 $n+1$ 个元素组成的集都是线性相关的，则称 X 为有限维的，此正整数 n 称为 X 的维数，作记 $\dim X=n$；如果 X 不是有限维的，则 X 称为是无限维的。例如，R^n 和 C^n 都是 n 维的线性空间；$R^{m\times n}$ 和 $C^{m\times n}$ 都是 $m\times n$ 维的线性空间，而 $C[a,b]$ 和 $l^p(p\geqslant 1)$ 均是无限维的线性空间。在泛函分析中，将着重讨论无限维的空间。

如果 $\dim X=n$，则 X 中由 n 个元素组成的线性无关集，称为 X 的一个基；如果 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 X 的一个基，则每一个 $x \in X$ 可唯一地表示为基元 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的线性组合，即存在唯一的 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 使得

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

在 n 维 Euclid 空间 R^n 中，最简单而又常用的规范基是

$$e_1 = (1,0,\cdots,0)$$
$$e_2 = (0,1,\cdots,0)$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$e_n = (0,0,\cdots,1)$$

一般地，设 X 是线性空间（不一定是有限维的），如果 X 的子集 B 是线性无关且 span$B=X$，则 B 称为 X 的一个基。

定义 4 设 E_1 和 E_2 是线性空间 X 的线性子空间

(1)如果

$$E_1+E_2=\{x_1-x_2|x_1\in E_1,x_2\in E_2\}$$

则 E_1+E_2 称为线性子空间 E_1 与 E_2 的和(显然,E_1+E_2 也是 X 的线性子空间)。

(2) 如果对于每一个 $x\in E_1+E_2$,存在唯一的 $x_1\in E_1$ 和 $x_2\in E_2$,使得 $x=x_1+x_2$,则线性子空间 E_1 和 E_2 的和称为直和,记作 $E_1\oplus E_2$。

特别地,当 $X=E_1\oplus E_2$ 时,E_1 和 E_2 互称为补子空间。

容易看出,线性子空间 E_1 与 E_2 的和是直和的充分必要条件是 $E_1\cap E_2=\{0\}$,这时,对于任意的 $x_1\in E_1$ 和 $x_2\in E_2$,x_1 和 x_2 都是线性无关的。

例 5 $P_n[0,1]$表示闭区间$[0,1]$上次数小于或等于 n 的多项式的全体组成的集合。它是 $n+1$ 维空间,取 $x_i\in P_n[0,1]$$(i=0,1,\cdots,n)$满足

$$x_i(t)=t^i\quad(t\in[0,1])$$

则集$\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$是 $P_n[0,1]$的基。

例 6 $R^{m\times n}$和 $C^{m\times n}$都是 $m\times n$ 维线性空间,用 A_{ij}表示第 i 行第 j 列元素为 1 其余元素全为零的 $m\times n$ 矩阵,则

$$\{A_{ij}|i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\}$$

是 $R^{m\times n}$和 $C^{m\times n}$的基。

定义 5 设 X 和 Y 都是数域 K 上的线性空间。如果存在一个 X 到 Y 的双射 T,且满足

$$T(x+y)=Tx+Ty$$
$$T(\alpha x)=\alpha Tx$$

其中 $x,y\in X,\alpha\in K$,则称 X 和 Y 是线性同构的,映射 T 称为 X 到 Y 上的线性同构映射。

必须注意,定义中两个同构线性空间的"同构"的含义是:两个空间的元素一一对应,且两个空间的代数结构(即线性运算)可以看作是相同的。

可以证明,每一个 n 维实(或复)的线性空间都与 R^n(或 C^n)线性同构。不仅如此,我们还可以证明更一般的结论。

定理 1 在同一数域 K 上的两个有限维线性空间是线性同构的,当且仅当它们具有相同的维数。

§2.2 度量空间的定义与实例

在微积分中,我们讨论过极限的概念。所谓数列$\{x_n\}$收敛于 x 即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$,表示$\{x_n\}$接近于 x 的程度是用距离$|x_n-x|$来刻划的。当 $n\to\infty$时,距离$|x_n-x|$趋近于 0,因此极限的定义是建立在两个实数之间的"距离"这个概念上的。本节把距离的概念推广到一般的抽象空间中,并以公理化的形式给出定义,从而揭示这个概念的实质。

定义 1 设 X 是一非空集合,如果对于 X 中任意两个元素 x 和 y,均有一个实数与之对应,此实数记为 $\mathrm{d}(x,y)$,且满足

(1) 非负数 $\mathrm{d}(x,y)\geqslant 0$,而 $\mathrm{d}(x,y)=0$ 的充分必要条件是 $x=y$;

(2) 对称性 $\mathrm{d}(x,y)=\mathrm{d}(y,x)$;

(3) 三角不等式 $\mathrm{d}(x,y)\leqslant\mathrm{d}(x,z)+\mathrm{d}(z,y)$,其中 z 也是 X 中的任意元素,则称 $\mathrm{d}(x,y)$ 为 x 和 y 的度量或距离,并称 X 是以 d 为度量或距离的度量空间或距离空间,记作(X,d)或 X。我们常称 X 是(X,d)的基集,它的元素称为度量空间的点。上述三个条件:(1)、(2)、(3)称

为度量公理。如果 $Y\subset X$ 是 X 的非空子集，则称 (Y,d) 是 (X,d) 的子空间。

例 1 R^n 和 C^n 是度量空间。

事实上，对于任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in R^n$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\in R^n$，定义

$$\mathrm{d}(x,y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2+\cdots+(\xi_n-\eta_n)^2} \tag{2.2.1}$$

容易验证，式(2.2.1)满足度量公理，因此，R^n 是以 d 为度量的度量空间。

如果对 R^n 定义另一个度量

$$\mathrm{d}_1(x,y)=|\xi_1-\eta_1|+|\xi_2-\eta_2|+\cdots+|\xi_n-\eta_n|$$

则 (R^n,d_1) 构成另一个度量空间。

对于 C^n，其度量定义为

$$\dot{\mathrm{d}}(x,y)=\sqrt{|\xi_1-\eta_1|^2+|\xi_2-\eta_2|^2+\cdots+|\xi_n-\eta_n|^2},\quad x,y\in C^n$$

或

$$\dot{\mathrm{d}}_1(x,y)=|\xi_1-\eta_1|^2+|\xi_2-\eta_2|^2+\cdots+|\xi_n-\eta_n|^2$$

容易验证，它们均满足度量公理，因此，$(C^n,\dot{\mathrm{d}})$ 或 $(C^n,\dot{\mathrm{d}}_1)$ 均是度量空间。

例 2 连续函数空间 $C[a,b]$ 是度量空间。对于 $C[a,b]$ 中任意两个点 x,y，定义

$$\mathrm{d}(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$$

显然，它满足度量公理，因此 $C[a,b]$ 构成一个度量空间。

例 3 离散度量空间 任取一个非空集合 X，X 上的度量定义为

$$\mathrm{d}(x,y)=\begin{cases}0, x=y,\\1, x\neq y,\end{cases}\quad x,y\in X$$

显然，它满足度量公理，因此 (X,d) 是一个度量空间，并被称为离散度量空间。这是因为 (X,d) 中任意两个不同的点之间的距离始终大于一个正的常数，我们将借助它来说明许多概念。

例 4 $l^p(p\geqslant1)$ 是一个度量空间。对一任意的 $x,y\in l^p$，度量定义为

$$\mathrm{d}(x,y)=\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k-\eta_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{2.2.2}$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$。显然式(2.2.2)满足度量公理(1)、(2)。另外，根据 Minkowski 不等式，对任何 n 都有下列不等式

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

由假设，当 $n\to\infty$ 时，就有

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k-\eta_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

因此式(2.2.2)满足度量公理(3)，所以 $l^p(p\geqslant1)$ 是度量空间。

例 5 p 幂可积函数空间 $L^p[a,b](p\geqslant1)$ 是一个度量空间。

设 $x(t)$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的可测函数，如果积分

$$\int_a^b|x(t)|^p\mathrm{d}t<+\infty$$

即 $x(t)$ 为 p 幂 L 可积函数，则 p 幂 L-可积函数的全体就构成 p 幂可积函数空间，记作 $L^p[a,b]$。

对于任意 $x(t),y(t)\in L^p[a,b]$，定义度量为

$$\mathrm{d}(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.2.3}$$

显然，式(2.2.3)满足度量公理(1)和(2)，再根据 Minkowski 不等式，也可直接推出式(2.2.3)满足度量公理(3)，所以 $L^p[a,b]$ 是一个度量空间。

定义 2 设点列 $\{x_n\}\subset(X,\mathrm{d})$，且 $x\in X$，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，都有

$$\mathrm{d}(x_n,x) < \varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{d}(x_n,x) = 0$$

成立，则称点列 $\{x_n\}$ 是收敛点列，x 是点列 $\{x_n\}$ 的极限点，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 或 $x_n\to x$。

可以证明，度量空间中收敛点列是有界的，且极限是唯一的。这样，在建立了度量空间的极限概念之后，就为统一处理每个具体空间的极限概念提供了方便。

最后必须指出，对于度量空间，应当注意：

(1) 对于一个非空集合，我们总可以定义度量，而且定义的方式一般不是唯一的。因此，应该根据问题的需要和集的性质适当规定，以期充分反映空间的特点，只有这样，在理论上或实际上才有较大的意义。本节各例引进度量充分注意到了这一点。

(2) 如果一个非空集合上定义了两个度量，那末，由它们作出的极限概念可以是相同的也可以是不同的。

§2.3 开集、闭集和连续映射

为了进一步研究度量空间中的极限和连续映射等一系列更深入的性质，有必要讨论度量空间中一些重要的点集。本节拟将直线上的点集和连续函数等概念拓广到度量空间。因此，一般度量空间中的点集与直线上的点集有着相似的性质，甚至使用相同的术语。但对于它与直线上点集的一些不同之处，要特别加以注意。

一、度量空间中的开集与闭集

定义 1 设 X 是一个度量空间，$x_0\in X$，实数 $r>0$，则满足下列条件的集合：

$$B(x_0,r) = \{x\,|\,\mathrm{d}(x_0,x) < r, x \in X\}$$

$$\overline{B}(x_0,r) = \{x\,|\,\mathrm{d}(x_0,x) \leqslant r, x \in X\}$$

和

$$S(x_0,r) = \{x\,|\,\mathrm{d}(x_0,x) = r, x \in X\}$$

分别称为以点 x_0 为中心，r 为半径的开球、闭球和球面。显然

$$\overline{B}(x_0,r) = B(x_0,r) \cup S(x_0,r)$$

半径为 ε 的开球 $B(x_0,\varepsilon)$ 常称为点 x 的 ε—邻域。

在度量空间 X 中，球面 $S(x_0,r)$ 可能是空集 $\varnothing$，这与 Euclid 空间不同。例如，设 X 是离散度量空间，如果 $r\neq1$，则 $S(x,r)=\varnothing$；如果 $r=1$，则 $S(x_0,r)=X-\{x_0\}$。

定义 2 设 $G\subset X$，如果 $x_0\in G$，且 $B(x_0,\varepsilon)\subset G$，则称 x_0 是集 $G\subset X$ 的一个内点，而 G 全部内点的集合称为 G 的内部，记作 G^0 或 $\mathrm{int}(G)$；如果 $x_0\in X$ 的任一邻域 $B(x_0,\varepsilon)$ 中都至少含有

异于 x_0 的一点 $y\in G$，则点 $x_0\in X$ 称为 G 的聚点（或 G 的极限点）；集 G 全体聚点的集合称为 G 的导集，记作 G'；集 G 与其导集 G' 的并集称为 G 的闭包，作记 $\bar{G}$。即

$$\bar{G}=G\cup G'$$

容易证明，与聚点定义有关的两个等价命题：

(1) x 是集 G 的聚点的必要充分条件是：对于任意给定 $\varepsilon>0$，在开球 $B(x,\varepsilon)$ 中含有 G 中无穷多个点；

(2) x 是集 G 的聚点的必要充分条件是：存在点列 $\{x_n\}\subset G$，$x_n\neq x(n=1,2,\cdots)$ 而 $x_n\to x$ $(n\to\infty)$。

定义 3 设 X 是度量空间，集 $G\subset X$，如果 G 中每个点 x 都是这个集的内点，则称 G 为 X 中的开集；如果 $G_c=X-G$ 是开集，则称 G 为 X 中的闭集；如果 $x\in G$，但 $x\overline{\in}G'$，则称 x 为 G 的孤立点。

例 1 任意开球 $B(x_0,r)$ 是开集。

事实上，任取 $x\in B(x_0,r)$，则 $\rho(x,x_0)<r$，取正数 $\varepsilon\leqslant r-\rho(x,x_0)$，于是 $B(x,\varepsilon)\subset B(x_0,r)$。这是因为，如果 $y\in B(x,\varepsilon)$，则 $\rho(y,x)<\varepsilon$，由度量公理的三角不等式得

$$\begin{aligned}\rho(y,x_0)&\leqslant\rho(y,x)+\rho(x,x_0)\\&<\varepsilon+\rho(x,x_0)\leqslant r\end{aligned}$$

所以，$y\in B(x_0,r)$，这说明任一 $x\in B(x_0,r)$ 都是内点，因此 $B(x_0,r)$ 是开集。

例 2 集 $G=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}\subset R$，则 $G'=\{0\}$，G 不是闭集，而 G 中每个点都是孤立点。

下面介绍度量空间中开集和闭集的基本性质。

定理 1 设 X 是一度量空间，那末：

(1)空集 $\varnothing$ 和全空间 X 都是开集；

(2)任意个开集的并集是开集；

(3)有限个开集的交集是开集。

证明 (1)是显然的。

(2)设 $\{G_\alpha\}$ 是 X 中任意一组（有限或无穷多个）开集，任取 $x\in\bigcup\limits_\alpha G_\alpha=G$，则必有 $x\in G_\alpha$，而 G_α 是 X 中的开集，所以 x 是 G_α 的内点，于是有开球 $B(x,\varepsilon)\subset G_\alpha\subset G$，因此 x 是 G 的内点，由 x 的任意性知，G 是开集。

(3)设 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 是 X 中的 n 个开集，若 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}G_k=\varnothing$，则命题成立是平凡的，若 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}G_k\neq\varnothing$，则任取 $x\in\bigcap\limits_{k=1}^{n}G_k$，于是 x 含于每个开集 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 之中，由于 x 是开集 G_k 的内点 $(k=1,2,\cdots,n)$，故存在 $\varepsilon_k>0$，使得

$$B(x,\varepsilon_k)\subset G_k(k=1,2,\cdots,n)$$

取 $\varepsilon=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\varepsilon_k$，则 $\varepsilon>0$，且开球 $B(x,\varepsilon)\subset G_k(k=1,2,\cdots,n)$，这说明 $B(x,\varepsilon)\subset\bigcap\limits_{k=1}^{n}G_k$，所以，$x$ 是交集的内点，因此交集 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}G_k$ 是开集。

根据定理 1 和 De－Mogan 公式，可以证明以下定理。

定理 2 设 X 是一度量空间，那末：

(1)空集 $\varnothing$ 和全空间 X 都是闭集；

(2)任意个闭集的交集是闭集；

(3)有限个闭集的并集是闭集。

定理 3 设 G 是度量空间 X 的子集，则 G 是闭集的充分必要条件为 $G=\overline{G}$.

证明 *必要性* 只需证明 $\overline{G}\subset G$。设 $x\overline{\in}G$，则 $x\in G^c$。因为 G 是闭集，则 G^c 是开集，必有 x 的某邻域 $B(x,\varepsilon)\subset G^c$，亦即 $B(x,\varepsilon)\cap G=\varnothing$，于是 $B(x,\varepsilon)$ 中不含 G 的任何点，故 $x\overline{\in}G'$，因此 $x\overline{\in}G\cup G'$，所以 $\overline{G}\subset G$。从而推得 $G=\overline{G}$。

充分性 只需证明 G^c 是开集，已知 $G=\overline{G}$，$\overline{G}=G\cup G'$，如果 $x\in G^c$，于是 $x\overline{\in}G$，则 $x\overline{\in}G'$，因此存在 x 的邻域 $B(x,\varepsilon)$ 不含 G 的点，因此，$B(x,\varepsilon)\cap G=\varnothing$，$B(x,\varepsilon)\subset G^c$，所以 G^c 是开集，因此 G 是闭集。

综上所述，由于非空集合 X 的任意性及在其上定义的度量的多样性，在一般度量空间中的开集和闭集等将出现不同于 Euclid 空间的新特点。例如，半开半闭区间 $(-1,+1]$ 和 $[-1,0)$ 作为度量空间 R(实数集)中的点集来看时，它们是既不开也不闭的集合；又如，在离散度量空间 X 中，对任意 $x\in X$，以 x 为中心，以某正数的半径的开球只含 x，因此 X 中的每个单元素都是开集。又由开集的性质及开集和闭集的关系可知，X 中每个单元素又都是闭集，所以离散度量空间 X 中每个单元素是既开且闭的集合。

二、度量空间上的连续映射

在研究了度量空间中点集的性质后，接着需要讨论度量空间之间的关系。下面介绍映射连续性的概念。

定义 4 设 (X,d) 和 $(Y,\dot{\mathrm{d}})$ 都是度量空间，$T:X\to Y$，使得当 $\mathrm{d}(x,x_0)<\delta$ 时，有 $\dot{\mathrm{d}}(Tx,Tx_0)<\varepsilon$，则称映射 T 在 x_0 连续；如果 T 在 X 中每一点都连续，则称 T 为 X 上的连续映射。

例 3 $y=\cos x$ 是 R 到 R 的一个连续映射。

例 4 设 X 是以 d 为度量的度量空间，$x_0\in X$ 是某定点，则度量函数 $f(x)=\mathrm{d}(x,x_0)$ 是 X 到 R 的一个连续映射。

证明 对于任意给定 $x,y\in X$，由三角不等式，有

$$d = |f(y)-f(x)| = |\mathrm{d}(y,x_0)-\mathrm{d}(x,x_0)| \leqslant \mathrm{d}(y,x)$$

于是对任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $\mathrm{d}(y,x)<\delta$ 时，就有 $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$，故映射 f 在 X 中的任一点 x 都连续，即 f 是 X 到 R 的连续映射。

定理 4 设 (X,d) 和 $(Y,\dot{\mathrm{d}})$ 都是度量空间，$T:X\to Y$，则 T 是连续映射的充要条件是下列两个条件之一成立：

(1)对每个 $x\in X$，当点列 $\{x_n\}\subset X$ 收敛于 x 时 $(n\to\infty)$，那末 $\{Tx_n\}$ 收敛于 Tx；

(2)对于 Y 中任一开集 G，G 的原象 $T^{-1}(G)$ 是 X 中的开集。

证明 (1)*必要性* 因 T 是连续映射，故对每一点 $x\in X$ 以及任意的 $\varepsilon>0$，必存在 $\mathrm{d}(y,x)<\delta$ 时，就有 $\dot{\mathrm{d}}(Ty,Tx)<\varepsilon$，现设有 $\{x_n\}\subset X$，且 $x_n\to x(n\to\infty)$，则存在 N，使得对一切 $n>N$ 时，有 $\mathrm{d}(x_n,x_0)<\delta$，因此，对一切的 $n>N$，有

$$\dot{\mathrm{d}}(Tx_n,Tx)<\varepsilon$$

亦即

$$Tx_n\to Tx\ (n\to\infty)$$

充分性 用反证法。设条件(1)成立，而 T 在某点 $x_0\in X$ 处不连续，则必存在 $\varepsilon_0>0$，使得

对于每一个$\frac{1}{n}$均有x_n满足$d(x_n,x_0)<\frac{1}{n}$,但是$\hat{d}(Tx_n,Tx)\geqslant\varepsilon_0$,这显然与(1)中条件矛盾,充分性得证。

(2)必要性 设G是Y中的开集,不妨设$T^{-1}(G)$非空,任取$x_0\in T^{-1}(G)$,令$y_0=Tx_0$,则y_0是G的内点,故有$\varepsilon>0$,使得开球$B(y_0,\varepsilon)\subset G$。根据$T$的连续性,对这个$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使当$d(x,x_0)<\delta$时,$\hat{d}(Tx,Tx_0)<\varepsilon$。也就是说,当$x\in B(x_0,\delta)$时,$Tx\in B(y_0,\varepsilon)\subset G$,故$B(x_0,\delta)\subset T^{-1}(G)$,因此$T^{-1}(G)$是开集。

充分性 任给$x_0\in X$,并任给$\varepsilon>0$,令$G=B(Tx_0,\varepsilon)$,由假设,$T^{-1}(G)$为X中的开集,而$x_0\in T^{-1}(G)$,故存在$\delta>0$,使得$B(x_0,x)\subset T^{-1}(G)$。这说明,当$d(x,x_0)<\delta$时,$\hat{d}(Tx,Tx_0)<\varepsilon$,故$T$连续。

必须指出,利用开集和闭集的关系,在(2)中把开集都改为闭集,定理仍成立。

下面我们再引入映射一致连续的概念。

定义 5 设(X,d)和$(Y,\hat{d})$都是度量空间,$T:X\to Y$。如果对于任意给定$\varepsilon>0$,存在只依赖于ε的$\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得对$X$中一切满足$d(x_1,x_2)<\delta$的$x_1,x_2$,都有

$$\hat{d}(Tx_1,Tx_2)<\varepsilon$$

则称T在X上一致连续。

如果有常数$c>0$,使对任意$x_1,x_2\in X$,都有

$$\hat{d}(Tx_1,Tx_2)\leqslant cd(x_1,x_2)$$

则称映射T是Lipschitz连续,c叫作Lipschitz常数。

容易证明,映射T是Lipschitz连续,则它必是一致连续;而当T是一致连续时,则它必是连续映射,反之不然。

例 5 设$X=L^2[a,b]$,度量定义为

$$d(f,g)=\left(\int_a^b|f(t)-g(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.3.1}$$

且映射$T:Tf(t)=\int_a^x f(t)dt$, $f(x)\in L^2[a,b]$,则T是Lipschitz连续的。

事实上,在式(2.2.3)中,令$p=2$时,可以得出,$L^2[a,b]$在式(2.3.1)规定的度量意义下是度量空间,而映射T对于任意$f(x),g(x)\in L^2[a,b]$,有

$$\begin{aligned}|T(f)-T(g)|&=\left|\int_a^x f(t)dt-\int_a^x g(t)dt\right|\\&\leqslant\int_a^x|f(t)-g(t)|dt\end{aligned}$$

利用Cauchy-Schwarz不等式,有

$$\begin{aligned}|Tf(t)-Tg(t)|&\leqslant(b-a)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b|f(t)-g(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\\&=(b-a)^{\frac{1}{2}}d(f,g)\end{aligned}$$

因此

$$\left(\int_a^b|Tf(t)-Tg(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant(b-a)d(f,g)$$

令$b-a=c$,则有

$$d(Tf,Tg)\leqslant cd(f,g)$$

故映射 T 在 X 上是 Lipschitz 连续的。

最后，再简单介绍等距映射的概念。

定义 6 设 (X,d) 和 $(Y,\dot{\mathrm{d}})$ 是两个度量空间，T 是 X 到 Y 的双射。如果对任意 $x,y\in X$，成立着

$$\mathrm{d}(x,y)=\dot{\mathrm{d}}(Tx,Ty),$$

则称 T 是 X 到 Y 的等距映射，而这两个空间称为是等距同构空间。显然，等距映射是连续映射。

§2.4 度量空间的稠密性和完备性

有理数集在实数集中的稠密性及实数完备性，在微积分理论和应用中起着重要的作用，它们使得极限运算在实数集中能够进行。本节引进相应的概念，从而把这些性质拓广到度量空间。

一、稠 密 性

定义 1 设 X 为度量空间，A 和 B 都是 X 中的子集，如果对于任意的 $x\in A$，存在 $\{x_n\}\subset B$，使 $x_n\to x(n\to\infty)$，则称 B 在 A 中稠密，即对于任意 $x\in A$，在 x 的任意一个邻域中都含有集 B 的点，则称 B 在 A 中稠密。显然，这两种提法是等价的。如果 $A=X$，则称 B 在 X 中处处稠密。

定义 2 设 X 是度量空间，如果对于 X 中的点集 A，存在有限集或可列集 $\{x_n\}\subset X$ 在 A 中稠密，则称 A 是可分点集；当 $A=X$，即空间 X 本身是可分的，则称 X 是可分空间。

例 1 n 维 Euclid 空间 R^n 是可分的度量空间。

事实上，在 R^n 中以有理数为坐标的所有点的集合 $Q=\{(r_1,r_2,\cdots r_n)\mid r_i$ 是有理数，$i=1,2,\cdots,n\}$ 是可数集，且在 R^n 中处处稠密，所以，R^n 是可分的度量空间。

例 2 $C[a,b]$ 是可分的度量空间。

证明 设全体多项式组成之集合，记作 $P(x)=\{P_n(x)\}$，全体有理系数多项式组成之集合，记作 $R(x)=\{R_n(x)\}$。根据 Weierstrass 逼近定理，对 $[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$，存在一列多项式 $P_n(x)$，在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。即对于任给 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N(\varepsilon)>0$，使得当 $n>N$ 时，$|P_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，这就是说 $\mathrm{d}(P_n,f)<\varepsilon$，即 $P(t)$ 在 $C[a,b]$ 中稠密。

再证 $R(x)=\{R_n(x)\}$ 在 $P(x)=\{P_n(x)\}$ 中稠密，令

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k,\ R_n(x)=\sum_{k=0}^{n}r_kx^k$$

其中 $r_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是有理数，使

$$|a_k-r_k|<\frac{\varepsilon}{(n-1)L^n}$$

其中 $L=\max\{|a|,|b|,1\}$，于是对任意 $x\in[a,b]$，有

$$|P_n(x)-R_n(x)|\leqslant\sum_{k=0}^{n}|a_k-r_k||x^k|\leqslant\frac{\varepsilon}{(n+1)L^n}(n+1)L^n=\varepsilon$$

即 $\mathrm{d}(P_n,R_n)<\varepsilon$。因此，根据度量公理，可得

$$\mathrm{d}(R_n,f)\leqslant\mathrm{d}(R_n,P_n)+\mathrm{d}(P_n,f)$$

所以有理系数多项式集合 $R(x)=\{R_n(x)\}$ 在 $C[a,b]$ 中处处稠密，而 $\{R_n(x)\}$ 是可数集，故 $C[a,b]$ 是可分的度量空间。

例 3 $l^p(p\geqslant 1)$ 是可分的度量空间。

证明 设 E_0 表示所有形如 $(r_1,r_2,\cdots,r_n,0,\cdots)$ 的元素 x 的全体组成的集合，其中 r_i 表示任意有理数，n 表示任意自然数，于是 E_0 是可数的。下面证明 E_0 在 $l^p(p\geqslant 1)$ 中处处稠密。

事实上，任取元素 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^p$，对于任意给定 $\varepsilon>0$，可以找这样一个自然数 n，使得

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}|\xi_k|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}$$

其次，取元素 $x_0=(r_1,r_2,\cdots,r_n,0,\cdots)\in E_0$，使得

$$\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-r_k|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}$$

于是

$$[\mathrm{d}(x,x_0)]^p=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-r_k|^p+\sum_{k=n+1}^{\infty}|\xi_k|^p<\varepsilon^p$$

即

$$\mathrm{d}(x,x_0)<\varepsilon$$

所以，E_0 是 $l^p(p\geqslant 1)$ 的可数稠密子集，因此，$l^p(p\geqslant 1)$ 是可分的度量空间。

例 4 空间 $L^p[a,b]$ 是可分的度量空间。

因为{有界可测函数}在 $L^p[a,b]$ 中稠密，{连续函数}在{有界可测函数}中稠密，而{有理系数多项式}又在{连续函数}中稠密，因此{有理系数多项式}是 $L^p[a,b]$ 中的可数稠密子集，所以，$L^p[a,b]$ 是可分的度量空间。

从以上几个例子可以看出，可分度量空间中的可数稠密子集，一般来说比原空间简单，这给我们讨论可分度量空间的性质带来方便。当讨论这类空间中的某些问题时，往往可从空间中挑选出对那个问题最恰当的可数稠密子集，首先在这个集上进行考察，然后再利用稠密性推广到全空间。这是我们研究空间性质所常用的方法。

二、完 备 性

定义 3 设 (X,d) 是度量空间，点列 $\{x_n\}\subset X$。如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得对于所有的 $m,n>N$ 时，都有 $\mathrm{d}(x_m,x_n)<\varepsilon$，则称点列 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 点列或基本列；如果 X 中的每一个 Cauchy 点列都收敛，则度量空间 X 称为是完备的。

应该指出，在完备的度量空间中，收敛点列与 Cauchy 点列是彼此等价的；而在不完备的度量空间中，Cauchy 点列仅仅是收敛点列的必要条件。另外，度量空间的完备性总是对确定的度量而言的，如果在同一基集上定义另一个度量，则原空间的完备性一般会发生变化。例如，空间 $C[a,b]$ 在度量 $\mathrm{d}(x,y)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$ 下是完备的；在度量 $\hat{\mathrm{d}}(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|\mathrm{d}t$ 下是不完备的。

定理 1 设 X 是完备的度量空间，$A\subset X$，则 X 的子空间 A 是完备的，当且仅当 A 是 X 中的闭集。

证明 *必要性* 设 X 的子空间 A 是完备的，要证明 A 是闭集，根据 § 2.3 定理 3 可知，只要证明 $\bar{A}\subset A$。任取 $x\in\bar{A}$，由 § 2.3 定义 2 的等价命题(2)，存在 A 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x，因

此$\{x_n\}$是 A 的 Cauchy 点列，再由 A 的完备性和 x 的任意性，因此 $\overline{A}\subset A$，从而可得 $A=\overline{A}$，所以 A 是闭集。

充分性 设 A 是闭集，且$\{x_n\}$是 A 中的 Cauchy 点列，则 $x_n\to x\in X$；于是 $x\in\overline{A}$，再由假设 $A=\overline{A}$，所以，$x\in A$，因此在 A 中的任意 Cauchy 点列收敛，故 $A\subset X$ 是完备的。

度量空间完备性的证明依赖于空间及在其上定义的度量，不同的空间和不同的度量其证明的复杂程度相差很大，尽管如此，处理这类问题还是有一个大体上相同的步骤和方法。

第一，要根据给定的 Cauchy 点列$\{x_n\}$和实数的完备性，构造一个元素 x（用作极限元素）；

第二，证明 x 属于所考察的空间；

第三，在空间中所定义度量的意义下，证明 $x_n\to x$。

例 5 Euclid 空间 R^n 是完备的。

证明 在 R^n 中定义度量为

$$\mathrm{d}(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$。任取 R^n 中的 Cauchy 点列$\{x_m\}$，$x_m=(\xi_1^m,\xi_2^m,\cdots,\xi_n^m)$。于是对于$\forall\ \varepsilon>0$，存在 $N>0$，使当 $m,r>N$ 时，有

$$\mathrm{d}(x_m,x_r)=\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i^m-\xi_i^r)^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon \tag{2.4.1}$$

由此，对于 $m,r>N$ 及 $i=1,2,\cdots,n$，有

$$|\xi_i^m-\xi_i^r|<\varepsilon \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

于是，对每个固定的 i，序列$(\xi_i^{(1)},\xi_i^{(2)},\cdots)$是一实数的 Cauchy 序列。根据实数的 Cauchy 收敛准则，有

$$\xi_i^m\to\xi_i \quad (m\to\infty)$$

利用 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 这 n 个极限点，定义元素

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$$

显然，$x\in R^n$。在式(2.4.1)中，令 $r\to\infty$，则得

$$\mathrm{d}(x_m,x)\leqslant\varepsilon \quad (m>N)$$

这说明$\{x_m\}$依赖 R^n 的度量 d 收敛于 $x\in R^n$。由$\{x_m\}$的任意性即知，R^n 是完备的度量空间。

例 6 $C[a,b]$是完备的度量空间。

证 在 $C[a,b]$中定义度量为

$$\mathrm{d}(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$$

其中 $x,y\in C[a,b]$。设$\{x_n(t)\}$是 $C[a,b]$的 Cauchy 点列，于是对$\forall\ \varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $m,n>N$ 时，有

$$\mathrm{d}(x_m,x_n)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon \tag{2.4.2}$$

从而对任意 $t_0\in[a,b]$，只要 $n,m>N$ 时，有

$$|x_n(t_0)-x_m(t_0)|<\varepsilon$$

所以$\{x_n(t_0)\}$是一个 Cauchy 数列，从而可得

$$\lim_{n\to\infty}x_n(t_0)=x(t_0)$$

因此，对每一个 $t\in[a,b]$，我们都可以得到唯一的一个实数 $x(t)$，这样就定义了一个$[a,b]$上的函数 $x(t)$。

在式(2.4.2)中，令 $m\to\infty$，得

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon\quad(n>N)$$

所以，对$\forall\ t\in[a,b]$都有

$$|x_n(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon\quad(n>N)$$

这里 N 与 t 无关而只与 ε 有关，所以$\{x_n(t)\}$在$[a,b]$上一致收敛于 $x(t)$，故 $x(t)\in C[a,b]$。这就是说，基本列$\{x_n(t)\}$在 $C[a,b]$中收敛，因此，$C[a,b]$是完备的度量空间。

例 7 空间 $l^p(1\leqslant p<+\infty)$是完备的。

证 设$\{x_m\}$是 l^p 中任意 Cauchy 点列，其中 $x_m=\{\xi_k^{(m)}\}=(\xi_1^{m},\xi_2^{m},\cdots)$，则对于$\forall\ \varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得对所有的 $m,n>N$，都有

$$\mathrm{d}(x_m,x_n)=\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^{(m)}-\xi_k^{(n)}|^p\Big)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon \tag{2.4.3}$$

于是，对每一个 k，有

$$|\xi_k^{(m)}-\xi_k^{(n)}|<\varepsilon\quad(m,n>N)$$

上式指出，对于固定 k，序列$(\xi_k^{(1)},\xi_k^{(2)},\cdots)$是 Cauchy 数列，根据 R 或 C 的完备性，它是收敛的，即

$$\xi_k^{(n)}\to\xi_k\quad(n\to\infty),k=1,2,\cdots$$

这样，所有的极限定义了一个元素 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$。

下面证明 $x\in l^p$ 和 $x_m\to x$。

利用式(2.4.3)，对所有 $m,n>N$，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^{(m)}-\xi_k^{(n)}|^p<\varepsilon^p$$

令 $n\to\infty$，当 $m>N$ 时，得到

$$\sum_{k=1}^{L}|\xi_k^{(m)}-\xi_k|^p\leqslant\varepsilon^p\quad(m>N)$$

再令 $L\to\infty$，得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^{(m)}-\xi_k|^p\leqslant\varepsilon^p\quad(m>N)$$

由此可知，$x-x_m=\{\xi_k-\xi_k^{(m)}\}\in l^p$，因 $x_m\in l^p$，故由 Minkowski 不等式推知，$x=x_m+(x-x_m)\in l^p$，而 $\mathrm{d}(x_m,x)\to0(m\to\infty)$，再由$\{x_m\}$是 l^p 中任意的 Cauchy 点列，因此 $l^p(p\geqslant1)$是完备的度量空间。

还可以证明 $L^p[a,b](1\leqslant p<+\infty)$是完备的度量空间。

在微积分的理论及其应用中，已经讨论过的许多运算都是以极限为基础的。如果讨论的空间不完备，则所有的那些运算都将无法进行。因此我们必须考虑空间的完备化问题。一般说来，我们所指的空间完备化，就是在不完备的度量空间中，通过"添加"一些"点"使之成为完备化的度量空间。我们知道，从不完备的有理数集扩充到完备的实数集，就是利用有理数集在实数集中稠密这一性质而完成的，因此空间的完备性是实数集基本属性的抽象和拓广。

定义 4 设 X 为任意度量空间，而 $\hat{X}$ 是完备的度量空间。如果满足

(1)X 是 $\hat{X}$ 的子空间即 $X\subset\hat{X}$；

(2)X 在 $\hat{X}$ 中处处稠密，则称 $\hat{X}$ 是 X 的完备化空间，而这一过程称之为 X 到 $\hat{X}$ 的完备化。

定理 2(Hausdorff 定理) 设 $X=(X,\mathrm{d})$是任一度量空间，总有一个完备度量空间 $\hat{X}=(\hat{X},\hat{\mathrm{d}})$使 X 与 $\hat{X}$ 中某个稠密子集 V 等距，并且在等距意义下 V 是唯一的。

证明略。

定理 2 实际上指出，每个度量空间都可以完备化，并且它的一切完备化空间都是等距的。这个定理的证明本质上类似于 Canttor 引进实数的过程，由于论证复杂，故略去。

例 8 设 $P[a,b]$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的多项式全体，它的度量定义如下：

$$d(P,Q) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |P(t) - Q(t)|, P(t), Q(t) \in P[a,b]$$

空间 $P[a,b]$ 显然是不完备的，因为存在多项式点列在 $[a,b]$ 上一致收敛于一个不是多项式形式的连续函数，但它在完备空间 $C[a,b]$ 中处处稠密，所以，$P[a,b]$ 的完备化空间就是 $C[a,b]$。这一完备过程可以看作是把"极限点"添加到 $P[a,b]$ 中，从而得到完备的空间 $C[a,b]$。

§2.5 度量空间的列紧性

本节首先在度量空间中引进列紧性的概念，然后通过对列紧性概念的讨论与分析，藉以揭示连续映射在度量空间中的重要性质。

定义 1 设 X 是度量空间，$A \subset X$，如果 A 中的任意无穷点列必含有一个在 X 中的收敛的子列，则称 A 是列紧的；如果所有收敛子列的极根元都属于 A，则称 A 是自列紧的；如果空间 X 本身是列紧的，则称 X 为列紧空间。

根据定义 1，可直接推得以下结论。

定理 1 (1)列紧空间必是有界空间，也必是完备性空间；

(2)列紧集必是有界集，自列紧集必是闭集，且列紧集的子集也必是列紧集；

(3)任意多个自列紧集的交是自列紧的，而有限个自列紧集的并也是自列紧的。

定理 2 设 X 是一度量空间，$A \subset X$ 是列紧的充分必要条件是 $\overline{A}$ 是自列紧的。

证明 充分性 因 $\overline{A}$ 是自列紧的，且 $\overline{A} = A \cup A'$，于是 $A \subset \overline{A}$，所以 A 是列紧集，

必要性 设任意点列 $\{x_n\} \subset \overline{A}$，则对每个 n，存在 $y_n \in A$，使得 $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$，由于 A 是列紧集，必存在 $y \in X$ 及子列 $\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$，使得 $y_{n_k} \to y$，因而，由度量公理

$$d(x_{n_k}, y) \leqslant d(x_{n_k}, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y)$$

$$< \frac{1}{n_k} + d(y_{n_k}, y) \to 0 \quad (n_k \to \infty)$$

即 $x_{n_k} \to y$，且 $y \in \overline{A}$。这就证明了 $\overline{A}$ 是自列紧集。

例 1 考察 $C[0,1]$ 的点列 $\{x_n\}$：$x_n(t) = t^n (n=1,2,\cdots)$，显然 $\{x_n\}$ 是有界点列，因为令 $x_0(t) \equiv 0$，则

$$d(x_n, x_0) = \max_{t \in [0,1]} x_n(t) = \max_{t \in [0,1]} t^n = 1 < 2 (n = 1,2,\cdots)$$

但是，它没有收敛子序列。事实上，如果 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$，且 $x_{n_k} \to x$，由于在度量空间 $C[0,1]$ 中的收敛性就是函数列的一致收敛性，所以，$x(t)$ 在 $[0,1]$ 处连续，然而

$$x(t) = \lim_{n_k \to \infty} x_{n_k}(t) = \lim_{n_k \to \infty} t^{n_k} = \begin{cases} 1, t = 1 \\ 0, 0 \leqslant t < 1 \end{cases}$$

与 $x(t)$ 应在 $t=1$ 处连续相矛盾，所以，度量空间 $C[0,1]$ 是完备的，但不是列紧的。

例 2 设 $X=R$，$d(x,y) = |x-y|$，$x,y \in R$，那末 $X=R$ 是不列紧的。

事实上，取点列 $\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$，不包含收敛的子列，因此，$R$ 是完备的，但不是列紧的。

例 3 设 $X = l^2$，取单位闭球

$$B = \{x \mid x = (\xi_1, \xi_2, \cdots), \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 1\}$$

显然，B 是空间 l^2 中的有界闭集，但不是列紧集。

因为在 B 中选取点列：

$$e_1 = (1,0,0,\cdots)$$
$$e_2 = (0,1,0,\cdots)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

则有 $d(e_i, e_j) = \sqrt{2}\ (i \neq j)$，因此 $\{e_n\}$ 中的任意子列都是发散的，从而 B 不是列紧的，由此可见，l^2 不是列紧空间。

从以上例子可知，在一般完备的度量空间中，有界点列不一定含有收敛的子列，即列紧性不成立；在实数集 R 中，有界闭集是自列紧的充分必要条件，但在无穷维空间中，结论一般是不对的，因此，我们必须研究在度量空间中列紧性成立的条件。

定理 3 设 X 为有限维度量空间，任意 $A \subset X$ 是自列紧的充要条件是 A 为有界闭集。

由定理 3 可以推得，n 维 Euclid 空间 R^n 中的任何有界闭集都是自列紧集。

定理 4(Arzele－Ascoli 定理) 在 $C[a,b]$ 中，$A \subset C[a,b]$，A 是自列紧的充要条件为下列两个条件同时成立：

(1)集 A 是一致有界的，即存在常数 $M>0$，使对一切 $x(t) \in A$，均有 $|x(t)| \leqslant M$；

(2)集 A 是等度连续的，即对 $\forall\ \varepsilon > 0$，存在 $\delta(\varepsilon) > 0$，使得对任意 $x(t) \in A$ 以及 $t_1, t_2 \in [a, b]$，只要 $|t_1 - t_2| < \delta$，就有

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$$

证明略。

定理 5 设 X 和 Y 是两个度量空间，$T: X \to Y$ 是连续映射的，则 X 中的自列紧集 A 在映射 T 作用下的象仍是自列紧集。

证明 设 $\{y_n\} \subset T(A) \subset Y$，必有 $\{x_n\} \subset A$，使得 $y_n = Tx_n$，因为 A 是自列紧的，所以 $\{x_n\}$ 中必有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$。但是由 §2.3 定理 4 可知，子列 $\{x_{n_k}\}$ 的象 $\{Tx_{n_k}\} = \{y_{n_k}\}$ 必在 $T(A)$ 中收敛，所以 $T(A)$ 是自列紧的。

定理 6 度量空间 X 中的自列紧子集 A 到 R 中的连续映射 T，在 A 的一些点取得上确界和下确界。

证明 由定理 3 和定理 5 知，$T(A) \subset R$ 是自列紧子集，所以，$T(A)$ 必为有界闭集，于是，$\inf T(A) \in T(A)$，且 $\sup T(A) \in T(A)$，所以，使得这两式成立的逆象必是 A 中的点，在这些点 x 上，Tx 分别取得上确界和下确界。

§2.6 赋范空间和 Banach 空间

本节首先引入赋范线性空间的定义，然后讨论它的基本性质，其中着重介绍有限维赋范空间的有关概念。这是因为，除了它具备一些特别好的简单性质外，同时还在于它是处理一些复杂而困难问题的主要工具，在许多领域有着重要的应用。

定义 1 设 X 是实(或复)的线性空间，如果对每个元(向量)$x \in X$ 有一个确定的实数(记作 $\|x\|$)与之对应，并且满足

(1) $\|x\| \geqslant 0$，且 $\|x\| = 0$ 等价于 $x = 0$；

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$，其中 α 为任意实数；

(3) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$，$x, y \in X$。

则称 $\|x\|$ 为元素 x 的范数，称 X 为赋范线性空间，或简称赋范空间，其中(1)～(3)称为范数公理，(3)称为三角不等式。

现在我们给出空间中范数和度量两种结构的关系，如果令 $d(x,y) = \|x-y\|$ $(x, y \in X)$，可以验证，$d(x,y)$满足度量公理，因此称 $d(x,y)$为由范数 $\|x\|$ 导出(或称诱导)的度量。由此可以推得，任何赋范线性空间都是一个特殊的度量空间。

设$\{x_n\}$是 X 中点列，如果存在 $x \in X$，使 $\|x_n - x\| \to 0 (n \to \infty)$，则称$\{x_n\}$依范数收敛于 x，记作$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ 或 $x_n \to x (n \to \infty)$。

定义 2 在赋范线性空间中，可以由范数诱导度量即 $d(x,y) = \|x-y\|$，在这种度量意义下，完备的赋范线性空间叫做 Banach 空间。

根据范数公理，可以推得赋范线性空间中许多重要性质。

定理 1 (1)设$\{x_n\}$是 X 中依范数收敛的点列，则范数序列$\{\|x_n\|\}$是有界的；

(2)对 $x \in X$，$\|x\|$ 是连续的；

(3)设$\{x_n\}$，$\{y_n\}$都是 X 中收敛点列，$x, y \in X$，且有 $x_n \to x$，$y_n \to y$，则 $x_n + y_n \to x + y (n \to \infty)$；

(4)设$\{x_n\}$是 X 中收敛于 x 的点列，数列$\{\alpha_n\}$收敛于 α，则 $\alpha_n x_n \to \alpha x (n \to \infty)$。

证明 (1)事实上，由收敛点列$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$ 和不等式 $\|x_n\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x\|$ 成立，立即导出(1)。

(2)对于$\forall\ x, y \in X$，由范数公理，可以推出以下不等式成立，即

$$\big|\, \|y\| - \|x\| \,\big| \leqslant \|y - x\|$$

所以，当 $\|x_n - x\| \to 0$ 时，$\|x_n\| \to \|x\|$

(3)由下列不等式

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leqslant \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$$

可导出(3)的结论。

(4)由下列不等式

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| \leqslant |\alpha_n| \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \|x\|$$

导出(4)的结论。

定理 2 Banach 空间 X 的任一子空间 Y 仍是 Banach 空间的充分必要的条件是，Y 为 X 的闭子集。

证明 可由 § 2.4 定理 1 导出。

例 1 n 维复线性空间 C^n 是赋范线性空间。设 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in C^n$，令

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \tag{2.6.1}$$

$$\|x\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{2.6.2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i| \tag{2.6.3}$$

一般还可引进

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty \tag{2.6.4}$$

可以验证，式(2.6.1)，(2.6.2)和(2.6.3)均满足范数公理，式(2.6.4)满足范数公理(1)和(2)，容易验证，它也满足三角不等式。

设 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\in X$，根据 Minkowski 不等式，有

$$\|x+y\|_p=\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i+\eta_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}=\|x\|_p+\|y\|_p$$

可以指出，当 $p=1,2$ 时，从式(2.6.4)推出式(2.6.1)和(2.6.2)。下面要证明，当 $p\to\infty$ 时，$\|x\|_p\to\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|$。

事实上，对 $\forall\ x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\neq 0$，令 $|\xi_k|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|$，于是

$$\|x\|_p=\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_k|^p\frac{|\xi_i|^p}{|\xi_k|^p}\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$=|\xi_k|\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{|\xi_i|^p}{|\xi_k|^p}\Big)^{\frac{1}{p}}$$

又由于

$$|\xi_k|^p\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^p\leqslant n|\xi_k|^p$$

故

$$1\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{|\xi_i|^p}{|\xi_k|^p}\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant n^{\frac{1}{p}}$$

因为

$$\lim_{p\to\infty}n^{\frac{1}{p}}=1$$

所以

$$\lim_{p\to\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{|\xi_i|^p}{|\xi_k|^p}\Big)^{\frac{1}{p}}=1$$

因此

$$\lim_{p\to\infty}\|x\|_p=\lim_{p\to\infty}|\xi_k|\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{|\xi_i|^p}{|\xi_k|^p}\Big)^{\frac{1}{p}}=|\xi_k|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|$$

即

$$\|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|$$

上面的讨论说明，n 维复线性空间 C^n 可以定义多种范数，实际上可以定义无穷多种范数。对于 n 维实线性空间 R^n，也可以类似地引进范数，因此 C^n(或 R^n)都是赋范线性空间。又因为由范数可以诱导度量，它们是完备的，所以 C^n(或 R^n)也是 Banach 空间。

例 2　空间 $C[a,b]$，对 $\forall\ x\in C[a,b]$，定义范数为

$$\|x\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)| \tag{2.6.5}$$

容易验证 $C[a,b]$ 按范数(2.6.5)成为 Banach 空间。

例 3　空间 $l^p(1\leqslant p<+\infty)$，对于 $\forall\ x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p$，其范数定义为

$$\|x\|=\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{2.6.6}$$

容易验证，式(2.6.6)满足范数公理(1)和(2)，根据 Minkowski 不等式，可得

$$\| x+y \| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \| x \| + \| y \|, y = (\eta_1, \eta_2, \cdots) \in l^p$$

式(2.6.6)也满足范数公理(3),又由于$l^p(p\geqslant 1)$是线性空间,所以,$l^p(p\geqslant 1)$是赋范线性空间。

再由范数诱导度量即$d(x,y)=\| x-y \|$,我们已经在§2.4例7证明了$l^p(p\geqslant 1)$是完备的,因此,$l^p(p\geqslant 1)$是Banach空间。

例4 空间$L^p[a,b](1\leqslant p<+\infty)$是Banach空间。

证明 设任意$x(t),y(t)\in L^p[a,b]$,其线性运算定义为

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t)$$

$$(\alpha x)(t) = \alpha x(t)$$

显然,$\alpha x(t)\in L^p[a,b]$,可以验证$x(t)+y(t)\in L^p[a,b]$,因为

$$|x(t)+y(t)|^p \leqslant [2\max(|x(t)|,|y(t)|)]^p$$

$$\leqslant 2^p(|x(t)|^p + |y(t)|^p) < +\infty$$

所以,$|x(t)+y(t)|^p$是$[a,b]$上有界Lebesgue可测函数,即$x(t)+y(t)\in L^p[a,b]$,于是$L^p[a,b]$成为一个线性空间。

同时,对任意$x(t)\in L^p[a,b]$,定义范数为

$$\| x \| = \left(\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.6.7}$$

式(2.6.7)满足范数公理(1)和(2),由Minkowski不等式,可得

$$\| x+y \| = \left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \| x \| + \| y \|, y(t) \in L^p[a,b]$$

它满足范数公理(3),所以$L^p[a,b]$按范数式(2.6.7)成为赋范线性空间。

另外,也可以证明$L^p[a,b]$按范数式(2.6.7)是完备的(证明略),因此,空间$L^p[a,b]$按范数式(2.6.7)成为Banach空间。

最后应用泛函分析的方法研究有限维空间,以使我们更为清楚地认识有限维空间所具有的特性。

定义3 设X是线性空间,$\| x \|_1$和$\| x \|_2$是X上x的两个范数,如果存在正数a和b,使得对每个$x\in X$,成立

$$a\| x \|_2 \leqslant \| x \|_1 \leqslant b\| x \|_2$$

则称范数$\| x \|_1$和$\| x \|_2$是等价的。

如果X上的两个范数$\| x \|_1$和$\| x \|_2$是等价的,那末,$\| x_n - x \|_1 \to 0$和$\| x_n - x \|_2 \to 0$是一致的,因此,我们称$(X,\| x \|_1)$和$(X,\| x \|_2)$这两个赋范线性空间是拓扑同构的。

定理3 设X是n维赋范线性空间,$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$是X的一组基,则存在常数M和M',使得对一切$x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k$,有

$$M\| x \| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M' \| x \|$$

证明 对于$\forall\ x\in X$,有

$$\|x\| = \|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\|e_k\|\,|\xi_k|$$

$$\leqslant \left(\sum \|e_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

令$m=\left(\sum_{k=1}^{n}\|e_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$,则有$\|x\|\leqslant m\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$。

任取$y=\sum_{k=1}^{n}\eta_k e_k\in X$,由上述不等式知

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leqslant \|x-y\| \leqslant m\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

这证明了$\|x\|$是Euclid 空间R^n上的连续函数,记作

$$f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n) = \|x\|$$

当$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n)$位于单位球面$S$上,即

$$\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2 = 1\text{时},\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\| = \|x\| \neq 0$$

实际上,如果$\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\|=0$,必有$\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k=0$。因为$\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2=1$,$\xi_1$,$\xi_2$,…,$\xi_n$不全为零,与$\{e_k\}$是线性无关矛盾。这就是说,$f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=\|x\|$在$S$上处处不为零。因$S$是$R^n$中有界闭集,$\|x\|$在$S$上取得非零的最小值$m'$,$m'>0$,于是,对$\forall\ x\in X$,作

$$x' = \frac{x}{\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

则$x'\in S$,因而

$$m'\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|x'\| = \|x\| \leqslant m\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

令$M=\frac{1}{m}$,$M'=\frac{1}{m'}$,即得结论。

推论 1 设在有限维线性空间上,定义两个范数$\|x\|$和$\|x\|_1$,则必存在常数M和M'使得

$$M\|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant M'\|x\|$$

证明 记$\|x\|_0=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$,其中$x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k$,由定理 3 知,存在$K$和$K'$,$L$和$L'$,有

$$K\|x\| \leqslant \|x\|_0 \leqslant K'\|x\|$$

$$L\|x\|_1 \leqslant \|x\|_0 \leqslant L'\|x\|_1$$

将两式综合起来,令$M=\frac{K}{L'}$,$M'=\frac{K'}{L}$,即得结论。

推论 1 告诉我们,在有限维赋范线性空间中,所有的范数都是等价的,从而还可得出以下推论。

推论 2 有限维赋范线性空间和 Euclid 空间拓扑同构;相同维数的有限维赋范线性空间彼此拓扑同构。

引理 设$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是数域K上赋范线性空间X的线性无关子集,则存在常数$M>0$,使得对于任选的标量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,都有

$$\|\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n\|\geqslant M(|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_n|)$$

证明略。

定理 4 赋范线性空间 X 的每一个有限维子空间 Y 都是完备的。特别每一个有限维赋范线性空间是完备的。

证明 在 Y 中，任取一个 Cauchy 点列 $\{y_n\}\in Y$，下面证明它收敛于 $y\in Y$。设 $\dim Y=n$，$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$是 Y 中的一组基，则每一个 y_m 都有唯一的表示：

$$y_m=\alpha_1^{(m)}e_1+\alpha_2^{(m)}e_2+\cdots+\alpha_n^{(m)}e_n$$

因此，对于$\forall\ \varepsilon>0$，存在 $N(\varepsilon)>0$，当 $m,l>N(\varepsilon)$时，有 $\|y_m-y_l\|<\varepsilon$。由引理可得，存在 $M>0$，对于一切 $m,l>N(\varepsilon)$，都有

$$\varepsilon>\|y_m-y_l\|=\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{(m)}e_k-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{(l)}e_k\|$$

$$=\|\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^{(m)}-\alpha_k^{(l)})e_k\|>M\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k^{(m)}-\alpha_k^{(l)}|$$

所以

$$|\alpha_k^{(m)}-\alpha_k^{(l)}|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k^{(m)}-\alpha_k^{(l)}|<\frac{\varepsilon}{M}\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

于是，这几个数列

$$(\alpha_k^{(m)})=(\alpha_k^{(1)},\alpha_k^{(2)},\cdots)\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

都是 Cauchy 点列，再由数域 R 或 C 的完备性，必有$\lim\limits_{m\to\infty}\alpha_k^{(m)}=\alpha_k(k=1,2,\cdots,n)$。

定义 $y=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_ke_k$，显然 $y\in Y$。又因为

$$\|y_m-y\|=\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{(m)}e_k-\sum_{k=1}^{n}\alpha_ke_k\|=\|\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^{(m)}-\alpha_k)e_k\|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k^{(m)}-\alpha_k|\,\|e_k\|\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant n}\|e_k\|\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k^{(m)}-\alpha_k|<\varepsilon$$

所以 $y_m\to y$。由于$\{y_m\}$的任意性，因此 Y 是完备的。

推论 赋范线性空间 X 的任何有限维子空间都是 X 中的闭集。

值得注意的是，此推论仅对有限维子空间成立。如果是无限维子空间，此结论不真。例如，在 Banach 空间 $X=C[0,1]$，$Y=\mathrm{span}\{1,t,t^2,\cdots,t^n,\cdots\}$，因而，$Y$ 是全体多项式作成的 $C[0,1]$ 的无限维子空间。显然，Y 不是 X 中的闭集。因为

$$e^t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\overline{\in}Y$$

定理 5 赋范线性空间是有限维的充分必要条件是它的任何有界子集都是列紧的。

证明略。

应该指出，此定理表明无限维赋范线性空间必有有界集不是列紧集，反之亦然。设有界集 $E=\{x\mid\|x\|\leqslant M\}$，考察$\dfrac{E}{M}=\left\{\dfrac{x}{M}\Big|x\in E\right\}$，则$\dfrac{E}{M}$包含在单位球内。由此可知，赋范线性空间中的单位球是否列紧是判断这个空间是有限维还是无限维的特征。

§2.7 内积空间和 Hilbert 空间

赋范线性空间和 Banach 空间是一种性质极好、理论非常丰富、应用又十分广泛的空间，但

它仍缺少人们所熟悉的内积和正交性的概念。为此，我们引入内积空间和 Hilbert 空间，从而在这种空间上建立起相应的几何学。内积空间是 Euclid 空间概念的直接推广。

定义 1 设 X 是复(或实)线性空间，如果对 X 中任意两个向量 x,y 有一复(或实)数(记作 $<x,y>$)与之对应，并且满足下列条件：

(1) $<x,x>\geqslant 0$，且 $<x,x>=0$ 等价于 $x=0, x\in X$；

(2) $<\alpha x+\beta y,z>=\alpha<x,z>+\beta<y,z>, z\in X, \alpha,\beta$ 是复数；

(3) $<x,y>=\overline{<y,x>}, x,y\in X$。

则 $<x,y>$ 称为 x,y 的内积，而这种具有内积的复(或实)线性空间 X 称为内积空间，条件(1)、(2)和(3)称为内积公理。

显然，由内积定义可以得到下面的等式

$$<x,\alpha y+\beta z>=\bar{\alpha}<x,z>+\bar{\beta}<x,z>$$

这一等式称为它关于第二因子是共轭线性的。它等价于

$$<x,y-z>=<x,z>+<x,z>$$

$$<x,\alpha y>=\bar{\alpha}<x,y>$$

另外，如果 X 是实线性空间，则内积公理(3)改为

$$<x,y>=<y,x>$$

引理 1 设 X 按内积 $<x,y>$ 成为内积空间，则对于任意的 $x,y\in X$，有

$$|<x,y>|\leqslant\sqrt{<x,x>}\sqrt{<y,y>} \tag{2.7.1}$$

当且仅当 x 和 y 线性相关时，式(2.7.1)等号才成立。

证明 当 $y=0$ 时，式(2.7.1)显然成立。不妨设 $y\neq 0$，则对每个复数 α，由内积公理(1)，有

$$0\leqslant<x-\alpha y,x-\alpha y>=<x,x>-\bar{\alpha}<x,y>-\alpha<y,x>$$
$$+\alpha\bar{\alpha}<y,y>$$

令 $\bar{\alpha}=\dfrac{<y,x>}{<y,y>}$，那么上式为

$$0\leqslant<x,x>-\frac{<y,x><x,y>}{<y,y>}$$
$$=<x,x>-\frac{|<x,y>|^2}{<y,y>}$$

所以

$$|<x,y>|\leqslant\sqrt{<x,x>}\sqrt{<y,y>}$$

如果 x 和 y 线性相关，通过直接计算，易知式(2.7.1)中等号成立。反之，若式(2.7.1)中等号成立，且已假设 $y\neq 0$，令

$$\alpha=\frac{<x,y>}{<y,y>}$$

从而推出 $<x-\alpha y,x-\alpha y>=0$，即 $x=\alpha y$，所以 x 与 y 线性相关。

设 X 是内积空间，如果对 $\forall\, x\in X$，令

$$\|x\|=\sqrt{<x,x>} \tag{2.7.2}$$

可以验证由式(2.7.2)定义的 $\|x\|$ 满足范数公理，因此我们称式(2.7.2)定义的范数 $\|x\|$ 为由内积(诱)导出的范数，所以内积空间 X 是一特殊的赋范线性空间。

式(2.7.1)可记为

$$|<x,y>|\leqslant\|x\|\,\|y\|$$

这一不等式亦称为 Cauchy－Schwarz 不等式。

引理 2 内积 $\langle x,y\rangle$ 是两个变元的连续函数。

事实上，设 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 是 X 中的点列，分别按范数收敛于 $x,y\in X$，即 $x_n\to x$，$y_n\to y$，于是有

$$|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x,y\rangle|\leqslant|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x,y_n\rangle|+|\langle x,y_n\rangle-\langle x,y\rangle|$$
$$\leqslant\|x_n-x\|\,\|y_n\|+\|x\|\,\|y_n-y\|$$

因 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 收敛，且 $\|y_n\|$ 有界，所以，当 $n\to\infty$ 时，上面不等式右端趋于零，故内积 $\langle x,y\rangle$ 关于两个变元是连续的。

引理 3 内积和范数成立如下恒等式

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2)$$

(2.7.3)

式(2.7.3)称为极化恒等式，它表示内积可以用范数来表示。当 X 为实内积空间时，极化恒等式化为

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$$

定义 2 设 X 是内积空间，由它导出的赋范线性空间，如果按式(2.7.2)中的范数是完备的，则称 X 为 Hilbert 空间。简言之，Hilbert 空间就是完备的内积空间。

从以上讨论可知，内积空间总是一特殊的赋范线性空间，但反过来每个赋范线性空间都是内积空间吗？下面进一步探讨内积空间的特征性质。

定理 1 赋范线性空间 X 是内积空间的充分必要条件是对任意的 $x,y\in X$ 都有平行四边形公式即

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2) \tag{2.7.4}$$

证明 *必要性* 如果赋范线性空间 X 是内积空间，那末由式(2.7.2)可导出

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2&=\langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle\\&=2\langle x,x\rangle+2\langle y,y\rangle\\&=2(\|x\|^2+\|y\|^2)\end{aligned}$$

充分性 如果 X 是赋范线性空间，其中范数为 $\|\cdot\|$，对于任意 $x,y\in X$，它们满足平行四边形公式(2.7.4)，那末，一定可在 X 中定义内积 $\langle x,y\rangle$，使 $\|x\|$ 就是由内积 $\langle x,y\rangle$ 导出的范数，因限于篇幅，略去证明的推导过程。

例 1 Euclid 空间 R^n 是 Hibert 空间。

实际上，对于任意 $x,y\in R^n$，$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n)$，其内积定义为

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\eta_k$$

它满足内积公理，且由内积诱导范数为

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

R^n 在这种范数意义下是完备的，所以 R^n 是 Hilbert 空间。

同理，n 维复线性空间 C^n 也是 Hilbert 空间。对于任意 $x,y\in C^n$，其内积定义为

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\bar{\eta}_k,x=(\xi_k),y=(\eta_k) \tag{2.7.5}$$

其中式(2.7.5)中横线段"—"表示取复共轭。可以验证，式(2.7.5)满足内积公理，因此 C^n 是内

积空间。这种定义了内积的复线性空间亦称为酉空间。

再由内积导出范数

$$\|x\| = \sqrt{<x,x>}$$

C^n 在这种范数意义下是完备的，所以 C^n 也是 Hilbert 空间。

例 2 l^2 是 Hilbert 空间。

实际上，对任意 $x,y\in l^2$，定义内积如下

$$<x,y> = \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\bar{\eta}_k, x = (\xi_k), y = (\eta_k)$$

容易验证，$\langle x,y\rangle$ 是 l^2 的内积，所以其导出范数为

$$\|x\| = \sqrt{<x,x>} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

在这种导出范数意义下，内积空间 l^2 是完备的，所以 l^2 是 Hilbert 空间。

例 3 $L^2[a,b]$ 是 Hilbert 空间。对于任意 $x,y\in[a,b]$ 定义

$$<x,y> = \int_a^b x(t)\bar{y}(t)\mathrm{d}t \tag{2.7.6}$$

可以验证，式(2.7.6)满足内积公理，于是 $L^2[a,b]$ 按内积式(2.7.6)成为内积空间，又由内积式(2.7.6)导出范数

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

在 §2.6 例 4 中，$L^p[a,b]$ 是完备的。若令 $p=2$，则 $L^2[a,b]$ 是完备的，所以 $L^2[a,b]$ 是 Hilbert 空间。

例 4 $C[a,b]$ 是内积空间但不是 Hilbert 空间。

实际上，在 $C[a,b]$ 中可以定义内积

$$<x,y> = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t \tag{2.7.7}$$

其中 $x(t),y(t)\in C[a,b]$，则 $C[a,b]$ 成为一个内积空间。但是 $C[a,b]$ 中通常的最大值范数不是由内积式(2.7.7)导出的。由内积式(2.7.7)导出的范数是

$$\|x\| = \left(\int_a^b [x(t)]^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$C[a,b]$ 在这个范数下并不完备，因此 $C[a,b]$ 不是 Hilbert 空间。

最后再一次指出，内积空间必是赋范线性空间，Hilbert 空间必是 Banach 空间，因此，前面所讲的度量空间、赋范线性空间(或 Banach 空间)的结论都适用它们。不仅如此，由于有了内积，它们还具有其他空间所不具备的种种性质。

§2.8 直交与投影

本节首先由内积引入直交及直交投影的概念，然后建立在 Hilbert 空间几何学中具有重要作用的投影定理。

定义 1 设 X 是内积空间，对任意 $x,y\in X$，如果

$$<x,y> = 0$$

则称 x 与 y 互相垂直或直交，记作 $x\perp y$；设 A 和 B 是 X 的两个子集，如果对任意 $x\in A$ 和任

意 $y\in B$ 都有 $x\perp y$,则称 A 与 B 直交,记作 $A\perp B$;设 A 是 X 的子集,X 中所有与 A 直交的向量的全体称为 A 的直交补,记作 $A^{\perp}$。

关于向量直交、直交补有如下一些基本性质。

定理 1 (1)设 X 为内积空间,对任意 $x,y\in X$,$x\perp y$,则 $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$;

(2)设 X 是内积空间,$E\subset X$,则 $E^{\perp}$ 是 X 的闭线性子空间;

(3)设 X 是内积空间,$E\subset X$,则 $E\cap E^{\perp}=\{0\}$;

(4)设 X 是内积空间,$E\subset X$,如果 $\overline{E}=X$,则 $E^{\perp}=\{0\}$。

证明 (1)当 $x\perp y$ 时,于是 $<x,y>=<y,x>=0$,从而 $\|x+y\|^2=<x+y,x+y>=\|x\|^2+\|y\|^2$。

(2)对于任意 $x_1,x_2\in E^{\perp}$,那么当 $y\in E$ 时,有

$$<x_1,y>=<x_2,y>=0$$

这时对任何数 α、β,由内积公理得到

$$<\alpha x_1+\beta x_2,y>=\alpha<x_1,y>+\beta<x_2,y>=0$$

因此,$\alpha x_1+\beta x_2$ 与任何 $y\in E$ 直交,即 $\alpha x_1+\beta x_2\in A^{\perp}$,所以 $A^{\perp}$ 是一个线性子空间。

如果 $\{x_n\}\subset E^{\perp}$,且 $x_n\to x_0(n\to\infty)$,那么,由内积的连续性,对任意 $y\in A$,有

$$<x_0,y>=\lim_{n\to\infty}<x_n,y>=0$$

所以,$x_0\in E^{\perp}$,因此 $E^{\perp}$ 是闭线性子空间。

(3)设 $x\in E\cap E^{\perp}$,则 $x\in E$,$x\in E^{\perp}$,由直交补的定义,有

$$\|x\|^2=<x,x>=0,x=0$$

从而

$$E\cap E^{\perp}=0$$

故当 E 为 X 的子空间时,则有

$$E\cap E^{\perp}=\{0\}$$

(4)设 $\overline{E}=X$,如果 $x_0\in E^{\perp}$,对任意 $x\in E$,则

$$<x_0,x>=0$$

因 $x_0\in X=\overline{E}$,故存在 $x_n\in E$,使 $\|x_n-x_0\|\to 0$,从而由内积的连续性,得

$$<x_0,x_0>=\lim_{n\to\infty}<x_0,x_n>=0$$

即 $x_0=0$,又由基本性质(2)知 $E^{\perp}\neq\varnothing$,故 $E^{\perp}=\{0\}$。

由定理 1 可知,X 为 Hilbert 空间时,则它的任一子集 E 的直交补也必是 Hilbert 空间;另外,X 的稠密子集的直交补只能是零向量。

定义 2 设 X 是内积空间,E_1 和 E_2 是 X 的两个线性子空间,如果 $E_1\perp E_2$,则称 $E=\{x_1+x_2|x_1\in E_1,x\in E_2\}$ 为 E_1 和 E_2 的直交和简称直和,记作 $E_1\oplus E_2$ 或 E_1+E_2。

定义 3 设 E 是内积空间的线性子空间,$x\in X$,如果有 $x_0\in E$,$x_1\perp E^{\perp}$,使得

$$x=x_0+x_1$$

则称 x_0 是 x 在 E 上的(直交)投影。

应该指出,对于内积空间 X 中的任意向量 x 和任意线性子空间 E,x 在 E 上的投影并不一定存在,但是如果 x 在 E 上的投影存在的话,则投影必定是唯一的。

定理 2 设 E 是内积空间 X 的线性子空间,$x\in X$,如果 x_0 是 x 在 E 上的投影,则

$$\|x-x_0\|=\inf_{y\in E}\|x-y\| \tag{2.8.1}$$

而 x_0 是 E 中使式(2.8.1)成立的唯一向量。

证明 因为 x_0 是 x 在 E 上的投影，所以，$x_0\in E$，$x-x_0\perp E^{\perp}$，对于任意 $y\in E$，由于 $x-y=(x-x_0)+(x_0-y)$，而 $x_0-y\in E$，因此，$x-x_0\perp x_0-y$，于是，由 $<x_0-y,x-x_0>=0$，得

$$\|x-y\|^2=<(x-x_0)-(y-x_0),(x-x_0)-(y-x_0)>$$
$$=\|x-x_0\|^2+\|x_0-y\|^2\geqslant\|x-x_0\|^2 \qquad (2.8.2)$$

式(2.8.2)中只有在 $x_0=y$ 时，等号成立。由式(2.8.1)可知式(2.8.2)成立，并且式(2.8.2)中右边的下确界只有 $y=x_0$ 时达到。

定理 2 指出，用 E 中的 y 逼近 x 时，当且仅当它等于 x 在 E 上的投影 x_0 时，逼近的程度最好。

下面将给出两个重要引理，然后证明直交分解定理。为此，先介绍凸集的概念。

定义 4 设 X 是线性空间，$E\subset X$，如果对任意 $x,y\in E$，集合

$$\{\alpha x+(1-\alpha)y\,|\,0\leqslant\alpha\leqslant 1\}\subset E$$

则称 E 为 X 中的凸集。

例如，在赋范线性空间 X 中，以任一点 $x_0\in X$ 为中心，$r>0$ 为半径的开球 $B(x_0,r)$ 是一个凸集。事实上，对于任意 $x,y\in B(x_0,r)$ 有 $\|x-x_0\|<r$，$\|y-x_0\|<r$，于是当 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ 时，有

$$\|\alpha x+(1-\alpha)y-x_0\|=\|\alpha(x-x_0)+(1-\alpha)(y-x_0)\|$$
$$<\alpha r+(1-\alpha)r=r$$

故 $\alpha x+(1-\alpha)y\in B(x_0,r)$，所以 $B(x_0,r)$ 是凸集。

又如，线性空间的每一个线性子空间都是凸集。

引理 1(变分引理) 设 X 是内积空间，E 是 X 中的非空凸集，并且按 X 中由内积导出的度量完备，那么对每个 $x\in X$，存在唯一的 $y\in E$，使得

$$\|x-y\|=\mathrm{d}(x,E)=\inf_{\xi\in E}\|x-\xi\|$$

证明 令 $\delta=\mathrm{d}(x,E)$，由下确界定义，存在 $\{\xi_n\}\subset E$，使得

$$\delta_n=\|x-\xi_n\|\to\delta\quad(n\to\infty)$$

令 $u_n=\xi_n-x$，则 $\|u_n\|=\delta_n$，且

$$\|u_n+u_m\|=\|\xi_n+\xi_m-2x\|=2\left\|\frac{1}{2}(\xi_n+\xi_m)-x\right\|$$

因为 E 为凸集，所以 $\frac{1}{2}(\xi_n+\xi_m)\in E$。由此可得 $\|u_n+u_m\|\geqslant 2\delta$。又因为 $\xi_n-\xi_m=u_n-u_m$，由平行四边形公式，得

$$\|\xi_n-\xi_m\|^2=\|u_n-u_m\|^2=-\|u_n+u_m\|^2+2(\|u_n\|^2+\|u_m\|^2)$$
$$\leqslant-(2\delta)^2+2(\delta_n^2+\delta_m^2)$$

于是 $\{\xi_n\}$ 是 E 中的 Cauchy 序列，但 E 按内积导出的度量完备，因而存在 $y\in E$，使得 $\xi_n\to y$，因为 $y\in E$，所以 $\|x-y\|\geqslant\delta$，但是

$$\|x-y\|\leqslant\|x-\xi_n\|+\|y-\xi_n\|=\delta_n+\|\xi_n-y\|$$

上式右端当 $n\to\infty$ 时，极限为 δ，所以

$$\|x-y\|=\delta$$

如果又有 $y_0\in E$，使得 $\|x-y_0\|=\delta$，由平行四边公式，有

$$\|y-y_0\|^2=\|(y-x)-(y_0-x)\|^2$$
$$=2\|y-x\|^2+2(y_0-x)\|^2-\|(y-x)+(y_0-x)\|^2$$
$$=2\delta^2+2\delta^2-4\left\|\frac{1}{2}(y+y_0)-x\right\|^2$$

由于 E 的凸集性，$\frac{1}{2}(y+y_0)\in E$，所以 $\|\frac{1}{2}(y+y_0)-x\|^2\geqslant\delta^2$，这样，$0\leqslant\|y-y_0\|\leqslant4\delta^2-4\delta^2=0$，因此 $\|y-y_0\|=0$，即 $y=y_0$，这就证明了唯一性。

引理 2 设 X 是内积空间，E 是 X 的线性子空间，$x\in X$，如果存在 $y\in E$，使得 $\|x-y\|=d(x,E)$，则 $x-y\perp E$。

证明 令 $\xi=x-y$，如果 ξ 不垂直于 E，那末必有 $y_1\perp E$，使得

$$<\xi,y_1>\neq 0$$

显然 $y_1\neq0$，另一方面，对任何复数 α，有

$$\begin{aligned}\|\xi-\alpha y_1\|^2&=<\xi-\alpha y_1,\xi-\alpha y_1>\\&=<\xi,\xi>-\bar{\alpha}<\xi,y_1>-\alpha[<y_1,\xi>-\bar{\alpha}<y_1,y_1>]\end{aligned}$$

令

$$\bar{\alpha}=\frac{<y_1,\xi>}{\langle y_1,y_1\rangle}$$

则上式右端方括号中式子为零，又因 $\|\xi\|=d(x,E)$，因此

$$\|\xi-\alpha y_1\|^2=\|\xi\|^2-\frac{|<\xi,y_1>|^2}{<y_1,y_1>}<d^2(x,E)$$

即 $\|\xi-\alpha y_1\|<d(x,E)$，但是由于 $y-\alpha y_1\in E$，所以

$$\|\xi-\alpha y_1\|=\|x-y-\alpha y_1\|>d(x,E)$$

这与上式矛盾，因此，$x-y\perp E$。

变分引理又称为极小化向量定理，它是内积空间的一个基本定理，在微分方程、现代控制论和逼近论中有重要的应用。此引理表明：用子空间 E 中的元素 y 来逼近 $x\in X$ 时，当且仅当 y 等于 x 在 E 上的投影 x_0 时，逼近的程度最好，也即是当且仅当 $y=x_0$ 时，达到最小值 $d(x,E)$。

根据引理 1，如果 E 是 X 的完备子空间，E 当然是 X 中的凸集，所以，对 $\forall\ x\in X$，存在唯一的
$y\in E$，使得

$$\|x-y\|=d(x,E)$$

又根据引理 2，对任意 $x\in X$，存在 $y\in E$，及 $z\in E^{\perp}$，使得

$$x=y+z\tag{2.8.3}$$

式(2.8.3)的表示是唯一的。否则又若 $y_1\in E$，$z_1\in E^{\perp}$，使得

$$x=y_1+z_1$$

于是 $y_1-y=z-z_1\in E\cap E^{\perp}=\{0\}$，所以 $y=y_1$，$z=z_1$，再由直和的定义可得

$$X=E+E^{\perp}$$

以上的讨论可以概括为一条重要的定理。

定理 3(投影定理) 设 X 是内积空间，且 $E\subset X$ 是 X 的完备线性子空间，则有

$$X=E+E^{\perp}$$

投影定理亦称为直交分解定理，亦可表述为：设 X 是内积空间，且 $E\subset X$ 是 X 的完备线性子空间，则对任意的 $x\in X$，可作下列唯一的直交分解

$$x=x_0+y,x_0\in E,y\in E^{\perp}$$

§2.9 内积空间的直交系

在内积空间，由于引入了直交概念，就可以进一步引进规范直交系，这样内积空间的每一

元素能够通过规范直交系表示，从而为更深入的研究打下了基础。规范直交系在内积空间的重要性，犹如直角坐标系在Euclid 空间一样。本节除介绍基本概念外，还将讨论直交系的重要性质、Gram－Schmidt 直交化方法及 Hilbert 空间的同构性。

一、基 本 定 义

定义 1 设 E 是内积空间 X 的一个不含零元的子集，如果 E 中向量两两直交，则称 E 为 X 中的直交系；又如果 E 中向量范数都为 1，则称 E 为 X 中的规范直交系，即对所有 $x,y\in E$，则有

$$<x,y>=\begin{cases}1, x=y\\0, x\neq y\end{cases}$$

如果一直交系或规范直交系 E 是可列的，我们可以把它排成一序列$\{x_n\}$，并称它为直交序列或规范直交序列，或统称为直交系。在这种情形下，有

$$<x_i,x_j>=\begin{cases}1, i=j\\0, i\neq j\end{cases}$$

由定义 1 可直接得出直交系有以下基本性质。

(1)对直交系 E 中任意有限个向量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 成立

$$\|x_1+x_2+\cdots+x_n\|^2=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\cdots+\|x_n\|^2$$

证明 由于 E 中向量两两相交，所以

$$\|\sum_{k=1}^{n}x_k\|^2=<\sum_{k=1}^{n}x_k,\sum_{k=1}^{n}x_k>=\sum_{k=1}^{n}<x_k,x_k>=\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2$$

(2)直交系 E 是 X 中线性无关子集。

证明 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in E$，而且$\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i=0$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 n 个数，则对任何 $1\leqslant i\leqslant n$，有

$$0=<\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i,x_j>=\alpha_j<x_j,x_j>=\alpha_j\|x_j\|^2$$

于是，$\alpha_i=0(i=1,2,\cdots,n)$，所以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关，这就证明了 E 是 X 中线性无关子集。

例 1 Euclid 空间 R^n 中

$$e_1=(1,0,0,\cdots,0)$$
$$e_2=(0,1,0,\cdots,0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_n=(0,0,0,\cdots,1)$$

构成规范直交系即 $E=\{e_n\}$。

例 2 在实线性空间 $L^2[0,2\pi]$中定义内积为

$$<f,g>=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

其中 f、$g\in L^2[a,b]$，则三角函数系$\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos x$，$\sin x$，$\cdots$，$\cos nx$，$\sin nx$，$\cdots$为 $L^2[0,2\pi]$中的规范直交系。

我们在内积空间中引入规范直交系的目的是把空间中的向量关于规范直交系展开成级数，为此，首先介绍一般赋范线性空间中级数收敛的概念。

定义 2 设 X 是赋范线性空间，$\{x_n\}$ 是 X 中一列向量，$\{\alpha_n\}$ 是数域 K 中一列数，作形式级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i \tag{2.9.1}$$

称 $S=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$ 为级数式(2.9.1)的 n 项部分和。如果有 $x\in X$，使 $S_n\to x(n\to\infty)$，则称级数式(2.9.1)收敛，并称 x 为这个级数的和，记作

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i$$

定义 3 设 E 为内积空间 X 中的规范直交系，$x\in X$，称数集

$$\{<x,e>\ |e\in E\}$$

为向量 x 关于规范直交系 E 的 Fourier 系数集，而 $\langle x,e\rangle$ 称为 x 关于 e 的 Fourier 系数。

例 3 设实内积空间 $X=L^2[0,2\pi]$，它的直交系 E 为例 2 中的三角函数系，对任意 $x(t)\in L^2[0,2\pi]$，x 关于 E 的 Fourier 系数集为

$$a_0=\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\mathrm{d}t=<x,\frac{1}{\sqrt{2}}>$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\cos nt\mathrm{d}t=<x,\cos nt>\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\sin nt\mathrm{d}t=<x,\sin nt>\quad(n=1,2,\cdots)$$

而每个 a_0 或 a_n 或 b_n 是 $x(t)$ 的 Fourier 系数。由此可见，内积空间 X 中向量 x 关于规范直交系的 Fourier 系数是数学分析中 Fourier 系数概念的推广。

在 n 维 Euclid 空间 R^n 中，如果 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，那么，R^n 中的任一非零向量可用 $\{e_n\}$ 唯一地表示出来。然而，对于无穷维空间来说，基底应该有多少元素才算"足够"呢？为此，我们引入下面的概念。

定义 4 设 $\{e_n\}$ 是内积空间 X 的规范直交系，如果 $x\perp e_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$，则必有 $x=0$，我们就称 $\{e_n\}$ 是一个完全的规范直交系。

例如 三角函数系

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\cos nt,\sin nt,n=1,2,\cdots$$

是 $L^2[0,2\pi]$ 的完全规范直交系。

二、基本定理

定理 1(Bessel 不等式) 设 $\{e_i\}$ 是内积空间 X 中的有限或可列规范直交系，则任意 $x\in X$，存在不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty}|<x,e_i>|^2\leqslant\|x\|^2 \tag{2.9.2}$$

证明 因为对任意 n 个数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，有

$$\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\|^2=<x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i,x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i>$$

$$=<x,x>+<\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i,\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i>$$

$$-<\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i,x>-<x,\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i>$$

$$=\|x\|^2-2\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{n}\bar{\alpha}_i<x,e_i>+\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2$$

令 $\alpha_i=<x,e_i>(i=1,2,\cdots,n)$代入上式得

$$\sum_{i=1}^{n}|<x,e_i>|^2<\|x\|^2$$

再令 $n\to\infty$时，即得式(2.9.2)成立。

定理 2 设$\{e_i\}$是 Hilbert 空间 X 中的可列规范直交系，则：

(1)级数$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i$ 收敛的充分必要条件是级数$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2$ 收敛；

(2)如果 $x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i$，则 $\alpha_i=<x,e_i>(i=1,2,\cdots)$，故

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}<x,e_i>e_i,$$

(3)对任意 $x\in X$，级数$\sum_{i=1}^{\infty}<x,e_i>e_i$ 收敛。

证明 (1)设 $S_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i,\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2$，由于$\{e_i\}$为规范直交系，所以，对任意自然数 m 和 n，且 $n>m$ 成立。

$$\|S_n-S_m\|^2=\|\alpha_{m+1}e_{m+1}+\alpha_{m+2}e_{m+2}+\cdots+\alpha_n e_n\|^2$$

$$=\sum_{i=m+1}^{n}|\alpha_i|^2=\sigma_n-\sigma_m$$

所以，$\{S_n\}$是 X 中 Cauchy 点列的充分必要条件为$\{\sigma_n\}$是 Cauchy 数列，由 X 和数域 K 的完备性，推出(1)成立。

(2)由于 $x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i$，对于每个自然数 j，根据内积的连续性，可以得到

$$<x,e_j>=<\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i,e_j>=\alpha_j$$

所以

$$x=\sum_{j=1}^{\infty}<x,e_j>e_j$$

(3)由 Bessel 不等式知，级数$\sum_{i=1}^{\infty}|<x,e_i>|^2$ 收敛，又由式(2.9.1) 和式 (2.9.2)知，级数$\sum_{i=1}^{\infty}<x,e_i>e_i$ 收敛。

定理 3 $\{e_i\}$是 Hilbert 空间 X 中的完全规范直交系的充分必要条件为对任意 $x\in X$，有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|<x,e_i>|^2=\|x\|^2$$

这一等式称为Parseval恒等式。

证 充分性 设Parseval恒等式对任意$x\in X$成立，如果$\{e_i\}$不完全，由定义4存在$x_0\neq 0$，且$x_0\perp e_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$，于是$<x_0,e_i>=0(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$。由于对$x_0$成立Parseval等式，即

$$\| x_0 \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |<x_0,e_i>|^2$$

所以，$\| x_0 \| =0$即$x_0=0$，这与$x_0\neq 0$矛盾，故$\{e_i\}$是X中的完全规范直交系。

必要性 设$\{e_i\}$是X中的完全规范直交系，对任意$x\neq 0\in X$，非零Fourier系数为$<x,e_i>(i=1,2,\cdots)$，由定理2，级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} <x,e_i> e_i$$

收敛。设其和为y，则对任意自然数i，有

$$<x-y,e_i> = <x,e_i> - \sum_{j=1}^{\infty} <x,e_j><e_j,e_i>$$
$$= <x,e_i> - <x,e_i> = 0$$

由$\{e_i\}$的完全性，得到$x-y=0$，即$x=y$，所以

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} <x,e_i> e_i$$

由此得到

$$\| x \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |<x,e_i>|^2$$

即Parseval等式成立。至于，$x=0\in X$，Parseval等式显然成立。

由定理3可以看出，当$\{e_i\}$是Hilbert空间X中的完全规范直交系时，X中每个向量x都可以展成级数

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} <x,e_i> e_i$$

显然，此式就是向量x关于完全规范直交系的Fourier展开式，因此，完全规范直交系是研究Hilbert空间的重要工具。那么是否每个Hilbert空间都有完全规范直交系，以及如何得到完全规范直交系？为此，我们介绍Gram－Schmidt直交化过程。

三、Gram－Schmidt直交化

定理4 设$\{x_1,x_2,\cdots\}$是内积空间X中有限或可列个线性无关向量，则必有X中规范直交系$\{e_1,e_2,\cdots\}$，使对任何正整数n有

$$\text{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\} = \text{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$$

证明 令$e_1=\frac{x_1}{\| x_1 \|}$，则$\| e_1 \| =1$，且

$$\text{span}\{e_1\} = \text{span}\{x_1\}$$

令$u_2=x_2-<x_2,e_1>e_1$，因x_1,x_2线性无关，所以$u_2\neq 0$，且$u_2\perp e_1$，令$e_2=\frac{u_2}{\| u_2 \|}$，于是$e_2\perp e_1$，显然

$$\text{span}\{e_1,e_2\} = \text{span}\{x_1,x_2\}$$

以此类推，如果已作$e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}$，其中$\| e_i \| =1(i=1,2,\cdots,n-1)$，并且两两正交，满足

$$\text{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}\} = \text{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\}$$

再令

$$u_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} < x_n,e_i > e_i$$

由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关知 $u_n \neq 0$，于是

$$e_n = \frac{u_n}{\| u_n \|}$$

这样 $\| e_n \| = 1$，且 $e_n \perp e_i (i=1,2,\cdots,n-1)$，又满足

$$\text{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\} = \text{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$$

这样继续下去，便可得到所要求的规范直交系。

以上定理的证明过程称为 Gram—Schmidt 直交化过程。

定理 5 每个非零的 Hilbert 空间必存在完全规范直交系。

证明 只对 Hilbert 空间是可分的情形予以证明。

设 X 是可分的 Hilbert 空间，则存在有限或可列个向量 $\{x_i\}$，使 $\text{span}\{x_i\}=X$，不妨设 $\{x_i\}$ 为 X 中的线性无关子集，由定理 4，存在有限或可列个规范直交系 $\{e_i\}$，使对任何自然数 n 成立

$$\text{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\} = \text{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$$

所以，由 $\{e_i\}$ 张成的线性空间包含 $\{x_i\}$，因此，$\overline{\text{span}\{e_i\}} \supset \overline{\text{span}\{x_i\}} = X$，即 $\{e_i\}$ 是 X 中的完全规范直交系。

例 4 设 $L^2[0,2\pi]$ 是 $[0,2\pi]$ 上平方 L—可积复函数空间，令

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

则

$$(\varphi_m,\varphi_n) = \int_0^{2\pi} \varphi_m(x) \overline{\varphi_n(x)} \mathrm{d}x = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases}$$

因此 $\{\varphi_n\}$ 是规范直交系，且可以证明 $\{\varphi_n\}$ 是完全规范直交系。当 $L^2[0,2\pi]$ 是实值平方可积函数空间时，完全规范直交系就是例 2 中的三角函数系。

例 5 设 $L_n(x)=e^x \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})$，则称 $L_n(x)$ 为 n 阶 Laguerre 多项式，可以证明

$$e_n = \frac{1}{n!} e^{-\frac{x}{2}} L_n(x) (n = 0,1,2,\cdots)$$

是空间 $L^2(0,+\infty)$ 的一个完全规范直交系。

例 6 设 $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]$，$P_n(x)$ 称为 Legendre 多项式，可以证明

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) \ (n = 0,1,2,\cdots)$$

是空间 $L^2[-1,1]$ 的一个完全规范直交系。

例 7 设 $H_n=(-1)^n e^{x^2} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2})$，称 $H_n(x)$ 为 Hermite 多项式，可以证明

$$\varphi_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) (n = 0,1,2,\cdots)$$

是空间 $L^2(-\infty,+\infty)$ 的一个完全规范直交系。

四、Hilbert 空间的同构性

为了进一步研究 Hilbert 空间的特征，需要把一个抽象的 Hilbert 空间表示成一个具体的

Hilbert 空间，因此，我们讨论 Hilbert 空间的同构性。

定义 5 设 X 和 $\hat{X}$ 是两个内积空间，如果存在 X 到 $\hat{X}$ 的双射 T，且保持线性运算和内积不变，即对任何 $x,y\in X$ 及 $\alpha,\beta\in K$，都有

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty$$

$$<Tx,Ty>=<x,y>$$

则称内积空间 X 和 $\hat{X}$ 是同构的；称 T 为 X 到 $\hat{X}$ 的同构映射。

早已证明，任一可分的 Hilbert 空间与 l^2 空间同构，从而任意两个可分的 Hilbert 空间之间彼此同构；同时 $L^2[a,b]$与 l^2 可视为是一致的，这样一来，一个抽象可分的 Hilbert 空间的研究归结为对 l^2 或 $L^2[a,b]$的研究。

习 题 二

1. 验证 $L^2[a,b]$为线性空间。

2. 设 M 是线性空间的子集，证明 span$M$ 是包含 M 的最小子空间。

3. 在 $C[a,b]$中，对于任意两点 x,y，定义度量 $\mathrm{d}(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|\mathrm{d}t$，证明 $C[a,b]$为一度量空间。

4. 设(X,d)为度量空间，求证：对于任意 $x,y,z,w\in X$ 恒有

(1) $|\mathrm{d}(x,y)-\mathrm{d}(z,w)|\leqslant\mathrm{d}(x,z)+\mathrm{d}(y,w)$；

(2) $|\mathrm{d}(x,y)-\mathrm{d}(z,y)|\leqslant\mathrm{d}(x,z)$。

5. 设(X,d)为度量空间，令

$$\rho(x,y)=\frac{\mathrm{d}(x,y)}{1+\mathrm{d}(x,y)}$$

证明(X,ρ)也是度量空间。

6. 设 $F:L^2[a,b]\to C[a,b]$，定义为

$$Fx(t)=\int_a^t x^2(\tau)\mathrm{d}\tau,x\in L^2[a,b]$$

证明 F 是连续映射。

7. 设 f 是度量空间 X 到度量空间 Y 上的连续映射，如果 A 在 X 中稠密，证明 $f(A)$在 $Y=f(X)$中稠密。

8. 设 X 在度量 d 的意义下是完备的度量空间，证明 X 在度量 $\mathrm{d}=\frac{\mathrm{d}}{1+\mathrm{d}}$之下亦是完备的。

9. 证明 R^n 中点集 A 为自列紧集的充要条件是 A 为有界闭集。

10. 设 A 是自列紧集，F 是 A 上的连续映射，证明 A 的象 $B=f(A)$也是自列紧集。

11. 在线性空间 $C[a,b]$中，对于 $x\in C[a,b]$，定义

$$\|x\|_1=\int_a^b|x(t)|\mathrm{d}t$$

证明$\|\cdot\|_1$是 $C[a,b]$上的范数。

12. 设 X,Y 和 Z 都是赋范线性空间（或度量空间）。若 $f:X\to Y$，与 $g:Y\to Z$ 都是连续映射，证明 $h=g\circ f$ 是 X 到 Z 的连续映射。

13. 设 X 和 Y 是两个赋范线性空间。若映射 $f:X\to Y$ 保持范数，即对每一个 $x\in X$

$$\|fx\|=\|x\|$$

证明 f 是单射。

14. 设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是赋范线性空间中的任意两个 Cauchy 序列，证明$\{\|x_n-y_n\|\}$收敛。

15. 设 $B[a,b]$为$[a,b]$上有界函数全体，其线性运算与 $C[a,b]$中相同，令

$$\|x\| = \sup_{t\in[a,b]}|x(t)|, x\in B[a,b]$$

证明 $B[a,b]$是 Banach 空间。

16. 验证 $L^2[a,b]$中所定义的内积

$$<x,y>=\int_a^b x(t)\overline{y}(t)\mathrm{d}t, x,y\in L^2[a,b]$$

满足内积公理的全部条件。

17. 设 X 是实内积空间，对于 $x,y\in X$，验证极化恒等式

$$<x,y>=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$$

18. 设 X 为内积空间，$x,y\in X$，如果对一切 $z\in X$ 均有$<x,z>=<y,z>$，证明 $x=y$。

19. 设$\{u_n\}$是内积空间 X 中的点列，则当$<u_n,u>\to<u,u>$且$\|u_n\|\to\|u\|$时，有$u_n\to u$。

20. 设 X 是内积空间，证明对任意 $A\subset X$，都有 $A\cap A^{\perp}\subset\{\theta\}$。

21. 如果$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$是线性空间 X 上的等价范数，证明$(X,\|\cdot\|_1)$与$(X,\|\cdot\|_2)$中的 Cauchy 序列是相同的。

22. 设 A 和 B 是内积空间 X 的子集，证明

(1)若 $A\subset B$，则 $B^{\perp}\subset A^{\perp}$；

(2)$A\subset(A^{\perp})^{\perp}$。

23. 设 A 是内积空间 X 上的任一线性子空间，如果 $x\in X$ 在 A 上有投影，证明此投影是唯一的。

24. A 是内积空间 X 上的任一线性子空间，如果 $x\in X$ 在 A 上的直交投影都存在，则 A 是 X 的闭子空间。

25. 试将序列$\{1,x_1,x_2,x_3,\cdots\}$的前四项规范直交化，其中 $x_n(t)=t^n$ 定义在区间$[-1,1]$上，内积定义为 $<x,y>=\int_{-1}^1 x(t)y(t)\mathrm{d}t$。

26. 证明任何 n 维实内积空间都与 R^n 同构；任何 n 维复内积空间都与 C^n 同构。

第三章　有界线性算子

在泛函分析中，最使人感兴趣的是从赋范线性空间到另一赋范线性空间的映射，亦称为算子。本章首先建立有界线性算子和有界线性泛函的概念，然后讨论它们的性质；同时简要地介绍线性算子的基本理论，即通常所说的泛函分析的四个基本定理（Hahn－Banach 泛函延拓定理、Banach 逆算子定理、闭图象定理和共鸣定理）。这些内容不仅在理论上而且在工程技术领域都有着十分广泛的应用。

§3.1　线性算子

本节讨论保留线性空间两种代数运算的线性算子；接着使算子和范数联系起来，从而揭示线性算子的有界性和连续性是等价的这一特性；其次介绍有界线性算子空间；最后讨论有限维赋范空间上线性算子的特征。

一、线性算子

定义 1　设 X 和 Y 是同一数域 K 上的两个线性空间，D 是 X 的线性子空间，T 为 D 到 Y 的映射。如果对任意 $x,y\in D$ 及 $\alpha\in K$，有

$$T(x+y)=Tx+Ty \tag{3.1.1}$$

$$T(\alpha x)=\alpha Tx \tag{3.1.2}$$

则称 T 为 D 到 Y 中的线性算子，其中 D 称为 T 的定义域，记作 $\mathscr{D}(T)$，$T(D)$ 称为 T 的值域，记作 $\mathscr{R}(T)$。

由定义 1 可知，线性算子就是保留线性空间之间两种代数运算的映射。如果对任意 $x,y\in\mathscr{D}(T)$ 和 $\alpha,\beta\in K$，于是，式(3.1.1)和式(3.1.2)等价于 $T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty$；另外，在式(3.1.2)中取 $\alpha=0$，有 $T(0)=0$。

如果 $Tx=0,\forall x\in X$，则称 T 为零算子，记作 $T=0$。

定义 2　设 X 和 Y 是同一数域 K 上的两个线性空间，T 是 D 到 Y 的算子，集合 $\{x\mid Tx=0,x\in\mathscr{D}(T)\}$ 称为算子 T 的零空间，记作 $\mathscr{N}(T)$。可以证明线性算子的零空间是线性空间。

例 1　设 X 是线性空间，$\alpha\in K$，对任意 $x\in X$，令 $Tx=\alpha x$，显然 T 是 X 到 X 中的线性算子，称为相似算子。特别地，当 $\alpha=1$ 时，称为恒等算子，记作 I。

例 2　设 $P[a,b]$ 表示闭区间 $[a,b]$ 上多项式全体，对每个 $x(t)\in P[a,b]$，定义

$$Tx(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$$

由求导运算的线性性质，立即可知 T 是 $P[a,b]$ 到 $P[a,b]$ 的线性算子，它被称作微分算子。

例 3　对每个 $x(t)\in C[a,b]$，定义

$$Tx(t)=\int_a^t x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

由积分运算的线性性质可知，T 是 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的线性算子，它被称为积分算子。

例 4 对任意 $x(t)\in C[a,b]$，令

$$Tx(t) = tx(t)$$

显然 T 具有线性性质，它被称为乘法算子。

定理 1 设 X 和 Y 是同一数域 K 上的两个线性空间，$T:\mathscr{D}(T)\to Y$ 是线性算子，$\mathscr{D}(T)\subset X$，则

(1)值域 $\mathscr{R}(T)$ 是线性空间；

(2)如果 $\dim\mathscr{D}(T)=n<+\infty$，那末，$\dim\mathscr{R}(T)\leqslant n$。

证明 (1)对于任意 $y_1,y_2\in\mathscr{R}(T)$ 和 $\alpha,\beta\in K$，则存在 $x_1,x_2\in\mathscr{D}(T)$，使得 $y_1=Tx_1$，$y_2=Tx_2$，由于 $\mathscr{D}(T)$ 是线性空间，有 $\alpha x_1+\beta x_2\in\mathscr{D}(T)$，又由于 T 是线性算子，于是

$$\begin{aligned}T(\alpha x_1 + \beta x_2) &= T\alpha x_1 + T\beta x_2 = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2\\ &= \alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathscr{R}(T)\end{aligned}$$

所以，$\mathscr{R}(T)$ 是线性空间。

(2)任取 $n+1$ 个元素 $y_1,y_2,\cdots,y_{n+1}\in\mathscr{R}(T)$，则必有 $\mathscr{D}(T)$ 中的元素 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$，使得 $y_1=Tx_1,y_2=Tx_2,\cdots,y_{n+1}=Tx_{n+1}$，由于 $\dim\mathscr{D}(T)=n<+\infty$，所以 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}\}$ 是线性相关集，故必存在不全为零的标量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$，使得

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1}x_{n+1} = 0$$

由于 T 是线性算子，故 $T0=0$，于是

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - \cdots \alpha_{n+1}x_{n+1}) = 0$$

这说明 $\{y_1,y_2,\cdots,y_{n+1}\}$ 也是线性相关的，所以，$\dim\mathscr{R}(T)\leqslant n$。

定义 3 设 X,Y 都是赋范线性空间，且 $\mathscr{D}(T)\subset X$，如果映射 $T:\mathscr{D}(T)\to Y$ 是单射，则此时存在映射

$$T^{-1}:\mathscr{R}(T)\to\mathscr{D}(T)$$

即对任意 $y\in\mathscr{R}(T)$，存在 $x\in\mathscr{D}(T)$，使 $T^{-1}y=x$，则称 T^{-1} 为算子 T 的逆算子。

由定义 3 可知，对任意 $x\in\mathscr{D}(T)$，$T^{-1}Tx=x$。类似地，对任意 $y\in\mathscr{R}(T)$，$TT^{-1}y=y$，所以 $T^{-1}T=TT^{-1}=I$；另外，如果算子 T 的逆算子 T^{-1} 存在，显然有 T^{-1} 是线性的，且 $\dim\mathscr{R}(T)=\dim\mathscr{D}(T)$。

定理 2 设 X 和 Y 是同一数域 K 上的两个线性空间，$T:\mathscr{D}(T)\to Y$ 是线性算子，且 $\mathscr{D}(T)\subset X$，$\mathscr{R}(T)\subset Y$，则逆算子 $T^{-1}:\mathscr{R}(T)\to\mathscr{D}(T)$ 存在的充分必要条件是 $Tx=0$ 时，蕴含 $x=0$。

证明 *充分性* 设 $Tx=0$ 时，蕴含 $x=0$。令 $Tx_1=Tx_2$，$\forall\, x_1,x_2\in X$，由 T 的线性性，必有 $T(x_1-x_2)=Tx_1-Tx_2=0$，于是 $x_1-x_2=0$ 即 $x_1=x_2$，因此 T 是单射。根据定义 3 可知，逆算子 T^{-1} 是存在的。

必要性 设 T^{-1} 存在，如果对任意的 $x_1,x_2\in X$，有 $Tx_1=Tx_2$，则必有 $x_1=x_2$。若取 $x_2=0$，于是 $Tx_1=0$。如果 $x_1\neq 0$，那么与 $x_1=x_2$ 矛盾，所以 $x_1=0$。即 $Tx=0$，蕴含 $x=0$。

二、有界线性算子

定义 4 设 X 和 Y 是两个赋范线性空间，$T:\mathscr{D}(T)\to Y$ 是线性算子，其中 $\mathscr{D}(T)\subset X$ 是 X 的线性子空间。如果存在 $M>0$，使得对任意 $x\in\mathscr{D}(T)$，恒有

$$\| Tx \| \leqslant M \| x \| \tag{3.1.3}$$

则称算子 T 是有界的或称 T 为有界线性算子。

必须指出，式(3.1.3)两端的范数采用了相同的记号，其实两个不同空间的范数是不相同的，应严格分清；另外，式(3.1.3)定义的线性算子的有界性与函数的有界性略有区别。微积分中函数的有界性只要求值域有界，对定义域没有要求。但有界线性算子除了值域 $\mathscr{R}(T)$ 是有界集以外，还要求定义域 $\mathscr{D}(T)$ 也是有界集。所以，粗略地讲，有界线性算子是把有界集映射到有界集。

在式(3.1.3)中，引起我们注意的是对一切 $x\in\mathscr{D}(T)$ 使式(3.1.3)成立的最小数 M。为此引入下面的基本概念。

定义 5 设 T 是赋范线性空间 X 的子空间 $\mathscr{D}(T)$ 到赋范线性空间 Y 中的线性算子，称

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\neq 0\\ x\in\mathscr{D}(T)}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \tag{3.1.4}$$

为算子 T 在 $\mathscr{D}(T)$ 上的范数。这定义是合理的，可以验证，式(3.1.4)满足范数公理。如果 $\mathscr{D}(T)=\{0\}$，则规定 $\|T\|=0$；如果 $T=0$，由式(3.1.4)，显然有 $\|T\|=\|0\|=0$。

用 $M=\|T\|$ 代入式(3.1.4)，得一个重要而有用的公式即

$$\|Tx\| \leqslant \|T\| \ \|x\| \ (\text{对一切 } x\in\mathscr{D}(T) \text{ 成立}) \tag{3.1.5}$$

定理 3 设 T 是 $\mathscr{D}(T)$ 上的有界线性算子，则关于 T 的范数的另一计算公式为

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(T)\\ \|x\|=1}} \|Tx\| = \sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(T)\\ \|x\|\leqslant 1}} \|Tx\| \tag{3.1.6}$$

证 因为由式(3.1.4)，得

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\neq 0\\ x\in\mathscr{D}(T)}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\neq 0\\ x\in\mathscr{D}(T)}} \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \sup_{\substack{y\in\mathscr{D}(T)\\ \|y\|=1}} \|T(y)\|$$

用合于条件 $\|x\|=1$ 的 x 代替上式中的 y，所以

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(T)\\ \|x\|=1}} \|Tx\| \leqslant \sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(T)\\ \|x\|\leqslant 1}} \|Tx\|$$

反之，如果 $x\in\mathscr{D}(T)$，$\|x\|\leqslant 1$，则由式(3.1.5)，得

$$\|Tx\| \leqslant \|T\| \ \|x\| \leqslant \|T\|$$

所以，$\sup\limits_{\substack{x\in\mathscr{D}(T)\\ \|x\|\leqslant 1}} \|Tx\| \leqslant \|T\|$，因此，式(3.1.6)成立。

例 5 赋范线性空间 X 上的相似算子 $Tx=\alpha x$ 是有界线性算子，且 $\|T\|=|\alpha|$。特别是恒等算子 $\|I\|=1$，零算子 $\|0\|=0$。

例 6 设 $T:C[a,b]\to C[a,b]$ 定义为

$$(Tx)(t) = \int_a^t x(s)\mathrm{d}s \ (x(t)\in C[a,b])$$

显然 T 是线性算子。对任意 $x\in C[a,b]$

$$\|Tx\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t x(s)\mathrm{d}s\right| \leqslant \max_{a\leqslant s\leqslant b}|x(s)|(b-a) = (b-a)\|x\|$$

故 T 是有界的，且 $\|T\|\leqslant b-a$。另一方面，取常值函数 x_0，使满足 $x_0(t)=1(t\in[a,b])$，则

$$\|T\| \geqslant \frac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|} = \|Tx_0\|$$

$$= \max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\int_a^t 1\mathrm{d}s\right| = b-a$$

因此，$\|T\|=b-a$。

例 7 设 X 是闭区间$[0,1]$上全体多项式构成的赋范线性空间，其范数为 $\|x\| = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$，$x\in X$，定义算子 $T:X\to X$，且 $Tx(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$，这种算子显然是线性的，但是无界。

因为令 $x_n(t)=t^n$，n 是正整数，$\|x_n\| = \|t^n\| = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|t^n|=1$，但是 $Tx_n(t)=(t^n)'=nt^{n-1}$，从而 $\|Tx_n\| = \|nt^{n-1}\| = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|nt^{n-1}| =n$，因此

$$\frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|}=n$$

由于 n 可以任意增大，故不存在常数 $M>0$，使得

$$\frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|}=n<M$$

所以 T 是无界的。

定义 6 设 X 和 Y 是两个赋范线性空间，T 是 X 到 Y 的线性算子，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\|x-x_0\|<\delta$ 时，都有

$$\|Tx-Tx_0\|<\varepsilon$$

则称 T 在 $x_0\in\mathscr{D}(t)$处连续，此时就称 T 是连续算子，记作$\lim\limits_{x\to x_0}Tx=Tx_0$；如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在只依赖于 ε 的 $\delta(\varepsilon)>0$，使得对任意的 $x_1,x_2\in\mathscr{D}(T)$，只要 $\|x_1-x_2\|<\delta$，都有

$$\|Tx_1-Tx_2\|<\varepsilon$$

则称 T 在 $\mathscr{D}(T)$上是一致连续的。如果对$\forall\ x\in X$，T 在 x 处连续，则称 T 在 X 上连续。

下面我们讨论线性算子连续性和有界性的关系。

定理 4 设 X 和 Y 是同域 K 上的两个赋范线性空间，$T:X\to Y$ 是线性算子，如果 T 在 $x_0\in X$ 连续，则 T 必在 X 上处处连续。

证明 设对于任意 $x\in X$，$\{x_n\}\subset X$，且 $x_n\to x$，则 $x_n-x+x_0\to x_0$。由于 T 在 x_0 处连续而 T 又是线性算子，于是，$T(x_n-x+x_0)=Tx_n-Tx+Tx_0\to Tx_0$。所以 $Tx_n\to Tx$，即 T 在点 x 处连续，又由 x 的任意性，因此 T 在 X 上是处处连续的。

由定理 4 可知，要研究赋范线性空间上线性算子的全空间的连续性，只需讨论 T 在 $x_0=0$ 处的连续性即可。

定理 5 设 X 和 Y 是同域 K 上的两个赋范线性空间，T 是 $\mathscr{D}(T)\to Y$，$\mathscr{D}(T)\subset X$ 的线性算子，则 T 连续的充分必要条件是 T 有界。

证明 充分性 如果 T 有界，由式(3.1.3)，有 $\|T(x_n-x)\| = \|Tx_n-Tx\|\leqslant M\|x_n-x\|$，其中 M 是正常数，$\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T)$，$x\in\mathscr{D}(T)$。当 $x_n\to x$ 时，那么 $\|Tx_n-Tx\|\to 0$，即 $Tx_n\to Tx$，所以，T 是连续的。

必要性 如果 T 在 $\mathscr{D}(T)$上连续的，从而推出 T 有界。若结论不真，即 T 不是有界的，则对于自然数 n，存在点列$\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T)$，使得 $\|Tx_n\|>n\|x_n\|$，令

$$y_n=\frac{x_n}{\sqrt{n}\,\|x_n\|}$$

则

$$\|y_n\| = \left\|\frac{x_n}{\sqrt{n}\,\|x_n\|}\right\| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

因为 T 连续，必有 $Ty_n\to 0$，但是，另一方面

$$\|Ty_n\| = \left\|\frac{Tx_n}{\sqrt{n}\,\|x_n\|}\right\| = \left\|\frac{Tx_n}{\sqrt{n}\,\|x_n\|}\right\| > \sqrt{n}$$

从而产生矛盾；所以 T 有界。

三、线性算子空间

定义 7 设 X 和 Y 是同一数域 K 上的两个赋范线性空间，从 X 到 Y 一切可能的有界线性算子的全体，我们称为有界线性算子空间，记作 $\mathscr{B}(X\to Y)$。显然 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 是非空的，因为至少有一个零算子 $O\in\mathscr{B}(X\to Y)$。

设 A、$B\in\mathscr{B}(X\to Y)$，$\alpha\in K$，定义 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 的加法运算及数乘运算如下：

对于任意 $x\in X$，令

$$(A+B)x = Ax + By \tag{3.1.7}$$

$$(\alpha A)x = \alpha Ax \tag{3.1.8}$$

定理 6 设 X 和 Y 是同一数域 K 上的两个赋范线性空间，$A,B\in\mathscr{B}(X\to Y)$，$\alpha\in K$，则 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 按上述线性运算和算子范数成为赋范线性空间。

证明 事实上，对于任意 $A,B\in\mathscr{B}(X\to Y)$，$\alpha\in K$，由式(3.1.7)和式(3.1.8)，有

$$\|(A+B)x\| = \|Ax+Bx\| \leqslant \|Ax\| + \|Bx\|$$
$$\leqslant (\|A\| + \|B\|)\|x\|$$

由于 A 和 B 是有界算子，所以 $A+B\in\mathscr{B}(X\to Y)$，并且成立不等式

$$\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$$

$$\|\alpha A\| = \sup_{\|x\|=1}\|(\alpha A)x\| = \sup_{\|x\|=1}\|\alpha Ax\|$$
$$= |\alpha| \sup_{\|x\|=1}\|Ax\| = |\alpha|\,\|A\|$$

由此可知，$\alpha A\in\mathscr{B}(X\to Y)$ 且 $\|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|$。最后，$\|A\|=0$ 的充要条件是对任意 $x\in X$，$Ax=0$ 即 $A=0$，因此，$\mathscr{B}(X\to Y)$ 按上述加法和数乘运算成为赋范线性空间。

$\mathscr{B}(X\to Y)$ 是赋范线性空间，但不一定是完备的，若 Y 完备，则有下面的定理。

定理 7 设 X 是赋范线性空间，Y 是 Banach 空间，则 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 是 Banach 空间。

证明 设算子列 $\{T_n\}$ 是 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 中的 Cauchy 序列，即对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $m,n>N$ 时，有

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon$$

于是对每个 $x\in X$，当 $m,n>N$ 时，成立

$$\|T_nx - T_mx\| = \|(T_n - T_m)x\|$$
$$\leqslant \|T_n - T_m\|\,\|x\| < \varepsilon\|x\| \tag{3.1.9}$$

所以当 x 固定时，点列 $\|T_nx\|$ 是 Y 中的 Cauchy 点列。由 Y 的完备性，存在 $y\in Y$，使 $T_nx\to y$ $(n\to\infty)$ 作 X 到 Y 中算子 T 如下：对每个 $x\in X$，令

$$Tx = y = \lim_{n\to\infty} T_nx$$

容易验证，T 是 X 到 Y 中的线性算子。在式(3.1.9)中，令 $m\to\infty$，由范数的连续性得到，当 $n>N$ 时，对 X 中所有 x 成立

$$\|T_nx - Tx\| \leqslant \varepsilon\|x\|$$

由于 ε 不依赖于 x，所以

$$\|T_n - T\| = \sup_{\|x\|=1}\|(T_n - T)x\| \leqslant \varepsilon \tag{3.1.10}$$

即 $T_n\to T\in\mathscr{B}(X\to Y)$，又因 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 是线性空间，所以

$$T = T_n + (T - T_n) \in \mathscr{B}(X\to Y)$$

并由式(3.1.10)知,$\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0$,这就证明了 $\mathscr{B}(X\to Y)$是 Banach 空间。

四、有限维赋范线性空间上的线性算子

这部分讨论有限维线性空间上的线性算子与矩阵之间的对应关系,找到它们的具体联系;另外还揭示在有限维线性空间中线性算子是有界的这一性质。

设 X 和 Y 是同一数域 K 上的两个线性空间,$\dim X=n$,$\dim Y=m$,并设 X 的一组基为 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,而 Y 的一组基为 $G=\{g_1,g_2,\cdots,g_m\}$,同时这两组基均按照固定的顺序排列。$T:X\to Y$ 是线性算子,对于任意 $x\in X$,有

$$x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k=\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+\cdots+\xi_n e_n \tag{3.1.11}$$

则 x 的象

$$y=Tx=T\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k=\sum_{k=1}^{n}\xi_k Te_k$$

因为表示式(3.1.11)是唯一的,如果 X 的基向量 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 给定,则线性算子 T 由 $y_k=Te_k(k=1,2,\cdots,n)$都是 Y 中的元素,它们必可唯一表示为

$$y=\sum_{i=1}^{m}\eta_i g_i$$

和

$$y_k=Te_k=\sum_{i=1}^{m}\tau_{ik}g_i$$

从而得到

$$\begin{aligned}y=\sum_{i=1}^{m}\eta_i g_i&=\sum_{k=1}^{n}\xi_k Te_k\\&=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\Big(\sum_{i=1}^{m}\tau_{ik}g_i\Big)=\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{n}\tau_{ik}\xi_k\Big)g_i\end{aligned}$$

于是

$$0=\sum_{i=1}^{m}(\eta_i-\sum_{k=1}^{n}\tau_{ik}\xi_k)g_i$$

然而$\{g_1,g_2,\cdots,g_m\}$是线性无关集,因此

$$\eta_i=\sum_{k=1}^{n}\tau_{ik}\xi_k(i=1,2,\cdots,m)$$

上式中的系数作成一个 $m\times n$ 矩阵即

$$T_{EG}=(\tau_{ik})_{m\times n}$$

这说明,如果 X 的基 E 和 Y 的基 G 给定,并且 E 和 G 中的向量按一定的顺序排列不变,那末从 n 维线性空间 X 到 m 维线性空间 Y 的线性算子(即线性变换)T 与矩阵 T_{EG}对应;反过来,每一个$(\tau_{ik})_{m\times n}$可决定一个 X 到 Y 的线性算子(即线性变换)T,使得对于每一个 $x=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k e_k$,对应于 Y 中的一个元素 $y=Tx=\sum\limits_{i=1}^{m}\eta_i g_i$。因此,矩阵 $T_{EG}=(\tau_{ik})_{m\times n}$可以看成是从 n 维线性空间 X 到 m 维线性空间 Y 的线性算子(即线性变换)。

定理 8 如果 X 是有限维赋范线性空间,Y 是赋范线性空间,T 是 $X\to Y$ 的线性算子,则 T 是有界的。

证明 由于 $\dim X=n$，可设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 X 中的基，对于每一个 $x\in X$，于是，$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$，因此

$$\|Tx\|=\|T\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\|=\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i Te_i\|$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|\ \|Te_i\|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|Te_i\|\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|$$

应用 §2.6 中的引理，存在常数 $c>0$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|\leqslant\frac{1}{c}\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\|=\frac{1}{c}\|x\|$$

于是
$$\|Tx\|\leqslant\frac{1}{c}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|Te_i\|\ \|x\|=M\|x\|$$

式中 $M=\frac{1}{c}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|Te_i\|$ 是常数，因此 T 是有界的。

§3.2 有界线性泛函和 Riesz 定理

如前节所述，所谓线性算子就是赋范线性空间 X 到另一个赋范线性空间 Y 且保持两个空间线性运算不变的映射，如果 Y 是数域 K，则这种映射称为线性泛函，因而线性泛函是线性算子的特例。为了区分算子和泛函，泛函经常采用小写字母如 f,g,h 等表示。如果 $K=C$，则称为复泛函；如果 $K=R$，则称为实泛函。

定义 1 设 $\mathscr{D}(f)$ 是赋范线性空间 X 的子空间，f 是 $\mathscr{D}(f)$ 到数域 K 中的线性泛函，如果存在正数 M，使得对所有的 $x\in\mathscr{D}(f)$，有

$$|f(x)|\leqslant M\|x\| \tag{3.2.1}$$

则称 f 是 $\mathscr{D}(f)$ 上的有界线性泛函，而泛函 f 的范数定义为

$$\|f\|=\sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(f)\\ \|x\|\leqslant 1}}\frac{|f(x)|}{\|x\|}=\sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(f)\\ \|x\|=1}}|f(x)|$$

于是，由式(3.2.1)可得

$$|f(x)|\leqslant\|f\|\ \|x\|$$

对于线性泛函，同样有连续性与有界性等价的定理即

定理 1 设 X 是赋范线性空间，f 是 $\mathscr{D}(f)\to K$ 的线性泛函，$\mathscr{D}(f)\subset X$，则 f 连续的充要条件是 f 界。

正因为如此，有界线性泛函，一般常称作连续线性泛函。

例 1 赋范线性空间 $(X,\|\cdot\|)$ 上的范数 $\|\cdot\|:X\to R$ 是 X 上一个泛函，它连续且有界，但不是线性的。

例 2 设 $f:C[a,b]\to R$，对于任意 $x(t)\in C[a,b]$，$f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}t$，则 f 是有界线性泛函且 $\|f\|=b-a$。

实际上，由定积分的性质，f 的线性性和有界性是显然的。下面证明 $\|f\|=b-a$。

由于 $|f(x)|\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|(b-a)=\|x\|(b-a)$。所以，对于一切非零元 $x\in C[a,b]$，总有

$$\|f\|=\sup_{x(t)\in C[a,b]}\frac{|f(x)|}{\|x\|}\leqslant b-a$$

另一方面，取 $x_0(t)\equiv 1$，则 $x_0\in C[a,b]$，于是

$$\|f\|\geqslant\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|}=|f(x_0)|=b-a$$

因此

$$\|f\|=b-a$$

例 3 已知选定 $a=(\alpha_i)\in l^2$，对于任意的 $x=(\xi_i)\in l^2$，定义 $g(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i$，则 g 是有界线性泛函且 $\|g\|=|a|$。

实际上，对于任意的 $y=(\eta_i)\in l^2$，$\alpha,\beta\in K$，有

$$\begin{aligned}g(\alpha x+\beta y)&=\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha\xi_i+\beta\eta_i)\alpha_i=\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha\xi_i\alpha_i+\beta\eta_i\alpha_i)\\&=\alpha\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i+\beta\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\eta_i=\alpha g(x)+\beta g(y)\end{aligned}$$

所以，g 是线性的。

同时，由 Cauchy－Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}|g(x)|&=\left|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i\xi_i|\\&\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|x\||a|\end{aligned}$$

于是，对于一切非零元 $x\in l^2$，均有

$$\frac{|g(x)|}{\|x\|}\leqslant|a|$$

$$\sup_{\substack{x\in l^2\\x\neq 0}}\frac{|g(x)|}{\|x\|}=\|g\|\leqslant|a|$$

所以，$\|g\|\leqslant|a|$。

另一方面，取 $x=a=(\alpha_i)$，则 $g(a)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2=|a|^2$，所以

$$\|g\|\geqslant\frac{|g(a)|}{|a|}=|a|$$

于是

$$\|g\|=|a|$$

因此，g 是有界线性泛函且 $\|g\|=|a|$。

定义 2 设 X 是赋范线性空间，在 X 上全体有界线性泛函组成的赋范线性空间 $\mathscr{B}(X\to K)$ 称为 X 的共轭空间或伴随空间，记作 X^*（这里的 K 是 R 或 C 与 X 是实或复线性空间是一致的）。

根据 § 3.1 定理 7，由 K 的完备性可知，共轭空间 $X^*=\mathscr{B}(X\to K)$ 是 Banach 空间，即得

定理 2 任何赋范线性空间 X 的共轭空间 X^* 是 Banach 空间。

现在要进一步讨论，共轭空间中每个元素的具体形式。这个问题对于把泛函分析的一般理论应用到具体工程技术领域是非常重要的。为此，需要引入两个赋范线性空间同构的概念。

定义 3 设 X 和 Y 是同一数域 K 上的两个赋范线性空间，如果 $T(X\to Y)$ 是保范（或等距）的双射线性算子，即 T 是 $X\to Y$ 的双射，且对于任意 $x_1,x_2\in X$，$\alpha\in K$，有

$$T(x_1+x_2)=Tx_1+Tx_2$$
$$T(\alpha x_1)=\alpha Tx_1$$

和

$$\|Tx_1\| = \|x_1\|$$

则称 X 和 Y 为等距同构的赋范线性空间，而称 T 为等距同构映射。

在泛函分析中，任何时候空间的结构总是主要的研究对象，而点的属性则是无关紧要的。正是在这个意义下，保范的同构线性空间（即等距同构空间）可以认为是同一个抽象空间而不加以区别。这种把两个同构的空间同一化，是泛函分析的一个基本概念。

例 4　已知 $(R^n)^*$ 是 R^n 的共轭空间，证明 $(R^n)^*=R^n$。

证明　设 $f\in(R^n)^*$，在 R^n 中取一组基 $(e_1,\cdots,e_n)$，其中 $e_k=(0,\cdots,\underset{\text{第}k\text{个位置}}{0,1,0},\cdots,0)$，令 $f(e_k)=\alpha_k$，则 f 在 R^n 中有唯一的向量 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 与之对应。令 T 是 $(R^n)^*$ 到 R^n 上的线性算子，$Tf=\alpha$，对任意 $x=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k e_k\in R^n$，有

$$f(x)=f\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\Big)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\alpha_k \tag{3.2.2}$$

由 Cauchy－Schwarz 不等式，得

$$|f(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\xi_k\alpha_k|\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}=\|\alpha\|\ \|x\|$$

因此

$$\|f\|=\sup_{\substack{x\in R^n\\ \|x\|=1}}|f(x)|\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}=\|\alpha\|$$

另一方面，取 $x_0=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，则

$$|f(x_0)|=\Big|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\Big|=\Big(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum|\alpha_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

于是

$$\|f\|\geqslant\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|}=\frac{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}|\alpha|_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}}{\Big(\sum|\alpha_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}}$$

所以

$$\|f\|=\|\alpha\|$$

同时还易证明 T 是线性的双射，于是 T 是同构映射，因此 $(R^n)^*$ 与 R^n 同构，故 $(R^n)^*=R^n$。并且我们称式(3.2.2)是 R^n 上有界线性泛函的表示。

例 5　证明 $l^p(1<p<+\infty)$ 的共轭空间是 l^q，其中 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，即证明 $(l^p)^*=l^q$。

证明　仍令 $e_k=(0,\cdots,\underset{\text{第}k\text{个位置}}{0,1},0,\cdots)$，$k=1,2,\cdots$，$e_k\in l^p$，且 $\|e_k\|=1$，对任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p$，有

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k$$

设 $f\in(l^p)^*$，令 $f(e_k)=\eta_k(k=1,2,\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$。下面证明 $y\in l^q$。由于 f 是有界线性泛函，所以

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k \tag{3.2.3}$$

如果 $f=0$，则 $\eta_k=0,k=1,2,\cdots$，所以有不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|$$

如果 $f\neq 0$，则 η_k 不全为 0，对任意自然数 n，令

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}(|\eta_k|^{q-1}\mathrm{sgn}\eta_k)e_k$$

显然，$x_n\in l^p$，有

$$f(x_n)=\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^{q-1}\mathrm{sgn}\eta_k f(e_k)=\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^q\leqslant\|f\|\,\|x_n\|_{l^p}$$

注意到 $\|x_n\|_{l^p}=\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^{p(q-1)}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}$，于是

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|$$

令 T 是 $(l^p)^*$ 到 l^q 的线性算子，$Tf=y$，则

$$\|y\|_{l^q}=\|Tf\|_{l^q}\leqslant\|f\|$$

另一方面，对任意 $x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k\in l^p$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k f(e_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k$$

$$|f(x)|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}=\|y\|_{l^q}\|x\|_{l^p}$$

因此，$\|f\|\leqslant\|y\|_{l^q}$，所以

$$\|Tf\|=\|y\|_{l^q}=\|f\|$$

由于 T 是 $(l^p)^*$ 到 (l^q) 上的双射线性算子，那么对任意 $y\in l^q$，式(3.2.3)唯一确定了 l^p 上的有界线性泛函 f，因此 T 是 $(l^p)^*$ 到 l^q 上的等距同构映射，而 $(l^p)^*$ 与 l^q 是等距同构空间，故

$$(l^p)^*=l^q(1<p<+\infty),\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

并称式(3.2.3)为 l^p 上的有界线性泛函的表示。

通过上面两个例子，讨论了某些常见空间上有界线性泛函的具体表示，下面我们再对 Hilbert 空间上有界线性泛函的一般表示作进一步的研究。

设 X 是一个内积空间，对于任意 $y\in X$，可以在 X 上构造泛函，即

$$F_y(x)=\langle x,y\rangle,x\in X$$

由内积 $\langle\cdot,y\rangle$ 对第一变元的线性性，知 F_y 是线性的；由 $|F_y(x)|=|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\,\|y\|$，知 F_y 是 X 上的有界线性泛函，且有 $\|F_y\|\leqslant\|y\|$。

当 X 是 Hilbert 空间时，上面事实的逆命题是否成立呢？下面定理圆满地回答了这一问题。

定理 3(Riesz 定理) 设 X 是 Hilbert 空间，F 是 X 上的有界线性泛函，则必定有唯一的 $y\in X$，使对任意 $x\in X$，都有

$$F(x)=\langle x,y\rangle，且\|F\|=\|y\|$$

证明 如果 $F=0$,只须取 $y=0$,结论成立。不妨设 $F\neq 0$,令 $\mathscr{N}$ 是 F 的零空间,即

$$\mathscr{N}=\{x \mid F(x)=0, x\in X\}$$

于是 $\mathscr{N}(F)\neq X$,且 $\mathscr{N}(F)$是 X 上的闭子空间。由投影定理可知,任取 $x_0\neq 0, x_0\perp \mathscr{N}(F)$,则 $F(x_0)\neq 0$,于是对任意 $x\in X$,令

$$x=\frac{F(x)}{F(x_0)}x_0+\left(x-\frac{F(x)}{F(x_0)}x_0\right)$$

因为$\left(x-\frac{F(x)}{F(x_0)}x_0\right)$满足

$$F\left(x-\frac{F(x)}{F(x_0)}x_0\right)=F(x)-F(x)=0$$

所以

$$x_0\perp\left(x-\frac{F(x)}{F(x_0)}x_0\right)$$

于是

$$<x-\frac{F(x)}{F(x_0)}x_0, x_0>=0$$

即

$$<x,x_0>=\frac{F(x)}{F(x_0)}\|x_0\|^2$$

因此

$$F(x)=\frac{F(x_0)}{\|x_0\|^2}<x,x_0>=<x,\frac{\overline{F(x_0)}}{\|x_0\|^2}x_0>=<x,y>$$

其中 $y=\frac{\overline{F(x_0)}}{\|x_0\|^2}x_0$。

如果另有 $y'\in X$,使 $F(x)=<x,y'>=<x,y>$,则

$$<x,y-y'>=0, x\in X$$

取 $x=y-y'$,得 $\|y-y'\|=0$,于是

$$y-y'=0$$

即

$$y=y'$$

因此 F 确定的 y 是唯一的。

又由于 $|F(x)|=|<x,y>|\leqslant\|y\|\|x\|$ 及 $|F(y)|=|<y,y>|=\|y\|^2$,知

$$\|F\|=\|y\|$$

定理得证。

§3.3 线性算子的基本定理简介

一、Hahn—Banach 定理

在§3.2中已经引进了有界线性泛函的概念,并对其性质作了简明的介绍。现在的问题是:对于任何非零赋范线性空间上是否有非零的有界线性泛函存在?如果有,是否"足够"多?这个问题实质上是在一个子空间(即使是有限维子空间)上有界线性泛函是否可以延拓到整个空

间而保持范数不变？这正是 Hahn－Banach 定理及其推论所要回答的泛函分析中的基本问题。

定理 1 （Hahn－Banach 泛函延拓定理） 设 X 是赋范线性空间，G 是 X 的子空间，f 是 G 上的有界线性泛函，则 f 可以保范地延拓到整个 X 上，即存在 X 上的线性泛函 F 满足

(1)对任意 $x\in G, F(x)=f(x)$，

(2) $\|F\|_X=\|f\|_G$。

证明略。

推论 1 设 X 为赋范线性空间，$x_0\in X, x_0\neq 0$，则必存在 X 上的有界线性泛函 $f(x)$，使得 $\|f\|=1$，并且 $f(x_0)=\|x_0\|$。

证明 设 $G=\{x\in X\,|\,x=\alpha x_0, \alpha$ 取一切实数$\}$，显然，G 是 X 中的线性子空间，在 G 上定义线性泛函

$$F(x)=F(\alpha x_0)\triangleq\alpha\|x_0\|$$

其中 $x=\alpha x_0$，又因为

$$|F(x)|=|\alpha|\,\|x_0\|$$

故 F 是 G 上的有界线性泛函，并且 $\|F\|_G=1$。由 Hahn－Banach 泛函延拓定理可知，在空间 X 上存在一个有界线性泛函 f，它是 F 的延拓，并且 $\|f\|_X=\|F\|_G=1$，特别是 $x=x_0\in G$，所以有 $f(x_0)=F(x_0)=\|x_0\|$。

推论 2 设 X 是赋范线性空间，对于任意 $x\in X$，则有

$$\|x\|=\sup_{\substack{f\in X^*\\ f\neq 0}}\frac{|f(x)|}{\|f\|} \tag{3.3.1}$$

证明 对任意 $f\in X^*$，$x\in X$，由

$$|f(x)|\leqslant\|f\|_{X^*}\|x\|_X$$

可得

$$\|x\|_X\geqslant\sup_{\substack{f\neq 0\\ f\in X^*}}\frac{|f(x)|}{\|f\|_{X^*}}$$

另一方面，对任意非零向量 $x\in X$（因为 $x=0$，式(3.3.1)成立），由推论 1，存在 $f_1\in X^*$，使得

$$\|f_1\|_{X^*}=1, f_1(x)=\|x\|$$

所以

$$\sup_{\substack{f\neq 0\\ f\in X^*}}\frac{|f(x)|}{\|f\|_{X^*}}\geqslant\frac{|f_1(x)|}{\|f_1\|_{X^*}}=\|x\|_{X^*}$$

于是得到

$$\|x\|=\sup_{\substack{f\neq 0\\ f\in X^*}}\frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

由推论 1 和推论 2 可以看出：

(1)对任何赋范线性空间 $X\neq\{0\}$，必有“足够多”的非零有界线性泛函存在；如果对于 X 上的一切有界线性泛函 f，有 $f(x_0)=0$，则必有 $x_0=0$。

(2)X 中向量 x 的范数 $\|x\|$ 也可用它的共轭空间 X^* 的元素 f 表示如式(3.3.1)。这反映了 X 的性质的研究可以归结为共轭空间 X^* 的研究，这在泛函分析中是常用的方法，也就是所谓对偶的理论和方法。

二、Banach 逆算子定理

§3.1 中已经介绍了逆算子的定义及逆算子存在的充要条件，现在我们要进一步讨论：已知T是有界线性算子，那末它的逆算子T^{-1}也是有界线性算子吗？这就是逆算子定理要回答的问题。逆算子定理反映了有界线性算子极为深刻的特征。

定义 1 设X和Y是两个度量空间，如果映射T把定义域$\mathscr{D}(T)\subset X$中的任意开集映成值域$\mathscr{R}(T)\subset Y$中开集，则称T为开映射。

引理 1 设X和Y是两个 Banach 空间，$T: X\to Y$是有界线性算子，且$TX=Y$，则T必为开映射。

证明略。

定理 2 线性算子T的逆算子T^{-1}也是线性的。

证明 对任意$x_1,x_2\in X,\alpha,\beta\in K$，令$y_1=Tx_1,y_2=Tx_2$，于是$T^{-1}y_1=x_1,T^{-1}y_2=x_2$，由$T$的线性性，有

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Tx_1+\beta Tx_2=\alpha y_1+\beta y_2$$

由逆算子定义，得

$$T^{-1}(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha T^{-1}y_1+\beta T^{-1}y_2$$

所以，逆算子T^{-1}是线性的。

定理 3(Banach 逆算子定理) 设X和Y是同数域K上的两个 Banach 空间，T是X到Y上的有界线性算子，且为双射，则逆算子T^{-1}存在且为有界线性算子。

证明 根据引理 1，T是开映射，从而把开集映成开集。由于T是X到Y的双射，故$T^{-1}:Y\to X$存在。若G是X中任一开集，则$E=TG$是Y中的开集，于是，映射T^{-1}把$E\subset Y$映成$G\subset X$，因此，对于逆算子T^{-1}来说，它满足"开集的原象是开集"这一条件，故T^{-1}是连续的(参见§2.3 定理 4)，从而T^{-1}有界；又由定理 2，T^{-1}是线性的，所以，逆算子T^{-1}是有界线性算子。

推论 设线性空间X上的两个范数$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$均使X成为 Banach 空间，且不等式

$$\|x\|_2\leqslant M\|x\|_1 \tag{3.3.2}$$

对一切$x\in X$成立，其中M为固定的正数，则$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$等价。

证明 将X按范数$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$所成 Banach 空间分别记为X_1,X_2，令I是将X_1中的元素x映射成X_2中同一元素的恒等映射，则I是由X_1到X_2上的一一对应的线性算子。由式(3.3.2)，I有界，根据定理 3，逆算子I^{-1}是有界的，即存在$c'>0$，使得

$$\|I^{-1}x\|_1\leqslant c'\|x\|_2$$

即$\|x\|_1\leqslant c'\|x\|_2$，故$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$等价。

三、闭图象定理

我们知道，在坐标平面上，函数$y=f(x)$的图象是一条曲线，它是由点$(x,f(x))$组成。对一般的线性算子也可引入图象的概念，从而建立闭图象定理，以更深刻地揭示线性算子的性质。

定义 2 设X和Y是两个赋范线性空间，T是$\mathscr{D}(T)\to Y$的线性算子，$\mathscr{D}(T)\subset X$，如果T的图象

$$G(T)=\{(x,y)\mid x\in\mathscr{D}(T),y=Tx\in Y\}$$

是乘积空间 $X\times Y$ 中的闭集，则称 T 为闭线性算子。其中 $X\times Y$ 上的线性运算定义为

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

$$\alpha(x,y)=(\alpha x,\alpha y),\alpha\in K$$

且 $X\times Y$ 中的范数定义为

$$\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|$$

容易证明，如果 X 和 Y 是 Banach 空间，则 $X\times Y$ 在上述范数意义下也是 Banach 空间。

下面定理给出判断一个线性算子是否为闭算子的充要条件。

定理 4 设 X 和 Y 是两个赋范线性空间，T 是 $\mathscr{D}(T)\subset X$ 到 Y 中的线性算子，则 T 为闭算子的充分必要条件是对任意的 $\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T)$，如果 $x_n\to x,Tx_n\to y$，其中 $x\in X,y\in Y$，则 $x\in\mathscr{D}(T)$ 且 $Tx=y$。

证明 *充分性* 任取 $(x_n,Tx_n)\in G(T)$，则存在 $\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T)(n=1,2,\cdots)$，使

$$(x_n,Tx_n)\to(x,y)$$

于是 $x_n\to x$；$Tx_n\to y(n\to\infty)$。由假设，$x\in\mathscr{D}(T)$ 且 $Tx=y$，故 $(x,y)=(x,Tx)\in G(T)$，即 $G(T)$ 是 $X\times Y$ 中的闭集，就是说 T 是闭算子。

必要性 设 T 为闭算子，则当 $\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T),x_n\to x,Tx_n\to y$ 时，显然 $(x_n,Tx_n)\subset G(T)$，而且在乘积空间 $X\times Y$ 中

$$(x_n,Tx_n)\to(x,y)$$

由于假设 $G(T)$ 是闭的，所以 $(x,y)\in G(T)$，因此 $x\in\mathscr{D}(T),Tx=y$

对于一个给定的线性算子，现在已经有三个比较重要的概念，即连续性、有界性和闭性。已经证明连续性和有界性是等价的，故本质上只有两个不同的概念，即有界性和闭性。容易验证，定义在全空间上的有界算子总是闭算子，但定义在全空间上的闭算子是否一定有界？答案是否定的。下面给出闭算子为有界算子的条件。

定理 5 （闭图象定理） 设 X 和 Y 是两个 Banach 空间，T 是 $\mathscr{D}(T)\subset X$ 到 Y 上的闭线性算子，$\mathscr{D}(T)\subset X$。如果 $\mathscr{D}(T)$ 是闭的，则 T 有界。

证明 由假设知，$G(T)$ 是 $X\times Y$ 中的闭集，故 $G(T)$ 本身按范数 $\|(x,y)\|$ 成为 Banach 空间。又由 $\mathscr{D}(T)$ 作为 X 的闭线性子空间，于是 $\mathscr{D}(T)$ 也可以看成是Banach 空间，定义 $G(T)$ 到 $\mathscr{D}(T)$ 的算子 P 如下

$$P:(x,Tx)\to x,x\in\mathscr{D}(T)$$

可以验证 P 是线性算子，且

$$\|P(x,Tx)\|=\|x\|\leqslant\|(x,Tx)\|$$

所以 P 有界，且 P 的值域 $\mathscr{D}(T)$，即 P 是 $G(T)$ 到 $\mathscr{D}(T)$ 上的有界线性算子。

现在证明 P 还是一对一的：当 $x_1=x_2$ 时，必有 $Tx_1=Tx_2$，所以，$(x_1,Tx_1)=(x_2,Tx_2)$，即得 P 是可逆算子。根据定理 3，逆算子 P^{-1} 有界，因此对任何 $x\in\mathscr{D}(T)$，有

$$\|(x,Tx)\|=\|P^{-1}x\|\leqslant\|P^{-1}\|\ \|x\|$$

因此 $\|Tx\|\leqslant\|(x,Tx)\|\leqslant\|P^{-1}\|\ \|x\|$，这说明 T 是有界的。

例 1 设 $X=Y=C[0,1]$，$T=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，则 T 是线性算子，$\mathscr{D}(T)$ 为 $[0,1]$ 中一阶连续可微函数全体，记作 $C^1[0,1]$，前已说过 $T=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 是无界算子，但 T 是闭算子，它的图象是

$$G(T)=\{(x(t),x'(t))\,|\,x(t)\in C^1[0,1]\}$$

事实上，如果有

$$(x_n(t), x_n'(t)) \in G(T), n = 1, 2, \cdots$$

且

$$(x_n(t), x_n'(t)) \to (x(t), y(t)) \in X \times Y$$

因 $\|(x(t), y(t))\| = \|x(t)\| + \|y(t)\|$，$(x(t), y(t)) \in X \times Y$，易知$\{x_n(t)\}$一致收敛于 $x(t)$，$\{x_n'(t)\}$也一致收敛于 $y(t)$，由数学分析得知，$x(t)$可微，并且 $x'(t) = y(t)$，即$(x(t), y(t)) \in G(T)$，这就证明了 $G(T)$是 $X \times Y$ 中的闭集，因此 $T = \frac{d}{dt}$是闭算子。

例 1 告诉我们，如果闭算子的定义域仅是 Banach 空间的某个真子空间，则它不一定是有界的。因此，Banach 空间 X 上的无界闭算子，其定义域至多只能在 X 中稠密，而决不能是整个空间 X。例 1 中，微分算子的定义域是 $C[0,1]$中稠密子集 $C^1[0,1]$，而不是 $C[0,1]$。

四、共鸣定理

共鸣定理又称一致有界定理或 Banach－Steinhaus 定理，是 Banach 空间理论的基石之一，许多古典分析问题经过抽象后，都可以归结为这一原理，因而充分显示了它的重要作用。

定理 6(共鸣定理) 设 X 是 Banach 空间，Y 是赋范线性空间，$\{T_\alpha, \alpha \in A\}$是 X 到 Y 的一族有界线性算子，其中 A 是指标集，如果对任意 $x \in X$

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha x\| < +\infty \tag{3.3.3}$$

则数集$\{\|T_\alpha\|, \alpha \in A\}$是有界的。

证明 任取一个指标集 $A_1 = A \cup \{\beta\}$，$\beta \overline{\in} A$，规定 $T_\beta = I$，在 Banach 空间 X 上再规定一个范数

$$\|x\|_1 = \sup_{\alpha \in A_1} \|T_\alpha x\| = \max(\|x\|, \sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha x\|), x \in X$$

所以，$\|x\|_1 \geqslant \|x\|$，又由式(3.3.3)知 $\|x\|_1 < +\infty$，显然 $\|\cdot\|_1$ 满足对范数的正齐性及由 $\|x\|_1 = 0$ 推出 $x = 0$ 的要求，现证它也满足三角不等式，因为

$$\begin{aligned} \|T_\alpha(x + y)\| &\leqslant \|T_\alpha x\| + \|T_\alpha y\| \\ &\leqslant \sup_{\alpha \in A_1} \|T_\alpha x\| + \sup_{\alpha \in A_1} \|T_\alpha y\| \end{aligned}$$

所以

$$\|x + y\|_1 \leqslant \sup_{\alpha \in A_1} \|T_\alpha(x + y)\| \leqslant \|x\|_1 + \|y\|_1$$

再证明 X 按范数 $\|\cdot\|_1$ 成为 Banach 空间。事实上，如果$\{x_n\}$按 $\|\cdot\|_1$ 为 Cauchy 点列，由于 $\|\cdot\| \leqslant \|\cdot\|_1$，所以$\{x_n\}$按 $\|\cdot\|$ 也是 Cauchy 点列，因此，$\|x_n - x_0\| \to 0 (n \to \infty)$。再证$\{x_n\}$按 $\|\cdot\|_1$ 收敛于 x_0，对任意 $\varepsilon > 0$，必存在 N，当 $n, m > N$ 时，有

$$\|x_n - x_m\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$$

即当 $\alpha \in A_1$ 时，$\|T_\alpha(x_n - x_m)\| < \frac{\varepsilon}{2}$，令 $m \to +\infty$，得

$$\|T_\alpha(x_n - x_0)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

所以，当 $n > N$ 时，有

$$\|x_n - x_0\|_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

即$\{x_n\}$按 $\|\cdot\|_1$ 收敛于 x_0。

根据定理 3 的推论可知，必存在 $M>0$，使得 $\|x\|_1\leqslant M\|x\|$，对一切 $x\in X$ 成立。也就是说，$\{\|T_\alpha\|,\alpha\in A\}$ 是有界集，上界不超过 M。即 $\|T_\alpha\|\leqslant M,\alpha\in A$，其中 M 与 x 和 α 均无关。

推论 设 $\{T_n\}$ 是从 Banach 空间 X 到赋范线性空间 Y 的算子序列，且对任意 $x\in X$，$\|T_nx-Tx\|\to 0(n\to\infty)$，则 $\{\|T_n\|\}$ 有界。

证明 对于每一个 $x\in X$，序列 $\{T_nx\}$ 收敛，则序列 $\{\|T_nx\|\}$ 是有界的，应用共鸣定理得到，$\{\|T_n\|\}$ 是有界的。

下面举出例子说明共鸣定理对于古典分析的应用。我们知道，以 2π 为周期的函数 $x(t)$ 的 Fourier 级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin t)$$

其中

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos kt\mathrm{d}t \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$
$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin kt\mathrm{d}t$$

Dirichlet 定理指出，当 $x(t)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，$f(-\pi)=f(\pi)$，且只有有限个极值点时，则有

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)\ (-\infty<t<+\infty)$$

现在要讨论的问题是，以 2π 为周期的函数仅满足在 $[-\pi,\pi]$ 上连续时，上式是否成立？

例 2 设 $C[-\pi,\pi]$ 是在 R 上以 2π 为周期的实值连续函数构成的 Banach 空间，对于 $x(t)\in C[-\pi,\pi]$，令 $\|x\|=\max\limits_{t\in R}|x(t)|$，又设

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos kt\mathrm{d}t \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$
$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin kt\mathrm{d}t$$

即

$$x(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$$

求证存在 $x(t)\in C[-\pi,\pi]$，使当 $t=0$ 时，有

$$x(0)\neq\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

证明 构造 $C[-\pi,\pi]$ 上有界线性泛函序列：

$$f_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\mathrm{d}t \quad (n=1,2,\cdots)$$

易证

$$\|f_n\|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\right|\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)s}{\sin s}\right|ds \geqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin(2n+1)s|}{s}ds$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin u|}{u}du \to +\infty(n\to+\infty)$$

如果对任意 $x(t)\in C[-\pi,\pi]$，有 $x(0)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k$，得

$$f_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k\to x(0)\ (n\to+\infty)$$

从而$\{|f_n(x)|\}$有界。根据共鸣定理，$\{\|f_n\|\}$应有界，这与$\|f_n\|\to\infty$矛盾，所以一定有$x(t)\in C[-\pi,\pi]$，使

$$x(0)\neq\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

即 $x(t)$的 Fourier 级数在 $t=0$ 发散。

§3.4 共轭空间和共轭算子

一、赋范线性空间的共轭空间和共轭算子

如前所述，所谓共轭空间就是赋范线性空间 X 上有界线性泛函全体组成的空间，记作X^*。已经证明，X^*是一个Banach 空间，于是，X^*上有界线性泛函全体也组成一个新的共轭空间，记作$(X^*)^*=X^{**}$，称X^{**}是 X 的第二次共轭空间，如此继续下去就有 X 的三次共轭空间即 $X^{***}=(X^{**})^*$等等。这些空间之间自然是有联系的，我们仅讨论 X 与 X^{**}的关系。

定理 1 如果 X 是赋范线性空间，X^{**}是 X 的二次共轭空间，则有

$$X\subseteq X^{**}$$

即 X 与 X^{**}的一个子空间等距同构。

证明 对任意 $x\in X$，对应地在 X^*上定义一个泛函 x^{**}

$$x^{**}(f)=f(x)(x\text{ 固定},f\text{ 取遍 }X^*)$$

则

(1)X^{**}是线性的。

对于任意 $f_1,f_2\in X^*$，$\alpha,\beta\in K$ 有

$$x^{**}(\alpha f_1+\beta f_2)=(\alpha f_1+\beta f_2)(x)=\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)$$
$$=\alpha x^{**}(f_1)+\beta x^{**}(f_2)$$

另外，对于任意 $x_1,x_2\in X$，$\alpha,\beta\in K$，有

$$(\alpha x_1+\beta x_2)^{**}(f)=f(\alpha x_1+\beta x_2)$$
$$=\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)=(\alpha x_1^{**}+\beta x_2^{**})(f)$$

即得

$$(\alpha x_1+\beta x_1)^{**}=\alpha x_1^{**}+\beta x_2^{**}$$

(2) $\|x^{**}\|=\sup_{\|f\|=1}|x^{**}(f)|=\sup_{\|f\|=1}|f(x)|\geqslant\|x\|$ (Hahn—Banach 定理)

又

$$|x^{**}(f)|=|f(x)|\leqslant\|f\|\|x\|=\|x\|\|f\|$$

即

$$\|x^{**}\| \leqslant \|x\|$$

所以

$$\|x^{**}\| = \|x\|$$

(3)对于不同的 x,对应不同的 x^{**}。如果 $x_1 \neq x_2$,则

$$\|x_1^{**} - x_2^{**}\| = \|(x_1 - x_2)^{**}\| = \|x_1 - x_2\| \neq 0$$

由(1)、(2)和(3)知,X 与 X^{**} 的一个子空间等距同构即 $X \subset X^{**}$。我们称 $X \to X^{**}$ 的算子为嵌入算子,由定理 1 知,此算子为保范的线性算子。

定义 1 设 X 是赋范线性空间,如果 $X = X^{**}$,则称 X 是自反的。例如,$1 < p < +\infty$ 而 q 是 p 的相伴数即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 时,那么,$(l^p)^* = l^q$,$(l^q)^* = l^p$,于是 $(l^p)^{**} = l^p$,故 l^p 是自反的。又如,$L^p[a,b]$($1 < p < +\infty$)也是自反的空间。

对于 l^2,$L^2[a,b]$,R^n 来说,它们的共轭空间就是它们本身,即满足关系 $(L^2[a,b])^* = L^2[a,b]$,$(l^2)^* = l^2$,$(R^n)^* = R^n$,我们称它们是自共轭空间。

设 X 和 Y 是同一数域 K 上的赋范线性空间,$T \in \mathscr{B}(X \to Y)$,$f \in Y^*$,对任意 $x \in X$,有 $f(Tx) \in K$,即当 T,f 固定时,$f(Tx)$ 是定义在 X 上的一个泛函,记此泛函为 $(T^* f)(x)$,下面证明 $T^* f \in X^*$。

(1)$T^* f(\alpha x + \beta y) = f(T(\alpha x + \beta y)) = f(\alpha Tx + \beta Ty) = \alpha f(Tx) + \beta f(Ty) = \alpha T^* f(x) + \beta T^* f(y)$

所以,$T^* f$ 是线性的。

(2)$|T^* f(x)| = f(Tx) \leqslant \|f\| \|Tx\| \leqslant \|f\| \|T\| \|x\| = M\|x\|$

所以,$T^* f$ 有界。因此 $T^* f \in X^*$。

上述论证又说明,当 T 固定时,对每个 $f \in Y^*$,都有 $T^* f \in X^*$。从这个意义上讲,T^* 又可看成是 Y^* 至 X^* 的一个算子,且这个算子 T^* 有性质:对任意 $x \in X$,$f \in Y^*$,$T^* f(x) = f(Tx)$ 成立。

下面给出算子 T^* 的明确定义。

定义 2 设 X 和 Y 是同一数域 K 上的两个赋范线性空间,$T \in \mathscr{B}(X \to Y)$,$T^*$ 是 $Y^* \to X^*$ 的算子,如果对任意 $x \in X$,$f \in Y$,下式

$$T^* f(x) = f(Tx)$$

都成立,则称 T^* 为 T 的共轭算子(伴随算子)。

如前所述,对每个 $T \in \mathscr{B}(X \to Y)$ 一定有 T^* 存在。现还要指出,这个 T^* 是唯一的。因为如果 T_1^* 和 T_2^* 同时满足

$$T_1^* f(x) = T_2^* f(x) = f(Tx)$$

那么,由 $T_1^* f(x) = T_2^* f(x) = f(Tx)$ 对一切 $x \in X$ 成立,显然,有

$$T_1^* f = T_2^* f$$

又上式对一切 $f \in Y^*$ 成立,显然有

$$T_1^* = T_2^*$$

根据以上分析和定义 2,可直接导出 T^* 的某些性质:

(1)$T^* \in \mathscr{B}(Y^* \to X^*)$;

(2)$\|T^*\| = \|T\|$。

例 1 设(a_{ij})是$m\times n$矩阵，作R^n到R^m中的算子T如下：当$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$时，令

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ (i=1,2,\cdots,m)$$

而$y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^T\in R^m$，则$T$是有界线性算子，求$T^*$。

解 任取$f\in(R^m)^*$，由R^m上有界线性泛函的表示形式，存在$c=(c_1,c_2,\cdots,c_m)^T\in R^m$，使

$$f(y)=\sum_{i=1}^{m}c_iy_i$$

于是

$$(T^*f)(x)=f(Tx)=\sum_{i=1}^{m}c_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}c_i\Big)x_j=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{ji}c_j\Big)x_i$$

则$T^*f=\sum_{j=1}^{m}a_{ji}c_j(i=1,2,\cdots,n)$。因$f$与$c$一一对应，故$T^*$为由$(a_{ji})$所确定的$(R^m)^*=R^m$到$(R^n)^*=R^n$的算子。

这表明T^*的矩阵为T的矩阵$(a_{ij})_{m\times n}$的转置矩阵，因此，共轭算子就是转置矩阵的推广。

例 2 设$K(s,t)$，$a\leqslant s,t\leqslant b$上的有界可测函数，令

$$Tx(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t,\ x(t)\in L^q[a,b]$$

易证T是$L^q[a,b]$到$L^p[a,b]\left(q>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\right)$的有界线性算子，求$T^*$。

解 因对任取的$f\in(L^p[a,b])^*$，存在$\beta(s)\in L^q[a,b]$，使

$$f(Tx)=\int_a^b\beta(s)\left[\int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s=\int_a^b\left[\int_a^b K(s,t)\beta(s)\mathrm{d}s\right]x(t)\mathrm{d}t$$

又因为$T^*f(x)=f(Tx)$，故

$$T^*f=\int_a^b K(s,t)\beta(s)\mathrm{d}t$$

二、Hilbert 空间的共轭空间和共轭算子

设X是 Hilbert 空间，则X的共轭空间X^*是定义在X上的有界线性泛函的全体按范数

$$\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)| \tag{3.4.1}$$

构成 Banach 空间。

由 Riesz 定理可知，X^*和X是两个等距空间，因为X^*中的f与X中的y按下式

$$f(x)=\langle x,y\rangle$$

成一等距对应。不仅如此，X^*与X按式(3.4.1)成共轭线性同构空间。按照关于共轭空间的定义，在X^*和X是等距共轭线性同构的意义下，可以认为X是自共轭的，即$X^*=X$。

现在我们进一步讨论在 Hilbert 空间的具体情形下，共轭算子的表现形式。

设X是 Hilbert 空间，$T\in\mathscr{B}(X\to X)$，则T的共轭算子$T^*\in\mathscr{B}(X^*\to X^*)$，且对任意$x\in X$及$f\in X^*$，$f(Tx)=T^*f(x)$。又因为此式中的$f\in X^*$，$T^*f\in X^*$，由 Riesz 定理知，存在$y$及$y^*$，使上式成为

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,y^*\rangle$$

如果我们把上式法则由y确定的y^*，记作T^*y，则得到以下的定义。

定义 3 设 X 是 Hilbert 空间，$T\in\mathscr{B}(X\to X)$，如果有

$$<Tx,y>=<x,T^*y>,x,y\in X$$

则称 X^* 到 X^* 的算子 T^* 为 T 的共轭算子。

显然，T^* 是存在的，下面再证 T^* 是唯一的。

如果 T_1^* 也满足

$$<Tx,y>=<x,T_1^*y>,x,y\in X$$

则由 $<x,T^*y>=<x,T_1^*y>,x,y\in X$，可得

$$<x,(T^*-T_1^*)y>=0,x,y\in X$$

取 $x=(T^*-T_1^*)y$，导出 $(T^*-T_1^*)y=0,y\in X$，所以 $T^*=T_1^*$，因此 T^* 是唯一的，因而定义 3 是合理的。下面再证明 T^* 是 $X\to X$ 的有界线性算子。

对于任意 $x\in X$ 及 $y_1,y_2\in X$，有

$$<x,T^*(y_1+y_2)>=<Tx,y_1+y_2>=<Tx,y_1>+<Tx,y_2>$$
$$=<x,T^*y_1>+<x,T^*y_2>=<x,T^*y_1+T^*y_2>$$

由泛函表示的唯一性可知

$$T^*(y_1+y_2)=T^*y_1+T^*y_2\text{(可加性)}$$

又对任意 $\alpha\in K,y\in X$，有

$$<x,T^*\alpha y>=<Tx,\alpha y>=\bar{\alpha}<Tx,y>$$
$$=\bar{\alpha}<x,T^*y>=<x,\alpha T^*y>$$

由泛函表示的唯一性可知

$$T^*\alpha y=\alpha T^*y\text{(齐次性)}$$

所以 T^* 是 $X\to X$ 的线性算子。又

$$\|T^*y\|^2=<T^*y,T^*y>=<TT^*y,y>$$
$$\leqslant\|TT^*y\|\|y\|\leqslant\|T\|\|T^*y\|\|y\|$$

所以，$\|T^*y\|\leqslant\|T\|\|y\|$，即 $\|T^*\|\leqslant\|T\|$，因此，$T^*\in\mathscr{B}(X\to X)$。

另外由

$$\|Tx\|^2=<Tx,Tx>=<x,T^*Tx>$$
$$\leqslant\|x\|\|T^*Tx\|\leqslant\|T^*\|\|Tx\|\|x\|$$

于是，$\|Tx\|\leqslant\|T^*\|\|x\|$，所以 $\|T\|\leqslant\|T^*\|$，因此

$$\|T^*\|=\|T\|$$

可以指出，如果 X 是 Hilbert 空间，$T,V\in\mathscr{B}(X\to X)$，共轭算子还有以下基本性质：

(1) $(T^*)^*=T$；

(2) $\|T^*T\|=\|TT^*\|=\|T\|^2$；

(3) $(\alpha T+\beta V)^*=\bar{\alpha}T^*+\bar{\beta}V^*,\alpha,\beta\in K$；

(4) $(TV)^*=V^*T^*$。

例 3 设 C^n 是 Hilbert 空间，$e_1,\cdots,e_n$ 是 C^n 的规范正交基，T 是 C^n 到 C^n 的有界线性算子。由于 $e_1,\cdots,e_n$ 是 C^n 的基，T 是线性算子，所以，$Te_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的值决定了算子 T。如果

$$Te_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}e_i \tag{3.4.2}$$

当 $x\in C^n$，$y=Tx$，y 用 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 表示时，即

$$其中 x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

由式(3.4.2)得到

$$y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j e_i$$

比较系数即得

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

由上所述，C^n 中线性算子 T 由矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 所决定。而任何 n^2 个数 a_{ij} 由式(3.4.2)决定了一个线性算子 T，我们把 n 阶方阵 (a_{ij}) 称为线性算子 T 在规范正交系下的表示阵，即

$$a_{ij} = \langle Te_j, e_i \rangle$$

容易知道，在取定的规范正交基下，线性算子 T 和它的表示阵 (a_{ij}) 之间的这种对应关系是算子和 n 阶方阵之间的一一对应。

如果 $T=(a_{ij})_{n\times n}$，那末 $a_{ij}=\langle Te_j,e_i\rangle$，于是

$$\langle T^* e_j, e_i \rangle = \overline{\langle e_i, T^* e_j \rangle} = \overline{\langle Te_i, e_j \rangle} = \overline{a_{ji}}$$

因此 T^* 的表示阵 $\overline{a_{ji}}$ 就是 T 的表示阵 (a_{ij}) 的共轭阵(即先取转置，再对每个元素取复共轭)。由此可知，共轭算子是共轭矩阵概念的推广。

例 4 设 $L^2[a,b]$ 空间，T 是 Fredholm 型的积分算子

$$Tx(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s, x(s) \in L^2[a,b]$$

其中 $K(t,s)$ 是矩形：$[a,b]\times[a,b]$ 上的可测函数，而且 $|K(t,s)|^2$ 在 R 上可积，T 是 $L^2[a,b]$ 上的线性算子。

现在证明由下式定义的算子 T^* 是 T 的共轭算子

$$T^*x(t) = \int_a^b \overline{K(s,t)}x(s)\mathrm{d}s, x(s) \in L^2[a,b] \tag{3.4.3}$$

由于 $\overline{K(s,t)}$ 在 R 上可测而且绝对值平方可积，因此，由式(3.4.3)定义的算子 T^* 是有界线性算子。欲证明它确是 T 的共轭算子，只要证明 $\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle$ 成立。

事实上，对任意 $x,y\in L^2[a,b]$，$x=x(t)$，$y=y(s)$，显然 $x(t)$，$y(s)$ 在矩形上是绝对平方可积的，于是

$$\begin{aligned}\langle x, T^* y \rangle &= \int_a^b x(t) \overline{\int_a^b \overline{K(s,t)} y(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b\int_a^b K(s,t)x(t)\overline{y(s)}\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\ &= \int_a^b\int_a^b K(t,s)x(t)\overline{y(s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \langle Tx, y \rangle\end{aligned}$$

所以由式(3.4.3)定义的算子 T^* 是 T 的共轭算子。

习 题 三

1. 证明在 $C[a,b]$ 上定义的泛函

$$f(x) = \int_a^b x(t)y_0(t)\mathrm{d}t, y_0(t) \in C[a,b]$$

和

$$g(x) = \alpha x(a) + \beta y(b),\alpha,\beta \text{ 固定}$$

是线性的和有界的。

2. 在实赋范线性空间 $C[a,b]$ 上定义泛函 f，使得对任意 $x\in C[a,b]$，$f(x)=x(t_0)$，t_0 是闭区间 $[a,b]$ 上的固定点，证明 f 是有界线性泛函，并求 f 的范数 $\|f\|$。

3. 已知算子：$T_1:(\zeta_1,\zeta_2)\to(\zeta_1,0)$；$T_2:(\zeta_1,\zeta_2)\to(0,\zeta_2)$；$T_3:(\zeta_1,\zeta_2)\to(\zeta_2,\zeta_1)$；$T_4:(\zeta_1,\zeta_2)\to(r\zeta_1,r\zeta_2)$，试证 T_1,T_2,T_3 和 T_4 都是线性算子并指出它们在几何上表示的是什么？

4. 若 $C^1[0,1]$ 中任一元素 x 的范数定义为

$$\|x\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)| + \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|$$

并且 $C^1[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 上的微分算子 D 定义为

$$(Dx)(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\ (x\in C^1[0,1])。$$

证明 D 是有界线性算子。

5. 对于 $x=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots)\in l^2$，定义 l^2 上的左移算子 T_n 为

$$T_nx = (\zeta_{n+1},\zeta_{n+2},\cdots)$$

证明线性算子 $T_n:l^2\to l^2$ 是有界的且 $\|T_n\|=1$。

6. 设 X 和 Y 都是赋范线性空间，$T:X\to Y$ 是有界线性算子，且 T 是满射。若存在正数 b，使得对一切 $x\in X$ 皆有

$$\|Tx\| \geqslant b\|x\|$$

则 $T^{-1}:Y\to X$ 存在，它也是有界线性算子并且

$$\|T^{-1}\| \leqslant \frac{1}{b}$$

7. 设 X 是赋范线性空间，如果对任意 $f\in X^*$ 都有 $f(x)=f(y)$，证明 $x=y$。

8. 证明有限维赋范线性空间中的有界闭集是紧集；有界集是列紧集。

9. 设 X 和 Y 均是赋范线性空间，$T:X\to Y$ 是有界线性算子，如果 T 是双射，证明存在正数 a 和 b，使得对所有的 $x\in X$ 成立

$$a\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant b\|x\|$$

10. 设 X 和 Y 都 Banach 空间，则有界线性算子空间 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 在算子列强收敛的意义下是完备的。

11. 设 $\{x_n\}$ 弱收敛，证明 $\{\|x_n\|\}$ 有界。

12. 设 $\{\alpha_n\}$ 是一实数列，如果对 $\{x_n\}\subset l^2$，都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_nx_n$ 收敛，则 $\{\alpha_n\}\subset l^2$。

第四章　Banach 空间中的微分学

研究微分流形和非线性动力系统以及一般的目标泛函的最优化问题，往往要涉及抽象空间中微分学的概念。本章将介绍 Banach 空间中的 Fréchet 微分和 Gâteaux 微分的基本概念及性质，同时，简要叙述压缩映射原理并利用它来证明微分方程解的存在唯一性定理和隐函数定理，最后给出 Newton 法的一般形式。

§4.1　微分的概念

本节将介绍抽象空间中两种常用的微分概念，一种是 Fréchet 意义下的强微分，它是微积分学中全微分的概念和变分法中强变分概念的推广，是应用最多的一种微分概念，由于它定义成映射的线性主部，所以正好反映了将非线性问题线性化。

另一种是 Gâteaux 意义下的弱微分，它是微积分学中方向导数概念和变分法中弱变分概念的推广，它的特点是条件要求比较少，例如不必要求映射连续，甚至也不必要求定义空间赋范，因此适用范围很广，特别对于泛函用起来很方便。

我们先介绍 Fréchet 微分。

首先讨论一个自变量、三个因变量的向量值函数的情形。设

$$y = f(x)$$

其中，x 是实变量，而 $y=(y_1,y_2,y_3)^T$，$f(x)=(f_1(x),f_2(x),f_3(x))^T$，函数 $f(x)$ 的导数可以归结为各个坐标分量(实值函数)的导数。在点 x_0

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\begin{bmatrix}\dfrac{f_1(x_0+\Delta x)-f_1(x_0)}{\Delta x}\\ \dfrac{f_2(x_0+\Delta x)-f_2(x_0)}{\Delta x}\\ \dfrac{f_3(x_0+\Delta x)-f_3(x_0)}{\Delta x}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f'_1(x_0)\\ f'_2(x_0)\\ f'_3(x_0)\end{bmatrix} = f'(x_0)$$

这就是说，如果各个坐标分量在点 x_0 可导，则称此向量值函数在该点可导，其导数为由各坐标分量的导数所组成的一个向量。

类似地，向量值函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微，是指对于自变量 x 的任意改变量 Δx，因变向量 y 相应的改变量 Δy 总可以分解为线性主部和高阶部分

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

其中，常向量 $A=(a_1,a_2,a_3)^T$，$o(\Delta x)$ 按其属性来说也是一个向量，不过它的范数为 $\|\Delta x\|$ 的高阶无穷小量。于是就有微分表达式

$$\mathrm{d}y = A\mathrm{d}x$$

此处 $\mathrm{d}y=(\mathrm{d}y_1,\mathrm{d}y_2,\mathrm{d}y_3)^T$。同一元实值函数一样，可以证明对于一元向量值函数来说，可导⇔

可微，并且 $A=f'(x_0)$。

我们再来考察两个自变量，一个因变量的情形。设

$$y=f(x)$$

其中，$x=(x_1,x_2)^T$，它等价于二元函数

$$y=f(x_1,x_2)$$

如果在点 $x^0=(x_1^0,x_2^0)^T$，偏导数$\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2}$连续，则此二元函数可微。微分表达式可以写成如下形式

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,x_2^0)\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,x_2^0)\mathrm{d}x_2 \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,x_2^0),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,x_2^0)\right)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \mathrm{d}x_2\end{pmatrix} \end{aligned}$$

上式中的 1×2 矩阵，称为二元函数 $f(x)$ 在点 x^0 的 Jacobi 矩阵，又称它是这个向量值函数在该点的导数

$$f'(x^0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{x^0}$$

记自变向量 x 的微分 $\mathrm{d}x=\begin{bmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \mathrm{d}x_2\end{bmatrix}$，于是有微分表达式

$$\mathrm{d}y=f'(x^0)\mathrm{d}x$$

现在讨论两个自变量、三个因变量的情形。设

$$y=f(x)$$

其中，$x=(x_1,x_2)^T$；$y=(y_1,y_2,y_3)^T$；$f(x)=(f_1(x),f_2(x),f_3(x))^T$。这时先要定义向量值函数的偏导数，在点 $x^0=(x_1^0,x_2^0)^T$ 处，y 关于 x_1 的偏导数

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=\lim_{\Delta x_1\to0}\frac{f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0)-f(x_1^0,x_2^0)}{\Delta x_1}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\end{bmatrix}_{x^0}$$

同理

$$\frac{\partial y}{\partial x_2}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{x^0}$$

现在来定义微分：在点 x^0，如果对于自变向量 x 的任意改变量 Δx，因变向量 y 相应的改变量 Δy 总能分解为线性主部和高阶部分

$$\Delta y=L(x^0)\Delta x+o(\Delta x)$$

其中，$o(\Delta x)$是一个向量，其范数为 $\|\Delta x\|$ 的高阶无穷小量；$L(x^0)$为 $R^2\to R^3$ 的某个线性算子，则称 f 在 x^0 可微。于是同样有微分表达式

$$\mathrm{d}y=L(x^0)\mathrm{d}x$$

这个线性算子 $L(x^0)$ 称为 $y=f(x)$ 在 x^0 的导数，记为 $f'(x^0)$ 或 $\mathrm{d}f(x^0)$。这样，向量值函数的微分与一元实值函数的微分在形式上统一了起来

$$\mathrm{d}y = f'(x^0)\mathrm{d}x(\text{或 } \mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x^0)\mathrm{d}x)$$

更一般地，我们讨论 R^n 到 R^m 的映射的微分。

定义 1 设 $f:\Omega\to R^m$，Ω 是 R^n 中的开集，$x_0\in\Omega$。如果存在从 R^n 到 R^m 的线性算子 A，使得 $\forall\, h\in R^n\backslash\{0\}$，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{\| f(x_0+h)-f(x_0)-Ah\|}{\| h\|}=0 \tag{4.1.1}$$

或者当 $h\in R^n$，$x_0+h\in\Omega$ 时有

$$f(x_0+h)-f(x_0)-Ah=o(\| h\|) \tag{4.1.2}$$

其中 $o(\| h\|)/\| h\|\to 0(\| h\|\to 0)$，则称 f 在点 x_0 可微，其中线性算子 A 称为 f 在点 x_0 的导算子，记作 $f'(x_0)$，若 f 在 Ω 中每点可微，则称 f 在 Ω 中可微。

不难推出，$f'(x_0)$ 实际上就是矩阵(即 Jacobi 矩阵)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x_0}$$

Banach 空间中 Fréchet 导数的概念是上述导数概念的自然推广。

定义 2 设 X,Y 为实 Banach 空间，$f:\Omega\to Y$，其中 Ω 是 X 中的开集，$x_0\in\Omega$，如果存在有界线性算子 $A:X\to Y$，使得当 $h\in X$，$x_0+h\in\Omega$ 时，有

$$f(x_0+h)-f(x_0)-Ah=\omega(x_0,h) \tag{4.1.3}$$

其中 $\omega(x_0,h)=o(\| h\|)$，即

$$\lim_{\| h\|\to 0}\frac{\|\omega(x_0,h)\|}{\| h\|}=0 \tag{4.1.4}$$

则称映射 f 在 $x_0\in\Omega$ 是 Fréchet 可微的或可微的。这时称 A 为 f 在 x_0 的导算子，记作 $f'(x_0)$ 或 $\mathrm{d}f(x_0)$，而称 Ah 为 f 在 x_0 的 Fréchet 微分。

如果 f 在 Ω 内每点都可微，则 $\mathrm{d}f(x)=f'(x)$ 是 $x\in\Omega$ 到有界线性算子空间 $\mathscr{B}(X,Y)$ 中的映射，称其为 f 的导映射。

注意，尽管 f 只定义在 Ω 上，$f'(x_0)$ 却是定义在整个空间 X 上的有界线性算子。此外，尽管 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 都定义在 Ω 上，而它们的值域却属于完全不同的空间，即 $f:\Omega\to Y$，而 $f':\Omega\to\mathscr{B}(X,Y)$。

例 1 设有泛函

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\int_c x^2(t)\mathrm{d}t,\ x(t)\in L^2$$

则 $\varphi(x)$ 作为 L^2 上的泛函，它是 Fréchet 可微的。这是因为对 $\forall\, h\in L^2$，有

$$\begin{aligned}\varphi(x+h)-\varphi(x)&=\frac{1}{2}\int_c[x^2(t)+2x(t)h(t)+h^2(t)-x^2(t)]\mathrm{d}t\\&=\int_c x(t)h(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_c h^2(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

所以，$\varphi'(x)h=\int_c x(t)h(t)\mathrm{d}t=\langle x,h\rangle_{L^2}$，即 $\varphi'(x)=x$。

例 2 考察积分算子 $y=Tx$

$$y(s)=\int_0^1 K(s,t,x(t))\mathrm{d}t$$

我们把它看作由 $C[0,1]$ 到自己之中的算子。假设 $K(s,t,u)$ 在所考察的某区域中对于它的三个变元各有一阶连续导函数，这时

$$\int_0^1 K(s,t,x_0(t)+h(t))\mathrm{d}t-\int_0^1 K(x,t,x_0(t))\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1 [K_u(s,t,x_0(t))h(t)+\varepsilon(t)]\mathrm{d}t$$

其中，$\varepsilon(t)$ 是比 $\|h\|$ 高阶的无穷小量，从而

$$T'(x_0)h=\int_0^1 K'_u(s,t,x_0(t)h(t)\mathrm{d}t$$

即 $T'(x_0)$ 就是以 $\tilde{K}(s,t)\triangleq K'_u(x,t,x_0(t))$ 为核的线性积分算子。

现在我们介绍 Gâteaux 微分。设 X,Y 为实 Banach 空间，Ω 是 X 中的开集，$f:\Omega\to Y$，$x_0\in\Omega$。

定义 3 如果对任意的 $h\in X$，存在一个元素 $\delta(x_0,h)\in Y$，使得

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}-\delta f(x_0,h)\right\|=0 \tag{4.1.5}$$

则称 f 在点 x_0 是 Gâteaux 可微的，或弱可微的。元素 $\delta f(x_0,h)$ 叫做 f 在 x_0 的 Gâteaux 微分。

注意，t 要充分小，使得 $x_0+th\in\Omega$，否则式(4.1.5)就无意义了。可以看出，当 $x_0\in\Omega$ 固定，而让 h 变化时，Gâteaux 微分就定义了一个从 X 到 Y 的映射。特别是当 f 本身为线性映射时，就有 $\delta f(x_0,h)=f(h)$。

最常用这个定义的时候是 $Y=R^1$ 时，在这种情形，f 就是一个 X 上的实泛函。于是，若 f 是 X 上的实泛函，且其 Gâteaux 微分存在，则

$$\delta f(x,h)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x+th)\Big|_{t=0}$$

并且对于每一个固定的 $x\in X$，$\delta f(x,h)$ 是关于变元 $h\in X$ 的一个泛函。

例 3 考察 R^2 上的函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{当}(x,y)\neq(0,0)\text{时}\\ 0, & \text{当}(x,y)=(0,0)\text{时}\end{cases}$$

则 f 在点 $u_0=(0,0)$ 的 Gâteaux 微分存在，且对 $h=(h_1,h_2)$，有

$$\delta f(u_0,h)=\frac{h_1^2h_2}{h_1^2+h_2^2}$$

例 4 设 $f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个 n 元函实函数，且关于每个 x_i 都有连续偏导数，则 f 的 Gâteaux 微分是

$$\delta f(x,h)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}h_i.$$

§4.2 微分的基本性质

本节主要介绍 Fréchet 微分的基本性质及两种微分的关系。

定理 1 若映射 f 在 x 处有 Fréchet 微分，则它是唯一的。

证明 如果 $\mathrm{d}f(x)h$ 和 $\tilde{\mathrm{d}}f(x)h$ 都是映射 f 在 x 的 Fréchet 微分，则

$$\|\mathrm{d}f(x)h - \tilde{\mathrm{d}}f(x)h\| \leqslant \|f(x+h) - f(x) - \mathrm{d}f(x)h\| + \|f(x+h)-f(x)-\tilde{\mathrm{d}}f(x)h\|$$

或者

$$\|\mathrm{d}f(x)h - \tilde{\mathrm{d}}f(x)h\| = o(\|h\|)$$

因此，必有 $\mathrm{d}f(x)h=\tilde{\mathrm{d}}f(x)h$。

定理 2 若 f 在点 x_0 的 Fréchet 微分存在，则它在点 x_0 的 Gâteaux 微分亦存在，且两者相等。

证明 因为 f 在点 x_0 是 Fréchet 可微的，故存在有界线性算子 $A=f'(x_0)$，使得

$$f(x_0 + th) - f(x_0) = f'(x_0)(th) + o(th)$$

于是有

$$\lim_{t\to 0}\left\| \frac{f(t_0 + th) - f(x_0) - f^1(x_0)(th)}{t}\right\| = 0$$

因此，$\delta f(x_0,h)$ 存在且等于 $f'(x_0)h$。

对于 Fréchet 导数来说，有着与微积分学中普通导数的性质相同的性质，例如

(1)求导运算是线性的，即若 f、g 在 x 均可微，则有

$$\mathrm{d}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha\mathrm{d}f(x) + \beta\mathrm{d}g(x)$$

其中，α、β 为常数。

(2)常映射的导算子是 0，即对任何 $x\in X$ 都有 $f(x)=y_0$，$y_0\in Y$ 是固定的元素，则对于 $x\in X$ 都有 $\mathrm{d}f(x)=0$(即零算子)。

(3)有界线性算子的导算子即为其自身，即若

$$f(x) = Ax, A \in \mathscr{B}(X,Y)$$

则对任何 $x\in X$ 都有

$$\mathrm{d}f(x) = A$$

此外，还有所谓的"链式规则"：

定理 3 设 X,Y,Z 都是实的 Banach 空间，$g:X\to Y$ 在 x 可微，$f:Y\to Z$ 在 $y=g(x)$可微，则复合映射 $f\circ g:X\to Z$，即

$$(f\circ g)(x) = f(g(x))$$

在 x 可微，即并且

$$\mathrm{d}(f\circ g)(x) = [\mathrm{d}f(y)]\cdot[\mathrm{d}g(x)]$$

证明 按定义，对 $h\in X$，$k\in Y$

$$g(x + h) - g(x) - [\mathrm{d}g(x)]h = \omega(x,h) = o(\|h\|)$$
$$f(y + h) - f(y) - [\mathrm{d}f(x)]k = \theta(y,k) = o(\|k\|)$$

现取 $k=[\mathrm{d}g(x)]h+\omega(x,h)$，由于 $\mathrm{d}g(x)$有界线性，故当 $\|h\|\to 0$ 时，$\|k\|\to 0$。又由 $\mathrm{d}f(y)$有界线性，得

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x - h) &= f(g(x + h))\\ &= f(y + k) = f(y) + [\mathrm{d}f(y)]k + \theta(y + k)\\ &= (f\circ g)(x) + [\mathrm{d}f(y)]\cdot[\mathrm{d}g(x)]\cdot h + [\mathrm{d}f(y)]\omega(x,h) + \theta(y,k)\end{aligned}$$

因为$[\mathrm{d}f(y)]\omega(x,h)+\theta(y,k)=o(\|h\|)$，故上述说明 $f\circ g$ 在 x 可微，且其微分等于

$[df(y)]\cdot[dg(x)]h$。

下面给出一个类似于通常的微分中值定理的结果。

定理 4 设 $f:[a,b]\to X$ 是 Fréchet 可微的，取 Δx，使 $x_0+\Delta x\in[a,b]$，则有下列不等式成立

$$\| f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\| \leqslant \sup\{\| f'(\xi)\| \mid \xi = x_0+\theta\Delta x, 0<\theta<1\}\cdot\|\Delta x\|$$

证明 根据 Hahn—Banach 定理的推论，存在 $F\in X^*$，满足

$$\| F\| = 1$$

$$F(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)) = \| f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\|$$

考察实变量 t 的实值函数

$$\varphi(t) = F(f(x_0+t\Delta x))$$

固定 $\Delta x\in X$ 而把 t 看作自变量，则由链式规则并注意到$\frac{d}{dt}(x_0+t\Delta x)=\Delta x$，得

$$\varphi'(t) = F(f'(x_0+t\Delta x))\Delta x$$

再利用通常的微分中值公式

$$\varphi(1)-\varphi(0) = \varphi'(\theta)\quad(0<\theta<1)$$

得

$$\begin{aligned}F(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)) &= F(f(x_0+\Delta x))-F(f(x_0))\\ &= \varphi(1)-\varphi(0) = \varphi'(\theta)\\ &= F(f'(x_0+\theta\Delta x))\Delta x\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\| f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\| &= F(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))\\ &= F(f'(x_0+\theta\Delta x))\Delta x\\ &\leqslant \| F\|\,\| f'(x_0+\theta\Delta x)\|\,\|\Delta x\|\\ &\leqslant \{\sup_{\substack{\xi=x_0+\theta x\\ 0<\theta<1}}\| f'(\xi)\|\}\,\|\Delta x\|\end{aligned}$$

我们用 $X=\prod_{i=1}^{n}X_i$ 表示由 n 个 Banach 空间 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 构成的乘积空间，X 也是 Banach 空间，即是说，对 $x\in X$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中 $x_i\in X_i(i=1,2,,\cdots,n)$。

定理 5 设 Ω 是 X 的开子集，$Y=\prod_{i=1}^{n}Y_i$，$f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$，其中 $f_i:\Omega\to Y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是可微映射，则 f 也是可微的，且

$$f'(x) = (f'_1(x),f'_2(x),\cdots,f'_n(x))$$

我们把证明留给读者，这里的证明与有限维情形相同。

§4.3 偏导数与高阶导数

设 $X=\prod_{i=1}^{n}X_i$，$\Omega=\prod_{i=1}^{n}\Omega_i$，其中 Ω_i 是 Banach 空间 X_i 的开子集$(i=1,2,3,\cdots,n)$。对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega$，其中 $x_i\in\Omega_i$，映射 $f:\Omega\to Y$ 关于 x_i(Fréchet)偏导数 $d_if(x)$定义如下。

如果展开式

$$f(x_1,\cdots,x_i+h,\cdots,x_n)-f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n) = \beta(h)+o(\| h\|)$$

成立，其中 $\beta(h)=A_ih$，$A_i\in\mathscr{B}(X_i,Y)$，我们就称 A_i 为 f 关于 x_i 的偏导数，记作 $A_i=\mathrm{d}_if(x)$ 或 $f_{x_i}(x)$。

类似于多元函数的全微分公式，我们有

$$\mathrm{d}f(x)h=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}_if(x)h_i$$

其中，$h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)\in X$，$h_i\in X_i$，而 $\mathrm{d}f(x)$，$\mathrm{d}_if(x)$ 被假定是存在的。

为了介绍高阶导数，我们先引进下面的记号和概念。

设 $X=\prod_{i=1}^{n}X_i$，$f:X\to Y$，这里每个空间都假定为实 Banach 空间。如果对每一个元素 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，及每一个整数 $k=1,2,\cdots,n$，映射 f 关于 x_i 是线性的（其他变量固定），则称 f 是多重线性算子。

连续的多重线性算子 $f:\prod_{i=1}^{n}X_i\to Y$ 的全体记作 $\mathscr{B}(X_1,X_2,\cdots,X_n;Y)$。可以证明，在范数

$$\|f\|=\sup\left\{\frac{\|f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|}{\|x_1\|\,\|x_2\|\cdots\|x_n\|}\right\}$$

之下，$\mathscr{B}(X_1,X_2,\cdots,X_n;Y)$ 是一个 Banach 空间。

当 $X_1=X_2=\cdots=X_n$ 时，我们把 $\mathscr{B}(X_1,X_2,\cdots,X_n;Y)$ 记作 $\mathscr{B}_n(X,Y)$。可以证明，Banach 空间 $\mathscr{B}(X_1,X_2;Y)$ 与 $\mathscr{B}(X_1,\mathscr{B}(X_2,Y))$ 在线性等距的意义下是恒同的。

多重线性型 $f(h_1,h_2,\cdots,h_n)\in\mathscr{B}_n(X,Y)$ 称为对称的是指：指数 $(1,2,\cdots,n)$ 在一切排列 $\sigma(1,2,\cdots,n)$ 之下，f 保持不变。

现在定义 f 的二阶 Fréchet 导数。设 Ω 是 X 中的开集，$f:\Omega\to Y$ 是 Fréchet 可微的。

如果一阶导数 $f':\Omega\to\mathscr{B}(X,Y)$ 是 Fréchet 可微的，则称 f 是在 Ω 上二次可微的。$f'(x)$ 的导数 $f''(x)\in\mathscr{B}(X,\mathscr{B}(X,Y))=\mathscr{B}_2(X\to Y)$。

我们说 $f\in C^2(\Omega,Y)$ 是指：f 在每一点 $x\in\Omega$ 处是二次 Fréchet 可微的，并且二阶导数 $f'':\Omega\to\mathscr{B}_2(X,Y)$ 连续。

由归纳法可定义 n 阶 Fréchet 导数 $f^{(n)}(x)\in\mathscr{B}_n(X,Y)$。$f\in C^n(\Omega,Y)$ 是指：$\forall\ x\in\Omega$，f 是 n 次 Fréchet 可微的，且 $f^{(n)}(x):\Omega\to\mathscr{B}_n(X,Y)$ 是连续的。

定理 1（Taylor 公式） 设 $f\in C^n(\Omega,Y)$，则

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)h^{n-1}+R_n(x_0,h)\quad(4.3.1)$$

其中

$$\begin{aligned}R_n(x_0,h)&=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1(1-s)^{n-1}f^{(n)}(x_0+sh)h^n\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n+o(\|h^n\|)\end{aligned}$$

证明 用归纳法。$n=1$ 时，我们任取连续线性泛函 $y^*\in Y^*$，由 §4.2 定理 2 知，Fréchet 导数与 Gâteaux 导数一致，故有

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y^*f(x_0+th)\mathrm{d}t&=\int_0^1y^*(\delta f(x_0+th,h))\mathrm{d}t\\&=y^*\left(\int_0^1\delta f(x_0+th,h)\mathrm{d}t\right)\\&=y^*\left(\int_0^1f'(x_0+th)h\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

而

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y^*(f(x_0+th))\mathrm{d}t = y^*(f(x_0+h)-f(x_0))$$

由 y^* 的任意性即得

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\int_0^1 f'(x_0+sh)h\mathrm{d}s$$

下面要证

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n+R_{n+1}(x_0,h) \qquad (4.3.2)$$

其中，$R_{n+1}(x_0,h)=\frac{1}{n!}\int_0^1(1-\delta)^n f^{(n-1)}(x_0-sh)h^{n+1}\mathrm{d}s$。

为此，对 $f'(x)$ 应用公式(4.3.1)：

$$f'(x_0+th)=f'(x_0)+f''(x_0)(th)+\cdots+\frac{1}{(n-1)}f^{(n)}(x_0)(th)^{n-1}+R_n^0(th)$$

其中

$$R_n^0(th)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t(1-s)^{n-1}f^{(n+1)}(x_0+sth)(th)^n\mathrm{d}s$$

于是，有

$$\begin{aligned}f(x_0+h)-f(x_0)&=\int_0^1 f'(x_0+th)h\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i!}f^{(i+1)}(x_0)\cdot(th)^i+R_n^0(th)\right\}h\mathrm{d}t\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)h^i+\int_0^1 h\cdot R_n^0(th)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

经过变量替换及交换积分顺序，上述余项可以写成

$$\begin{aligned}\int_0^1 R_n^0(th)h\mathrm{d}t&=\int_0^1\left\{\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1(1-s)^{n-1}f^{(n+1)}(x_0+sth)(th)^n\mathrm{d}s\right\}h\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\mathrm{d}t\int_0^1\left\{\frac{1}{(n-1)!}(t-ts)^{n-1}f^{(n+1)}(x_0+tsh)h^{n+1}\right\}\mathrm{d}(ts)\\&=\int_0^1\mathrm{d}t\left\{\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t(t-s)^{n-1}f^{(n+1)}(x_0+sh)h^{n+1}\mathrm{d}s\right\}\\&=\int_0^1\frac{1}{(n-1)!}f^{(n+1)}(x_0+sh)h^{n+1}\mathrm{d}s\int_s^1(t-s)^{n-1}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{n!}\int_0^1(1-s)^n f^{(n+1)}(x_0+sh)h^{n+1}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

这样式(4.3.2)得证，归纳法完成。

公式(4.3.1)是古典分析中 Taylor 公式的推广，它说明 n 阶连续可导的映射 f 能够用 n 次多项式进行 n 阶逼近。

§4.4 压缩映射原理与隐函数定理

在代数方程、微分方程、积分方程及其他各类方程的理论中，常把解的存在性和唯一性问题归结为度量空间中某类映射的不动点，再用逐次逼近法求出方程的近似解，并作出它的误差

估计式。各种不同类型方程的逐次逼近法，经过抽象、概括，从而导出了泛函分析中的压缩映射原理(亦称 Banach 不动点定理)。法国数学家 H. Poincaré 在代数拓扑中首先使用不动点概念，而波兰数学家 Banach 一般地处理了这个问题。半个世纪以来，人们一直从事不动点原理的研究，在理论上和实际应用中都取得了许多重要的结果。

本节将介绍压缩映射原理，同时还利用压缩映射原理来证明微分方程解的存在唯一性定理和 Banach 空间中的隐函数定理。

定义 1 设 X 为一非空集合，$T:X\to X$ 是一个映射。如果有 $x^*\in X$，使得

$$Tx^* = x^*$$

则称 x^* 为映射 T 的一个不动点。

定义 2 设 X 是赋范线性空间，T 是 X 到 X 的一个映射，如果存在常数 $0<\alpha<1$，使得对一切 $x,y\in X$，有

$$\|Tx-Ty\| \leqslant \alpha\|x-y\| \tag{4.4.1}$$

则称 T 是 X 上的一个压缩映射。

压缩映射显然是连续的，α 称为压缩常数。

定理 1(压缩映射原理) Banach 空间中的压缩映射必有唯一的不动点。

证明 设 X 是 Banach 空间，$T:X\to X$ 是压缩映射。我们将构造一个序列 $\{x_n\}$，证明它是 X 中的 Cauchy 序列，于是 $\{x_n\}$ 在 X 中收敛，然后再证明这序列的极限 x^* 是 T 的不动点，并且证明 T 没有其他的不动点。

任意取一点 $x_0\in X$ 作初始值，构造下面的迭代序列

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \cdots, x_n = T^nx_0, \cdots \tag{4.4.2}$$

于是得到 X 中的一个点列 $\{x_n\}$。

根据式(4.4.1)和式(4.4.2)，有

$$\begin{aligned}\|x_{m+1}-x_m\| &= \|Tx_m - Tx_{m-1}\| \leqslant \alpha\|x_m - x_{m-1}\| \\ &= \alpha\|Tx_{m-1}-Tx_{m-2}\| \leqslant \alpha^2\|x_{m-1}-x_{m-2}\| \\ &\leqslant \cdots \leqslant \alpha^m\|x_1 - x_0\|\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

于是，再应用三角不等式及等比级数和的公式，我们得到($n>m$)

$$\begin{aligned}\|x_m - x_n\| &\leqslant \|x_m - x_{m+1}\| + \|x_{m+1}-x_{m+2}\| + \cdots \|x_{n-1} - x_n\| \\ &\leqslant (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1})\|x_0 - x_1\| \\ &= \frac{\alpha^m(1-\alpha^{n-m})}{1-\alpha}\|x_0 - x_1\|\end{aligned}$$

因为 $0<\alpha<1$，故 $1-\alpha^{n-m}<1$，于是有

$$\|x_m - x_n\| \leqslant \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\|x_0 - x_1\| \qquad (n>m) \tag{4.4.4}$$

由此可知，当 $m,n\to\infty$ 时，$\|x_m - x_n\|\to 0$，因此 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列，由于 X 完备，故 $x_n\to x^*\in X$。

因为压缩映射 T 是连续的，故有 $Tx_n\to Tx^*$。但是 $Tx_n = x_{n+1}\to x^*$，又因为收敛点列 $\{Tx_n\}$ 的极限是唯一的，故必有 $Tx^* = x^*$。因此 x^* 是 T 的不动点。

假设 $\bar{x}$ 也是 T 的不动点：$T\bar{x}=\bar{x}$，则有

$$\|x^* - \bar{x}\| = \|Tx^* - T\bar{x}\| \leqslant \alpha\|x^* - \bar{x}\|$$

但 $0<\alpha<1$，欲要上式成立，必须 $\|x^* - \bar{x}\| = 0$，故 $x^* = \bar{x}$

必须指出，空间的完备性条件，只是为了保证 T 的不动点存在。至于不动点的唯一性，则是直接从 T 的压缩性得到的，并不要假设空间是完备的。

压缩映射原理是最简单的不动点定理，它不但证明了不动点的存在性与唯一性，同时还提供了求不动点的方法—迭代法。就是说，在 Banach 空间中，从任意选取的一个"初始值"x_0 出发，逐次作点列 $x_n=Tx_{n-1}(n=1,2,\cdots)$，这个点列必然收敛到方程 $Tx=x$ 的解。因此，这种方法叫做逐次逼近法。

在式(4.4.4)中令 $n\to\infty$，就得到误差估计

$$\| x_m - x^* \| \leqslant \frac{\alpha^m}{1-\alpha} \| x_0 - x_1 \| \tag{4.4.5}$$

从应用的角度来看，映射 T 往往不是在整个空间 X 上具有压缩性，而仅仅在一个闭球上具有压缩性，则也可有相应的结果。

定理 2 设 T 是 Banach 空间 X 到自身的一个映射。假设 T 在闭球 $E=\{x\in X \mid \| x-x_0 \| \leqslant r\}$ 上是压缩的，即是说，对一切 $x,y\in E$，T 满足式(4.4.1)，并设

$$\| x_0 - Tx \| < (1-\alpha)r \tag{4.4.6}$$

则迭代序列(4.4.2)收敛于一点 $x^*\in E$，而 x^* 就是 T 的唯一不动点。

现在利用压缩映射原理证明一个关于逆算子的摄动定理。

定理 3 设 X、Y 是 Banach 空间，有界线性算子 $T_0:X\to Y$ 是可逆的，$\Delta T:X\to Y$ 是线性算子，且 $\| \Delta T \| < \dfrac{1}{\| T_0^{-1} \|}$，则算子 $T=T_0+\Delta T$ 是可逆的。

证明 设 $y=Tx=T_0x-\Delta Tx$，在等式两端用 T_0^{-1} 作用之

$$T_0^{-1}y = x + T_0^{-1}\Delta Tx \tag{4.4.7}$$

这里 $A:X\to X$，且 $\| A \| = \| T_0^{-1} \| \cdot \| \Delta T \| < 1$，因为令 $z=T_0^{-1}y$，$A=T_0^{-1}\Delta T$，则(4.4.7)式可写为

$$z = x + Ax$$

由此知映射 $x'=z-Ax$ 是空间 X 到自身的压缩映射，因此映射有唯一的不动点，它就是方程(4.4.7)的唯一解，这正说明 T 有逆算子。

下面我们给出几个例子，以说明压缩映射原理的应用。

例 1 设有微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y),\ y|_{x=x_0} = y_0 \tag{4.4.8}$$

其中，$f(x,y)$ 在全平面连续，且关于 y 满足 Lipschitz 条件

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2| \qquad (L \text{ 为常数})$$

则过点 (x_0,y_0) 微分方程(4.4.8)有一条且只有一条积分曲线。

证明 微分方程(4.4.8)等价于求解下列积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\mathrm{d}t \tag{4.4.9}$$

取 $\delta>0$，使得 $L\delta<1$，$C[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 表示闭区间 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上全体连续函数，定义映射 T

$$T:C[x_0-\delta,x_0+\delta] \to C[x_0-\delta,x_0+\delta]$$

或

$$T:y(x) \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t,y(t)]\mathrm{d}t$$

则 $Ty(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))\mathrm{d}t$ 在区间$[x_0-\delta,x_0+\delta]$上连续，所以

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(Ty_1,Ty_2) &= \max_{|x-x_0|<\delta}\left|\int_0^x\{f[t,y_1(t)]-f[t,y_2(t)]\}\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \max_{|x-x_0|<\delta}\left|\int_{x_0}^{x}L|y_1(t)-y(t)|\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant L\delta\max_{|x-x_0|<\delta}|y_1(t)-y_2(t)| = L\delta\mathrm{d}(y_1,y_2)
\end{aligned}$$

由于 $L\delta<1$，故 T 是压缩映射。又空间$C[x_0-\delta,x_0+\delta]$在上述度量意义下是完备的，根据压缩映射原理，存在唯一的连续函数 $y^*(x)$，满足

$$y^*(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y^*(t))\mathrm{d}t$$

于是 $y^*(x)$是微分方程(4.4.8)通过点(x_0,y_0)唯一的积分曲线。重复应用压缩映射原理，就可以将微分方程(4.4.8)解的存在唯一性问题从$[x_0-\delta,x_0+\delta]$延拓到整个数轴上。

从例 1 可以概括出一条重要定理，即微分方程的存在唯一性定理。

定理 4 设微分方程的初值问题(4.4.8)满足：(1)$f(x,y)$在全平面连续；(2)$f(x,y)$关于 y 满足 Lipschitz 条件，即

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2| \quad L \text{ 为常数}$$

那么，方程(4.4.8)的解在整个数轴上即$(-\infty,+\infty)$是存在唯一的，且满足初值条件即

$$y|_{x=x_0}=y_0$$

以上定理还可以推广到微分方程组的情形。

考虑一阶微分方程组的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=f_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ x_i(t_a)=x_i\end{cases}\tag{4.4.10}$$

令

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{bmatrix},f(t,x)=\begin{bmatrix}f_1(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)\\f_2(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \vdots\\f_n(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{bmatrix},x^{(0)}=\begin{bmatrix}x_{10}\\x_{20}\\ \vdots\\x_{n0}\end{bmatrix}$$

于是，方程组(4.4.10)可写成如下的向量形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x)\\ x(t_0)=x^{(0)}\end{cases}\tag{4.4.11}$$

我们利用压缩映射原理，仿照例 1 类似的方法，可以证明方程组(4.4.11)解的存在唯一性问题。

定理 5 设方程组(4.4.11)的右端函数 $f(t,x)$在 $n+1$ 维空间的区域

$$R^{n+1}:|t-t_0|\leqslant a,\ \|x-x^{(0)}\|\leqslant b$$

上满足：

(1)连续，记 $M=\max\limits_{(t,x)\in R^{n+1}}\|f(t,x)\|$，$h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$；

(2)关于 x 满足 Lipschitz 条件，即存在常数 $L>0$，使对于 R^{n+1}的任意两点$(t,x^{(1)})$，$(t,$

$x^{(2)}$)有

$$\| f(t,x^{(1)}) - f(t,x^{(2)}) \| \leqslant L \| x^{(1)} - x^{(2)} \|$$

则方程组(4.4.12)在$|t-t_0|\leqslant h$上存在唯一的满足初值条件

$$x(t_0) = x^0$$

的连续解

$$x=\Phi(t)$$

定理5是局部性的定理，它只肯定了解在区间$|t-t_0|\leqslant h\left(h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right)\right)$上存在。仅仅知道解的局部存在，在大多数情况下是不能满足需要的。因此，自然就提出了将解的存在区间加以扩大的问题。这里不加证明，仅给出解的延拓定理。

定理6 如果方程组(4.4.11)的右端函数$f(t,x)$在区域$G\subset R^{n+1}$内连续，且在G内关于x满足局部的Lipschitz条件，则方程组(4.4.11)通过G内的任一点$(t_0,x^{(0)})$的解$x=\Phi(t)$可以向左右延拓。

(1)当G为有界时，解$x=\Phi(t)$可以延拓到使点$(t,\Phi(t))$任意接近区域G的边界。

(2)当G为无界时，以向t增大一方延拓来说，解$x=\Phi(t)$可以延拓到区间$[t_0,+\infty]$，或延拓到区间$[t_0,m)$，(其中m为有限数)且当$t\to m$时，或者$x=\Phi(t)$无界，或者点$(t,\Phi(t))$趋于区域G的边界。

解的存在唯一性定理是微分方程近似求解的前提和理论基础；同时，它也揭示了解对初值的连续依赖性和可微性，对这一问题的研究，在理论上和应用上都有十分重要的意义。参看[6]。

例2 设$f(s)$是$[a,b]$区间上的已知函数，核$K(s,t)$为正方形$a\leqslant s\leqslant b,a\leqslant t\leqslant b$上已知连续函数，存在常数$M>0$，使得

$$\int_a^b |K(s,t)|\mathrm{d}t \leqslant M < +\infty$$

则当$|\lambda|<\frac{1}{M}$时，必有唯一的$\varphi(s)\in C[a,b]$，满足Fredholm积分方程

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

证明 设$C[a,b]$是以度量为d的完备度量空间，在其上定义映射$T:C[a,b]\to C[a,b]$，亦即

$$T:\varphi(s) \to f(s) + \lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t, \text{记 } \alpha = M|\lambda|$$

则$\alpha<1$，对于任意$\varphi_1,\varphi_2\in C[a,b]$，有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(T\varphi_1,T\varphi_2) &= \max_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\left[f(s) + \lambda\int_a^b K(s,t)\varphi_1(e)\mathrm{d}t\right] - \left[f(s) + \lambda\int_a^b K(s,t)\varphi_2(t)\mathrm{d}t\right]\right| \\ &\leqslant |\lambda|M\max_{a\leqslant s\leqslant b}|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| = \alpha\mathrm{d}(\varphi_1,\varphi_2) \end{aligned}$$

所以T是$C[a,b]$中的压缩映射，再由$C[a,b]$的完备性，根据压缩映射原理，必有唯一解$\varphi^*(s)$满足Fredholm积分方程。

例3 设$K(t,s)$在$a\leqslant t\leqslant b,a\leqslant s\leqslant b$上连续，$f(t)\in C[a,b]$，$\lambda$是常数，则Volterra积分方程

$$x(t) = f(t) + \lambda\int_a^t K(t,s)x(s)\mathrm{d}s$$

在$[a,b]$上存在唯一的连续函数解。

证明 令映射 $T:C[a,b]\to C[a,b]$，使得

$$Tx(t)=f(t)+\lambda\int_a^t K(t,s)x(s)\mathrm{d}s$$

以下证 T^n 是压缩映射。任取 $x_1(t),x_2(t)\in C[a,b]$，

$$\begin{aligned}|Tx_1-Tx_2| &= |\lambda|\left|\int_a^t K(t,s)[x_1(s)-x_2(s)]\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant |\lambda|M\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_1(s)-x_2(s)|(t-a) \\ &= |\lambda|M\mathrm{d}(x_1,x_2)(t-a)\end{aligned}$$

其中，$M=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|K(t,s)|$。应用归纳法证明

$$|T^nx_1-T^nx_2|\leqslant\frac{|\lambda|^nM^n\mathrm{d}(x_1,x_2)(t-a)^n}{n!}$$

于是

$$|T^nx_1-T^nx_2|\leqslant\frac{|\lambda|^nM^n\mathrm{d}(x_1,x_2)(b-a)^n}{n!}$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\lambda|^nM^n(b-a)^n}{n!}=0$$

故 n 足够大时可使 $\frac{|\lambda|^nM^n(b-a)^n}{n!}\leqslant\alpha<1$。因此 T 在 $C[a,b]$ 中有唯一的不动点，即 Volterra 积分方程在 $[a,b]$ 中存在唯一的连续函数解。

例 4 设 $F(x,y)$ 在带状区域：$a\leqslant x\leqslant b,-\infty<y<+\infty$ 中处处连续，且处处有关于 $F_y'(x,y)$ 存在。如果还存在常数 l 和 L，满足

$$0<l\leqslant F'_y(x,y)\leqslant L$$

则方程 $F(x,y)=0$ 在区间 $[a,b]$ 上必有唯一的连续函数 $y=\varphi(x)$，使得

$$F(x,\varphi(x))\equiv 0,x\in[a,b]$$

证明 根据题意要求，考虑在完备的度量空间 $C[a,b]$ 上定义映射 T，使对任意的函数 $\varphi(x)\in C[a,b]$，有

$$(T\varphi)(x)=\varphi(x)-\frac{1}{L}F(x,\varphi(x))$$

由于 $F(x,y)$ 是连续的，故 $(T\varphi)(x)$ 也连续，所以 T 是 $C[a,b]\to C[a,b]$ 的映射。

再证 T 是压缩映射。

任取 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)\in C[a,b]$，根据微分中值定理，存在 $0<\theta<1$，有

$$\begin{aligned}|(T\varphi_2)(x)-(T\varphi_1)(x)| &= \left|\varphi_2(x)-\frac{1}{L}F(x,\varphi_2)-\varphi_1+\frac{1}{L}F(x,\varphi_1)\right| \\ &= \left|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)-\frac{1}{L}F'_y(x,\varphi_1(x)+\theta(\varphi_2(x)\right. \\ &\quad \left.-\varphi_1(x))(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))\right| \\ &\leqslant\left(1-\frac{l}{L}\right)|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|\end{aligned}$$

由于令 $\alpha=1-\frac{l}{L}$，则有 $0<\alpha<1$ 且

$$|T\varphi_2-T\varphi_1|\leqslant\alpha|\varphi_2-\varphi_1|$$

即知

$$d(T\varphi_1, T\varphi_2) \leqslant \alpha d(\varphi_2, \varphi_1)$$

故存在唯一的 $\varphi^*(x)\in C[a,b]$，使得 $(T\varphi^*)(x)$，即 $F[x,\varphi^*(x)]=0, x\in[a,b]$。

最后我们讨论 Banach 空间中的隐函数定理，它是微分理论中最重要的定理之一。

设 X,Y 为实 Banach 空间，$\Omega\subset X\times R^1$ 是开集，$f: \Omega\to Y$。我们常常需要求出满足方程 $f(x,\lambda)=0$ 的所有点 (x,λ)，特别是当 (x_0,λ_0) 满足 $f(x_0,\lambda_0)=0$ 时，我们希望找到 x_0 的邻域 U 和 λ_0 的邻域 V，以及连续映射 $\Phi: V\to U$ 使得 $\Phi(\lambda_0)=x_0$，且当 $\lambda\in V$ 时，$f(\Phi(\lambda),\lambda)=0$，这样的 Φ 就叫做方程 $f(x,\lambda)=0$ 下的局部隐函数。

定理 7（隐函数定理） 设 X,Y 是实 Banach 空间，$\Omega\subset X\times R^1$ 是开集，$(x_0,\lambda_0)\in\Omega$，设 $f:\Omega\to Y$ 连续，f 对变元 x 可微，且导映射 $f'_x(x,\lambda)$ 在 (x_0,λ_0) 连续。

设 $f'_x(x_0,\lambda_0): X\to Y$ 有有界逆，则存在函数 r 和 δ，使当 $|\lambda-\lambda_0|<\delta$ 时，方程

$$f(x,\lambda) = 0 \tag{4.4.12}$$

$$f(x_0,\lambda_0) = 0 \tag{4.4.13}$$

在 $\|x-x_0\|\leqslant r$ 内存在唯一连续解。

证明 由于逆算子 $[f'_x(x_0,\lambda_0)]^{-1}$ 有界，故存在 $M>0$，使得 $\|f'_x(x_0,\lambda_0)^{-1}\|\leqslant M$，再由 $f'_x(x,\lambda)$ 在 (x_0,λ_0) 连续知，存在正数 r 和 δ，使当 $\|x-x_0\|\leqslant r$，$|\lambda-\lambda_0|<\delta$ 时，

$$\|f'_x(x,\lambda) - f'_x(x_0,\lambda)\| < \frac{1}{2M}$$

因 $f(x_0,\lambda)$ 连续，还可要求 δ 满足：当 $|\lambda-\lambda_0|<\delta$ 时，$\|f(x_0,\lambda)\|<\dfrac{r}{2M}$

下面证明当 $|\lambda-\lambda_0|<\delta$ 时，映射

$$g(x,\lambda) \triangleq x - [f'_x(x_0,\lambda_0)]^{-1}f(x,\lambda)$$

在 $\|x-x_0\|\leqslant r$ 内存在唯一不动点，它当然是方程(4.4.12)的解。

因为当 $\|x-x_0\|\leqslant r$ 时，

$$\begin{aligned}\|g'_x(x,\lambda)\| &= \|I - [f'_x(x_0,\lambda_0)]^{-1}f'_x(x,\lambda)\| \\ &\leqslant \|[f'_x(x_0,\lambda_0)]^{-1}\| \cdot \|f'_x(x,\lambda) - f'_x(x_0,\lambda_0)\| < \frac{1}{2}\end{aligned}$$

故映射 $g(x,\lambda)$ 在球 $\|x-x_0\|\leqslant r$ 上压缩，因为

$$\|g(x_0,\lambda) - x_0\| \leqslant \|[f'_x(x_0,\lambda_0)]^{-1}\|\ \|f(x_0,\lambda)\| \leqslant \frac{r}{2}$$

$$\|g(x,\lambda) - g(x_0,\lambda)\| \leqslant \sup_{\|x-x_0\|<r}\|g'_x(x,\lambda)\| \cdot \|x - x_0\| \leqslant \frac{1}{2}\|x - x_0\| \leqslant \frac{r}{2}$$

所以，当 $\|x-x_0\|\leqslant r$，有

$$\|g(x,\lambda) - x_0\| \leqslant \|g(x,\lambda) - g(x_0,\lambda) + g(x_0,\lambda) - x_0\| < r$$

这表明 g 映球 $\|x-x_0\|\leqslant r$ 到自身。根据定理 2，g 在球 $\|x-x_0\|\leqslant r$ 内存在唯一不动点 $x=\Phi(\lambda)$，并且此不动点必属于开球 $\|x-x_0\|<r$ 之内，满足 $x_0=\Phi(\lambda_0)$。

最后证 $x=\Phi(\lambda)$ 在 $|\lambda-\lambda_0|<\delta$ 内连续，任取 λ_1,λ_2，$|\lambda-\lambda_i|<\delta(i=1,2)$。记 $x_1=\Phi(\lambda_1)$，$x_2=\Phi(\lambda_2)$，且 x_1,x_2 在球 $\|x-x_0\|<r$ 内，于是

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2\| &= \|g(x_1,\lambda_1) - g(x_2,\lambda_2)\| \\ &\leqslant \|g(x_1,\lambda_1) - g(x_2,\lambda_1)\| + \|g(x_2,\lambda_1) - g(x_2,\lambda_2)\| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| + \|g(x_2,\lambda_1) - g(x_2,\lambda_2)\|\end{aligned}$$

故得

$$\|\Phi(\lambda_1)-\Phi(\lambda_2)\| = \|x_1-x_2\| \leqslant 2\|g(x_2,\lambda_1)-g(x_2,\lambda_2)\|$$

因为 $g(x,\lambda)$连续，故当 $\lambda_1\to\lambda_2$ 时，上式后端趋于零，因而 $\Phi(\lambda)$在$|\lambda-\lambda_0|<\delta$ 连续。

如果上述定理中补充假设 $f\in C^N$，$N>1$，则隐函数 $x=\Phi(\lambda)$在某个$|\lambda-\lambda_0|<\delta$ 内也具有 N 阶连续的导数。

§4.5 Newton 法

Newton 法是求解形如 $F(x)=0$ 的方程的迭代方法。它适用于单变量的实值方程，但是它可以直接推广到 Banach 空间中去，用以求解某些非线性方程。

我们以一元实函数方程的情形为例，说明 Newton 法的基本思想。如图 4.1 所示，设有方程 $F(x)=0$，我们在给定点 x_1 处，用过$(x_1,F(x_1))$点的切线来逼近曲线，而取该切线与 x 轴交点作为方程 $F(x)=0$ 的一个近似解，从这个新点出发，重复上述过程，就可以得到一个递推关系

$$x_{n+1}=x_n-\frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

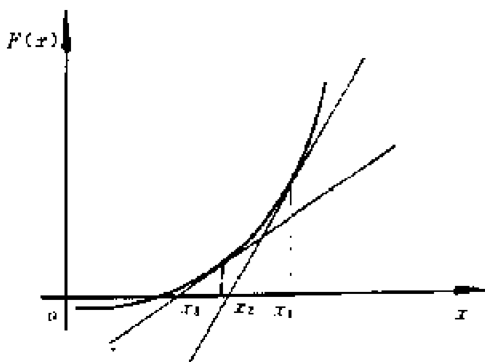


图 4.1 Newton 法

现在考虑实 Banach 空间 X 和 Y，开球 $B_r(x_0)\subset X$。设 $F:B_r(x_0)\to Y$ 是 C^1 映射，求 F 的零点。

设对任何 $x\in B_r(x_0)$，逆算子

$$F'(x)^{-1}:Y\to X$$

是有界线性算子。

定义 1 取 x_0 为首次近似，若对一切 $n\geqslant 0$，定义了迭代序列

$$x_{n+1}=x_n-F'(x_n)^{-1}F(x_n) \tag{4.5.1}$$

则称式(4.5.1)为求解方程 $F(x)=0$ 的 Newton 法。

若取迭代序列为

$$x_{n+1}=x_n-F'(x_0)^{-1}F(x_n) \tag{4.5.2}$$

则称式(4.5.2)为简化 Newton 法。设

$$G(x)=x-F'(x)^{-1}F(x)$$

则式(4.5.1)可以看作是求方程 $x=G(x)$的迭代程序。

式(4.5.1 的几何意义很明显：若给了第 n 次近似 x_n，则 F 在 x_n 处的切线 $F(x_n)+F'(x_n)\times(x-x_n)$的零点就选作 x_{n+1}。

显然，如果极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=z$ 存在，则 z 就是 F 的零点。因为收敛的快慢是很重要的，所以我们要引进阶的概念。

定义 2 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=z$，如果存在 $p\geqslant 1$ 及常数 $c>0$，使当 $n\geqslant n_0$ 时，下式成立

$$\|x_{n+1}-z\|\leqslant c\|x_n-z\|^p \tag{4.5.3}$$

则称迭代序列$\{x_n\}$具有 p 阶收敛性。在 $p=1$，$0<c<1$ 的情形，称$\{x_n\}$线性收敛，$p=2$ 则称为 2 阶收敛(或平方收敛)。注意

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} - z &= x_n - z - F'(x_n)^{-1}F(x_n) \\
&= x_n - z - F'(x_n)^{-1}[F'(z)(x_n - z) + o(\| x_n - z \|)] \\
&= F'(x_n)^{-1}[F'(x_n) - F'(z)](x_n - z) - o(\| x_n - z \|)
\end{aligned} \tag{4.5.4}
$$

因此，如果 F' 的性质很好，那么可以期望得到比线性收敛更好的结果。在许多实际情况下，每一步都要求 F' 有逆，这个要求太高。所以有时则用修正的简化 Newton 法如式(4.5.4)。对于这个迭代则只能期望有线性收敛性。

下面我们证明，若 $\| F(x_0) \|$ 很小，且 F' 满足 Lipschitz 条件，则式(4.5.1)是二阶收敛的。

定理1 设 X、Y 是 Banach 空间，$B_r(x_0) \subset X$，$F: B_r(x_0) \to Y$ 是 C^1 映射，满足

(1) $F'(x_0)^{-1}: Y \to X$ 有界线性，$\| F'(x_0)^{-1}F(x_0) \| \leqslant \alpha$，$\| F'(x_0)^{-1} \| \leqslant \beta$；

(2) 对任何 $x, \bar{x} \in B_r(x_0)$，有

$$
\| F'(x) - F'(\bar{x}) \| \leqslant k \| x - \bar{x} \|;
$$

(3) $2k\alpha\beta < 1$，$2\alpha < r$。

则 F 在 $B_{2\alpha}(x_0)$ 内有唯一零点 z，Newton 迭代式(4.5.1)二阶收敛于 z，且满足

$$
\| x_n - z \| \leqslant \frac{\alpha}{2^{n-1}} q^{2^n - 1}, q = 2\alpha\beta k < 1 \tag{4.5.5}
$$

证明 我们首先证明，按照式(4.5.1)给出的序列 $\{x_n\}$ 确实是定义好的，即证明 $\forall\, n \geqslant 0$ 都有 $\| x_{n+1} - x_0 \| < r$。

为此，令 $\alpha_n = \| x_{n+1} - x_n \|$，$\beta_n = \| F'(x_n)^{-1} \|$，$\gamma_n = k\alpha_n\beta_n$，由条件(2)可得

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &\leqslant \beta_n \| F(x_n) - [F(x_{n-1}) + F'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})] \| \\
&\leqslant \beta_n \alpha_{n-1} \int_0^1 \| F'(x_{n-1} + t(x_n - x_{n-1})) - F'(x_{n-1}) \| \mathrm{d}t \\
&\leqslant k\beta_n \alpha_{n-1}^2 \int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{k}{2}\beta_n \alpha_{n-1}^2
\end{aligned}
$$

即

$$
\alpha_n \leqslant \frac{k}{2}\beta_n \alpha_{n-1}^2 \tag{4.5.6}
$$

由于 $F'(x) = F'(x_{n-1})[I + F'(x_{n-1})^{-1}(F'(x_n) - F'(x_{n-1}))]$，故又可推知当 $\gamma_{n-1} < 1$ 时，有 $\beta_n \leqslant \beta_{n-1}(1 - \gamma_{n-1})^{-1}$。因此，$\alpha_n \leqslant \frac{k}{2}(1 - \gamma_{n-1})^{-1}\beta_{n-1}\alpha_{n-1}^2$，从而有

$$
\alpha_n \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma_{n-1}}{1 - \gamma_{n-1}} \alpha_{n-1} \text{ 和 } \gamma_n \leqslant \frac{1}{2} \frac{\gamma_{n-1}^2}{(1 - \gamma_{n-1})^2} \tag{4.5.7}
$$

因为 $\gamma_0 = k\alpha_0\beta_0 \leqslant k\alpha\beta < \frac{1}{2}$，所以从不等式(4.5.7)可推得 $\gamma_n < \frac{1}{2}$，并且对一切 $n \geqslant 1$，有 $\alpha_n \leqslant \frac{1}{2}\alpha_{n-1}$，因此，$\alpha_n \leqslant 2^{-n}\alpha$，且 $\| x_{n+1} - x_0 \| \leqslant 2\alpha < r$。

不难推出，$\{x_n\}$ 是 Canchy 序列，其极限 $z \in B_{2\alpha}(x_0)$。显然，$F(z) = 0$，并且因为 $\beta_n \to \| F'(z)^{-1} \|$，故有

$$
\| x_{n+1} - z \| \leqslant c \| x_n - z \|^2, c = \frac{k}{2}\sup\beta_n < \infty
$$

零点 z 是唯一的。若不然，设 $\bar{z} \in B_{2\alpha}(x_0)$ 也是 F 的零点，则由

$$
\begin{aligned}
\| z - \bar{z} \| &\leqslant \beta \| F(z) - F(\bar{z}) - F'(x_0)(z - \bar{z}) \| \\
&\leqslant \beta k \| z - \bar{z} \| \int_0^1 \| \bar{z} + t(z - \bar{z}) - x_0 \| \mathrm{d}t \\
&\leqslant 2k\alpha\beta \| z - \bar{z} \|
\end{aligned}
$$

可知 $z=\bar{z}$。

最后，为了得到估计式(4.5.5)，我们令 $\delta_n=\dfrac{\gamma_n}{1-\gamma_n}$，则根据式(4.5.7)及 $\gamma_n\leqslant\dfrac{1}{2}(\forall\ n\geqslant 0)$ 可知 $\delta_n\leqslant\delta_{n-1}^2$。因此，对于 $\forall\ n\geqslant 0,\delta_n\leqslant\delta_0^{2^n}$。再由式(4.5.7)推得

$$\alpha_n\leqslant\frac{1}{2}\delta_0^{2^{n-1}}\alpha_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant 2^{-n}\delta_0^{2^n-1}\alpha_0\leqslant 2^{-n}q^{2^n-1}\alpha$$

所以

$$\| x_n-z\|\leqslant\sum_{i=n}^{\infty}\alpha_i\leqslant 2\cdot 2^{-n}q^{2^n-1}\alpha=\frac{\alpha}{2^{n-1}}q^{2^n-1}$$

证毕。

习 题 四

1. 证明空间 $C[a,b]$ 上的范数

$$\varphi(x)=\| x\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$$

在 x 处是 G—可微分的当且仅当恰有一 $t_0\in[a,b]$，使得 $|x(t_0)|=\| x\|$。

2. 设 X 为 Banach 空间，T 在 X 上连续 F—可微且对任意 $t\in R$ 和 $x\in X$，有 $T(tx)=tTx$，证明 T 是线性的。实际上，$Tx=T'(0)x$。

3. 设 $X=\{u\mid u\in C[a,b],[a,b]\subset R,u(a)=u(b)=0\}$，$K:[a,b]\times[a,b]\to R$ 连续，且为对称的($K(s,t)=K(t,s)$)，定义积分算子

$$(Ku)(s)=u(s)\int_a^b K(s,t)u(t)\mathrm{d}t,s\in[a,b],u\in X$$

证明$(Ku)(s)$在 X 上 F—可微分，并算出它的 F—微分。

4. 设 $X=[1,+\infty)\subset R,T:X\to X$，规定

$$Tx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{x}$$

证明 T 是压缩映射。

5. 设 $f(s)$是$[a,b]$区间上的已知函数，核 $K(s,t)$为正方形 $a\leqslant s\leqslant b,a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数，且存在 $M>0$，使得

$$\int_a^b|K(s,t)|\mathrm{d}t\leqslant M<+\infty$$

则当 $|\lambda|<\dfrac{1}{M}$ 时，必有唯一的 $\varphi(s)\in C[a,b]$满足 Fredholm 积分方程

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

6. 设 X 是完备的度量空间，$T_n:X\to X$ 是连续算子列，假设每一 T_n 有不动点 x_n。

(1)设在 X 上 T_n 一致收敛于 T，证明

1)若 $x_n\to x_0$ 或 $Tx_n\to x_0$，则 x_0 是 T 的不动点；

2)若 T 是压缩的，则$\{x_n\}$收敛于 T 的唯一不动点。

(2)设$\{T_n\}$逐点收敛于 T，每一 T_n 是 Lipschitz 的，且存在 $M>0$，使得 $L(T_n)\leqslant M$(n 为自然数)，证明

1)T 是 Lipschitz 的且 $L(T)\leqslant M$；

2)若 $x_n\to x_0$，则 x_0 是 T 的不动点；

3)若 $M<1$，则$\{x_n\}$收敛于 T 的唯一不动点。

第五章　拓扑空间和微分流形

本章主要讨论拓扑空间和微分流形的基本概念。前两节介绍拓扑空间的定义以及可数公理和分离公理，后三节介绍微分流形的定义以及切向量、切映射和向量丛。

§5.1　拓扑空间

在 Euclid 空间利用距离可以引进开集、闭集、收敛和连续等一系列重要的概念。收敛和连续都是用距离来表达的，然而也可以换一个方式用开集来表达，例如 $x_n\to x$ 就是指对含有点 x 的任意一个开集 U，当 n 充分大时，$x_n\in U$。又如映射 f 连续是指对任何开集 V，其逆象 $f^{-1}(V)$ 是开集，这种表达方式完全脱离了距离，它表明完全可以把开集作为出发点来建立整个数学分析。不过，在 Euclid 空间中，开集是利用距离来定义的，出发点是距离，但在一个一般的空间中，怎样合理的规定何种集合是开集，而这种规定不一定借用距离。回忆一下在 Euclid 空间中开集有哪些本质的特性？细致分析就会发现凡是和开集有关的一切概念、定理和论证都只用到下面三条最基本的特性：

(1)任意个(有限、可列无限或不可列无限多个)开集的并集仍是开集；

(2)有限个开集的交集仍是开集；

(3)整个空间 R^n 是开集，空集 $\varnothing$ 是开集。

从以上分析可以看出，在一个空间内可以不必引进距离，只要引进满足上述三条性质的开集，则就可以建立内点、外点、边界点、闭集、紧集、聚点、收敛、连续等一系列基本概念和基本理论。

定义 1　设 X 是一个集合，τ 是 X 中某些子集组成的集类，如果 τ 满足以下三条性质(或者说满足以下三条公理)：

(1)τ 内任意个集合的并集仍属于 τ；

(2)τ 内有限个集合的交集仍属于 τ；

(3)X 属于 τ，空集 $\varnothing$ 属于 τ。

则称 τ 是 X 上的一个拓扑，又称 τ 中的集合是 X 内的开集。设点 $x\in X$，称含有 x 的开集是 x 的一个邻域。当 X 装备了拓扑结构 τ 之后，称 (X,τ) 就是拓扑空间，有时简单地记为 X。换句话说，所谓拓扑空间 (X,τ) 就是指在集合 X 上建立了满足上述公里的开集。从直观上看，建立了开集意味着给出“靠近”的概念。X 内两个点 a、b，如果同在某个开集内，就表明 a、b 之间有一种靠近的程度，这个程度是用它们同属于某个开集来表征的。

例 1　设 $X=\{a,b,c\}$，它是由三个元素 a、b、c 组成的。又设

$$\tau=\{\{a\},\{a,b\},X,\varnothing\}$$

容易验正 τ 是一个拓扑，(X,τ) 是一个拓扑空间。再设

$$\tau'=\{\{a\},\{a,b\},\{a,c\},X,\varnothing\}$$

τ' 也是一个拓扑，(X,τ') 也是一个拓扑空间。由于 (X,τ) 和 (X,τ') 装备着不同的拓扑结构，所

以它们是不同的拓扑空间。

例 2 在实数集 R 上装备以下拓扑 τ：由所有开区间、任意个开区间的并以及空集 $\varnothing$ 组成。这个拓扑结构中的开集就是通常数学分析中由距离产生的开集，称 τ 是通常的拓扑。因此，任何一个度量空间一定是一个拓扑空间，其拓扑由度量产生。

在实数集 R 上还可以建立其他的拓扑，例如 τ'：由所有包含 0 点的开区间和 $\varnothing$ 组成，不难验证 τ' 是拓扑。

(R,τ) 和 (R,τ') 都是拓扑空间，但它们是两个不同的拓扑空间。

例 3 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是一个赋范空间，$\|\cdot\|$ 是范数，对任何一点 $a\in X$ 和任意一个实数 $\delta>0$，记

$$O(a,\delta)=\{x\in X\mid \|x-a\|<\delta\}$$

它是以点 a 为中心，以 δ 为半径的开球。设 E 是 X 的一个子集，如果在 E 内的每个点 y 都存在一个开球 $O(y,\eta)\subset E$，其中 $\eta>0$ 可能与点 y 有关，则称 E 是 X 内的一个开集。令 τ 是 X 内的所有开集以及 X 自身和空集 $\varnothing$ 组成的集类，容易验证 τ 是一个拓扑，称它是由范数产生的拓扑。因此，任何一个赋范线性空间一定是一个拓扑空间，其拓扑由范数产生。

例 4 （两个极端的情形）设 X 是一个集合。

τ_1：由 X 的一切子集组成；

τ_2：由 X 和 $\varnothing$ 组成（仅两个元素）。

τ_1 和 τ_2 都是拓扑，称 (X,τ_1) 是离散的拓扑空间，τ_1 是离散拓扑。在离散的拓扑空间中，由一个点 $x\in X$ 组成的集 $\{x\}$ 是 X 中的一个开集，称 (X,τ_2) 是平凡的拓扑空间（或最粗糙的拓扑空间）。

例 1 中的两个拓扑 τ 和 τ' 虽然不同，但它们都有下列关系：τ 中的开集都在 τ' 中，即 $\tau\subset\tau'$，这意味着 τ' 中开集更多一些，则称拓扑 τ' 强于 τ，或者说拓扑 τ 弱于拓扑 τ'。一般说来，在同一个集合上装备了两个不同的拓扑 τ 和 τ'，如果 $\tau\subset\tau'$ 就称 τ' 强于 τ（或 τ 弱于 τ'）。但是不要以为同一个集合上的任意两个不同的拓扑结构都可以比较强弱，例如在例 1 中又设 $\tau''=\{\{c\},\{b,c\},X,\varnothing\}$，$\tau''$ 也是一个拓扑，但是它与 τ 和 τ' 都不可比较。又如在例 2 中设 τ'' 是所有包含闭区间 $[1,2]$ 的开区间及 $\varnothing$ 组成的集类，τ'' 是一个拓扑，但它和 τ' 不可比较。

定义 2 设 (X,τ) 是拓扑空间，$\tau^*\subset\tau$，如果对于 $\forall\ O\in\tau$，O 为 τ^* 中若干元素的并，则称 τ^* 为拓扑空间一个拓扑基。

例 5 拓扑空间 (X,τ) 的拓扑或者开集族 τ 是 X 的一个拓扑基。

例 6 设 Euclid 空间 R^n，令

$$\tau^*=\{U(a,r)\mid a\in R^n,r\text{ 为正实数}\}$$

其中，$U(a,r)\}=\{x\mid x\in R^n,\|x-a\|<r\}$ 为 R^n 中的以 a 为中心、r 为半径的一个球形邻域，显然，τ^* 是 R^n 的一个拓扑基。

定义 3 设 (X,τ) 是一个拓扑空间，E 是 X 的一个子集。

(1)内点。设 $x\in E$，如果存一个含有 x 的开集 $O\subset E$，就称 x 是 E 的一个内点，显然，开集 U 内的每一点都是 U 的内点。

(2)外点。设 $x\in X$，如果存在一个含有 x 的开集 O，$O\subset X-E$（或者写为 $O\cap E=\varnothing$），就称 x 是 E 的一个外点，显然，$x\notin E$。

(3)边界点。设 $x\in X$（x 可以属于 E，也可以不属于 E），如果对含有 x 的任何开集 O，O 中既有 E 的点又有非 E 的点，即 $O\cap E\neq\varnothing$，$O\cap(X-E)=\varnothing$，就称 x 是 E 的一个边界点，E 的

所有边界点组成 E 的边界。

(4)聚点。设 $x\in X$(x 可以属于 E,也可以不属于 E),如果对含有 x 的任何开集 O,$O-\{x\}$中必有 E 的点,即$(O-\{x\})\cap E\neq\varnothing$,就称 x 是 E 的一个聚点。要注意的是,E 的聚点可能不属于 E。

(5)闭集。设 E 是 X 的一个子集,如果 E 的补集 $X-E$ 是 X 中的开集,就称 E 是闭集,也就是说,开集的补集是闭集,闭集的补集是开集,X 和空集$\varnothing$既是开集又是闭集。

(6)闭包。记$\overline{E}=E\cup\{E$ 的所有聚点$\}$,称 $\overline{E}$ 是 E 的闭包。例如实数集上带有通常的拓扑,$E=(a,b)$,则 $\overline{E}=[a,b]$。

闭集也可以定义为:设 E 是 X 的一个子集,如果 E 的每一个聚点(假定它存在的话)都属于 E,即 $E=\overline{E}$,就称是闭集。这个定义和(5)中的定义是等价的。

(7)紧集。设$\{O_\alpha\}$是 E 的任意一个开覆盖(即每一个 O_α 是开集,并且 $E\subset\bigcup\limits_\alpha O_\alpha$),如果在$\{O_\alpha\}$中总可以选出有限个开集覆盖 E,就称 E 是一个紧集。

例 7 在 Euclid 空间(或者任意一个赋范线性空间)内,设 x_0 是 E 的一个聚点,则必存在一个点列$\{x_n\}\subset E$,$x_n\neq x_0(n=1,2,\cdots)$,$x_n\to x_0$。但在一般的拓扑空间$(X,\tau)$内,这事实不一定成立,例如,设 X 是任意一个不可列集,O 是 X 的一个子集,如果 O 的补集 $X-O$ 是可列集或有限集,就说 O 具有可列补。设 τ 是由所有具有可列补的子集 O 以及空集$\varnothing$组成的集类,不难验证 τ 是一个拓扑,称这一拓扑是可列补拓扑。

在可列补拓扑空间内,设 $x_0\in X$,考察 $E=X-\{x_0\}$,显然每个含 x_0 的开集必含有 E 的点,所以 x_0 是 E 的一个聚点。是否存在一个点列$\{x_n\}$,$x_n\neq x_0(n=1,2,\cdots)$,$x_n\to x_0$ 呢? 在 E 中任意取一个点到$\{x_n\}$,$x_n\neq x_0(n=1,2,\cdots)$,现在作

$$O=X-\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$$

因为 $X-O=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$是可列集,所以 O 是含 x_0 的一个开集,但这开集中却不含$\{x_n\}$,所以 x_n 不收敛于 x_0,即 E 内任何点列(除 $x_0,x_0,\cdots,x_0,\cdots$外)都不会收敛于 x_0。

设(X,τ)是一个拓扑空间,S 是 X 的一个子集,要在 S 上建立拓扑 τ_s,使得 τ_s 和原来的拓扑 τ 相容。这就是说,如果点列$\{x_n\}\subset S$,点 $x\in S$,在(X,τ)内 $x_n\to x$ 和在(S,τ_s)内 $x_n\to x$ 是相同的,如何建立 τ_s?

定义 4 设(X,τ)是一个拓扑空间,且 O 是 X 内的开集,记

$$O_s=O\cap S$$

把 O_s 作为 S 内的一个开集,对 X 内的所有开集 O 都作出相应的 O_s,这些 O_s 的全体记为 τ_s,即

$$\tau_s=\{O\cap S\,|\,O\in\tau\}$$

τ_s 就是所要求的拓扑,称 τ_s 是 τ 在 S 上的诱导拓扑,(S,τ_s)是(X,τ)的拓扑子空间。

例 8 设 X 是实数集,τ 是通常的拓扑,$S=[0,1]$,由 τ 诱导出的拓扑是

$$\tau_s=\{O\cap[0,1]\,|\,O\in\tau\}$$

例如$\left[0,\frac{1}{3}\right)=\left(-1,\frac{1}{3}\right)\cap[0,1]$是 S 内的开集,从而$\left[\frac{1}{3},1\right]$是 S 内的闭集。

设(X,τ_x)和(Y,τ_y)是两个拓扑空间,它们可以是相同的也可以是不同的。

定义 5 设(X,τ_x)和(Y,τ_y)是两个拓扑空间,$f:(X,\tau_x)\to(Y,\tau_y)$,如果对 Y 中任意一个开集 V,它的逆象

$$U=f^{-1}(V)=\{x\in X\,|\,f(x)\in V\}$$

是 X 中的开集,就称 f 是从 X 到 Y 的一个连续映射。当 X 和 Y 都是 Euclid 空间(带有通常的

拓扑)时，上述定义就是 Euclid 空间上连续映射的定义。映射的连续性和空间的拓扑结构有关，在某一个拓扑结构下是连续映射，换成另一个拓扑结构之后可能变得不连续了。

例 9 设 X 是实数集，映射 $f:X\to X$ 的定义是 $f(x)=\sin x(x\in X)$。f 是否连续？这要看 X 上的拓扑结构了。设 τ_1 是 X 上的通常拓扑，τ_2 是由所有包含 0 的开区间以及空集 $\varnothing$ 组成的拓扑，则 $f:(X,\tau_1)\to(X,\tau_2)$ 是连续的，但 $f:(X,\tau_2)\to(X,\tau_1)$ 是不连续的。后者是因为在 τ_1 中存在开集 $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$，其逆象 $U=\left\{x\in X\mid\frac{1}{2}<\sin x<\frac{2}{3}\right\}$ 不是含 0 的开区间，即 U 不是 τ_2 中的开集。

例 10 设 (X,τ_x) 和 (Y,τ_y) 是两个拓扑空间，$f:X\to Y$。如果对 X 中的每一点 x 以及 X 中的任何一个收敛于 x 的点列 $\{x_n\}$ 在 Y 内都有 $f(x_n)\to f(x)$，f 是否连续？在 Euclid 空间(带有通常拓扑)内，回答是肯定的。但在一般拓扑空间中却未必如此。例如设 X 是实数集，τ_1 是 X 上的通常拓扑，τ_2 是可列补拓扑(例 7)，考察映射

$$g:(X,\tau_2)\to(X,\tau_1)$$
$$x\mapsto x^2$$

在 (X,τ_2) 中，对每一个 x，只有 $x,x,\cdots,x,\cdots$ 收敛于 x，其象 $x^2,x^2,\cdots,x^2,\cdots$ 当然也收敛于 x 的象 x^2，但 τ_1 中的开集 $(1,2)$ 其逆象却不是 τ_2 中的开集，因此 g 不连续。

定义 6 设 (X,τ_x) 和 (Y,τ_y) 是两个拓扑空间，f 是从 X 到 Y 的双射(因此逆映射 f^{-1} 存在)，如果 f 又是从 X 到 Y 的连续映射，并且 f^{-1} 是从 Y 到 X 的连续映射，就称 f 是同胚映射，当两个拓扑空间之间存在一个同胚映射时，就称这两个空间同胚。

如果两个空间是同胚的，则这两个空间之间不仅点与点一一对应，而且开集与开集之间也一一对应，这表明它们有相同的拓扑结构，从拓扑学的观点看，可以把同胚的两个拓扑空间看作是相同的，这如同在代数学中所说的"同构的两个空间是相同的"一样。

再从直观上看，如果把拓扑空间看作一块有弹性的橡皮薄膜，那么同胚映射就是将这块薄膜作拉伸压缩或弯曲，但不准撕开或粘贴。薄膜经同胚映射后，形状可能改变了，但两者的点与点之间，开集与开集之间是一一对应的。

例 11 设 X 是实数集，带有通常的拓扑，$(-1,1)$ 是 X 的拓扑子空间。作映射 f 是

$$f(x)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x,x\in(-1,1)$$

显然，f 是从 $(-1,1)$ 到 X 的同胚映射，所以 X 和 $(-1,1)$ 同胚。

例 12 在三维 Euclid 空间 R^3(常有通常拓扑)中上半球面 $S=\{(x,y,z)\in R^3\mid x^2+y^2+z^2=1,z>0\}$ 和开圆盘 $D=\{(x,y,z)\in R^3\mid z=0,x^2+y^2<1\}$ 同胚(注：S 和 D 都看成 R^3 的拓扑子空间)。这是因为设映射 $f:D\to S$ 是

$$x=x,y=y,z=\sqrt{1-x^2-y^2},(x,y)\in D$$

f 是从 D 到 S 的同胚映射，所以 D 和 S 同胚。

例 13 设 X 是实数集，τ_1 是 X 上通常拓扑，τ_2 是由所有含 O 的开区间以及空集 $\varnothing$ 组成的拓扑，则 (X,τ_1) 和 (X,τ_2) 不同胚。

§5.2 可数性、分离性公理

现在将一般拓扑空间中收敛的概念和 Euclid 空间中收敛的概念作一个对比，引起人们注

意的是：由于拓扑空间是非常一般的，在这个非常一般的空间中只有开集满足的三条性质可以作为出发点加以运用，因此它不像 Euclid 空间那么细腻。例如在 Euclid 空间中任何两个不同的 x 和 y，可以作两个分别以 x 和 y 为中心的适当小的开球，使得这两个开球不相交，换句话说，可以用不相交的开集把不同的两点 x 和 y 隔离开，但在一般的拓扑空间中，仅仅从开集的三条性质出发是推断不出这一隔离性质的（附带说一下，一般的赋范线性空间是具有这一性质的）。正由于一般的拓扑空间不像 Euclid 空间那么细致，所以它将会产生许多奇怪的"不正常"的现象。

例 1 设 X 是实数集，τ_1 是 X 上的通常的拓扑（见 §5.1 例 2），τ_2 是由所有包含 $(0,1)$ 的开区间以及空集 $\varnothing$ 组成，则 (X,τ_1) 和 (X,τ_2) 都是拓扑空间。考察数列

$$x_n = \frac{1}{n}, y_n = c + \frac{1}{n} (c > 0 \text{ 是一个常数})$$

$$z_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ 是奇数} \\ 1 - \frac{1}{n}, & n \text{ 是偶数} \end{cases} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

在 (X,τ_1) 内 $x_n \to 0$，$y_n \to c$，$\{z_n\}$ 不收敛。但在 (X,τ_2) 中情况大为两样，$\{x_n\}$ 收敛于任何实数，而 $\{y_n\}$ 收敛于任何不小于 c 的实数，z_n 也收敛于任何实数。这是因为对任何实数 α，含有 α 的任何开集必含有 $(0,1)$，从而含有 x_n 和 $z_n (n=1,2,\cdots)$，所以 $\{x_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 都收敛于 α。另外对任何 $\beta \geqslant \alpha$，含有 β 的任何开集 O 必含有 (α,β)，而 $\beta \geqslant c$，所以存在 N，当 $n > N$ 时，$y_n \in O$，即 $y_n \to \beta$。

由于拓扑 τ_1 强于 τ_2，因此不存在 (X,τ_1) 内收敛但在 (X,τ_2) 中不收敛的数列。

例 2 设 X 是实数集，拓扑 τ 是由所有左开右闭的区间 $(-a,0]$（a 是大于 0 的任何一个实数）以及 X，$\varnothing$ 组成。在 (X,τ) 内数列 $\{\frac{1}{n}\}$ 不收敛于 0，但收敛于任何 $c>0$。

例 3 设 X 是任一集合，τ 是 X 上的离散拓扑（见 §5.1 例 4），对任何点 $x \in X$，因为由单点 x 组成的集 $\{x\}$ 是一个开集，它含有 x，并且在这个开集内除 x 外不再有其他的点，所以在离散的拓扑空间内，只有点列 $x,x,\cdots,x,\cdots$ 收敛于 x，如果把收敛看作"越来越靠近"的话，那么，在离散的拓扑空间 (X,τ) 中只有 $x,x,\cdots,x,\cdots$ 越来越靠近 x，由其他非 x 的点组成的点列都不会越来越靠近 x，点 x 成了"孤立点"，整个空间是离散的，这就是离散的拓扑空间的直观解释。

例 4 在最粗糙的拓扑空间中，任何点列都收敛，并且收敛于空间中的任一点。

出现这种"不正常"的现象是因为我们只能从开集的三条性质出发，当然就会显得不够细致，因此，在拓扑空间中必须加进另外一些公理，在这些公理的限制下，空间的性质将会变得更好些。这些公理共有两套，一套是可数公理，另一套是隔离公理。

可数公理说的是开集的"数量"。如果拓扑空间中的开集有不可列无限多个，问能不能从中选出可列个就够用了，这就是可数公理的作用，它共有两个：

第一可数公理 如果拓扑空间 (X,τ) 内的每一点 x，存在可列个开集 $O_n (n=1,2,\cdots)$，使对任何一个含有 x 的开集 V，$\{O_n\}$ 中存在一个 $O_{n_0} \subset V$，就称 (X,τ) 满足第一可数公理（或 A_1 公理）。直观地说，在满足第一可数公理的空间中，任意固定一点 x，它的邻域（即含有 x 的开集）可能会有不可列无限多个，但总可以选出可列无限多个就足以和那不可列无限多个相当。

第二可数公理 设 (X,τ) 是拓扑空间，如果存在可列个开集 $O_n (n=1,2,\cdots)$，使得任何一个开集都可以表示为 $\{O_n\}$ 中某些开集的并，就称 (X,τ) 满足第二可数公理（或 A_2 公理）。直观地说，在满足第二可数公理的空间中，其开集可能是不可列无限多个，但总可以选出可列无限

多个就够了。

例如 Euclid 空间 R^n(带有通常拓扑)，就是满足第二可数公理的空间。因为它有以所有的有理数为坐标的点为中心，以有理数为矩形族作为它的可数拓扑基。显然，拓扑空间若是第二可数的，则必为第一可数的；反之不然，例如取实数集 R，并取 R 的离散拓扑，这个拓扑空间的任一拓扑基必须含有所有的单点集，因此不可数；同时，单点集 $\{x\}$ 显然形成 x 点处的一个可数邻域族，所以它是第一可数的。

隔离公理讨论的是点和点之间，或者点与闭集，闭集和闭集之间的一种隔离性质。我们以如下的方式向拓扑空间引入一组隔离公理。

定义 1 设 (X,τ) 是一个拓扑空间，如果它满足如下所述的公理 $T_i(i=0,1,2,3,4)$，则称 X 是 T_i 空间 $(i=0,1,2,3,4)$。

T_0 公理 对每一组 $x,y\in X, x\neq y$，或者存在 $x\in U_x$，使得 $y\notin U_x$；或者存在 $y\in U_y$ 使得 $x\notin U_y$。

T_1 公理 对每一组 $x,y\in X, x\neq y$，存在 $x\in U_x$ 和 $y\in U_y$，使得 $y\notin U_x$ 和 $x\notin U_y$。

T_2 公理 对每一组 $x,y\in X, x\neq y$，存在 $x\in U_x$ 和 $y\in U_y$，使得 $U_x\cap U_y=\varnothing$。

T_3 公理 对每一点 $x\in X$ 与每一个闭集 $C\subseteq X$，如果 $x\notin C$，则存在 $x\in U_x$ 与 $O\in\tau$，使得 $C\subseteq O$ 且 $O\cap U_x=\varnothing$。

T_4 公理 对每一对不相交的闭集 $C,D\subseteq X$，存在 $O_1,O_2\in\tau$，使得 $C\subseteq O_1$ 与 $D\subseteq O_2$ 且 $O_1\cap O_2=\varnothing$。

可以指出，每一个 T_i 公理不一定比 T_{i-1} 公理更强，如集合 X 具有平凡的拓扑，则 X 是 T_3 空间但不必是 T_2 空间，因为在 X 中单个点不必是闭集。另外 T_2 空间就是 Hausdorff 空间，T_2 公理亦称为 Hausdorff 公理，例如任何一个赋范空间一定是 Hausdorff 空间，带有可列补的空间不是 Hausdorff 空间。在 Hauscdorff 空间内如果点列 x_n 收敛，则它只收敛于唯一的一点。

在拓扑空间上加进可数公理和隔离公理的限制以后，拓扑空间的性质将有所改善。在怎样的公理下会改善到何种程度，有兴趣的读者可以参看任何一本有关点集拓扑的书，在此不作介绍了。

在一个赋范空间 $(X,\|\cdot\|)$ 上，由范数 $\|\cdot\|$ 可以产生开球，从而产生开集，因此它是一个拓扑空间。反过来，如果在一个拓扑空间 (X,τ) 上可以建立某个范数 $\|\cdot\|$，使得由 $\|\cdot\|$ 产生的所有开集就是 τ，那么就称拓扑空间 (X,τ) 是可度量化的。任何一个拓扑空间是否都可度量化呢？答案是否定的。

例 5 设 $X=\{a,b\}$，$\tau=\{\{a\},\varnothing,X\}$，$(X,\tau)$ 是拓扑空间，如果它可度量化，设范数是 $\|\cdot\|$，又设 $\|a-b\|=r>0$，作开球

$$O(b,\frac{r}{2})=\{x\in X\mid \|x-b\|<\frac{r}{2}\}=\{b\}$$

即 $\{b\}$ 是一个开集，但 $\{b\}\notin\tau$，这就导致矛盾。

确实还存在许多在理论上和应用上都很有价值的拓扑空间是不可度量化的。这里不作介绍了，请看参考文献[5]。

§5.3 微分流形

在三维 Euclid 空间 R^3 中，我们可以讨论一维光滑曲线、二维光滑曲面；讨论曲线的切线

和曲面的切平面；讨论曲线积分和曲面积分以及它们之间的关系。但还有不少问题值得进一步讨论：首先，要分析在曲线的前面冠以"一维"，在曲面的前面冠以"二维"的原因；其次更重要的是，在高维的空间中讨论光滑的"几何体"以及正确表达和研究这些光滑的"几何体"，从而把 R^3 中的光滑曲面的概念拓广到更高维的空间甚至更一般的拓扑空间中；第三，研究把曲线的切线和曲面的切平面的概念拓广到这些光滑的"几何体"上。为此，我们需要引进微分流形这一极其重要的概念，然后在微分流形的每一点处定义切向量、切空间，从而使流形代数化。这些问题构成本节和以后几节讨论的中心课题。

先考察两个例题：

例1 §5.1 的例 12 中给出了 R^3 的上半单位球面 $S=\{(x,y,z)\in R^3|x^2+y^2+z^2=1,z>0\}$和开圆盘 $D=\{(x,y,0)\in R^3|x^2+y^2<1\}$同胚，而开圆盘 D 显然又和整个二维 Euclid 空间同胚，因此 S 和 R^2 同胚。从拓扑学的观点上看，S 和 R^2 是一样的，在这个意义上，我们说 S 是一个二维曲面。

例2 设 S 是 R^3 中一个球面，$S=\{(x,y,z)\in R^3|x^2+y^2+z^2=a^2\}$，在 S 上装备着由 R^3 中通常拓扑诱导出来的拓扑。S 和例 1 中的半球面不同，它不可能和 R^2 中任何开集同胚，又如何说它是二维的呢？这只要作一次"手术"就可以了。将 S 剖成两片 S_1 和 S_2，S_1 是上半球面$\{(x,y,z)\in R^3|x^2+y^2+z^2=a^2,z>0\}$，$S_2$ 是下半球罐$\left\{(x,y,z)\in R^3|x^2+y^2+z^2=a^2,z<\frac{a^2}{2}\right\}$(图 5.1)，$S_1$ 和 S_2 上的拓扑都是由 R^3 内的通常拓扑诱导出来的，并且 S_1 和 S_2 都是开集，它们覆盖了 S。

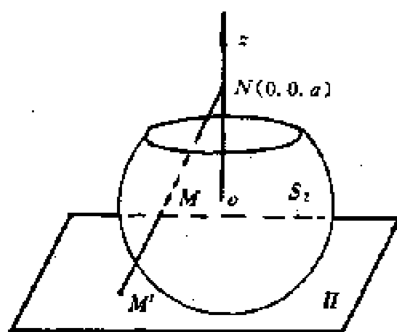


图 5.1

由例 1 知道 S_1 和平面上的一个开圆盘同胚。在图 5.1 中，点 $N=(0,0,a)$是球面 S 的北极，平面 Π 是球面 S 在南极$(0,0,-a)$的切平面，通过点 N 作射线穿过球罐 S_2 和平面 Π，设交点分别是 M 和 M'，作映射 $\varphi: M\mapsto M'$，在这一映射下容易看出 S_2 和平面上的某个开圆盘同胚。

可见 S 虽然不和平面上的任何一个开集同胚，但它有两个开集 S_1 和 S_2 组成的开覆盖，每一个开集都和平面上的某个开圆盘同胚。换句话说，从整体说来，S 不和 R^2 内的任何开集同胚，但 S 的每一个局部(开集)都和 R^2 内某个开集同胚，所以我们也称 S 是一个二维曲面。

将它略加抽象，就得到流形概念。

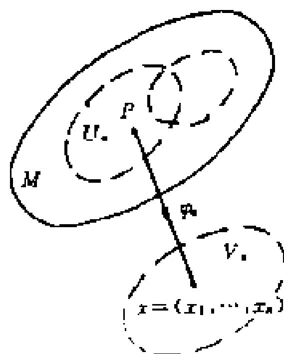


图 5.2

定义 1 设 M 是一个拓扑空间，并且是 Hausdorff 空间，$\{U_\alpha\}$是 M 的开覆盖。如果对每一个开集 U_α，联系着一个映射 $\varphi_\alpha: U_\alpha\to V_\alpha$，$V_\alpha$ 是 n 维 Euclid 空间内的一个非空开集，也可以不妨假设它是 n 维开球或 n 维开矩形(图 5.2)，并且 φ_α 是同胚映射，即 U_α 和 V_α 同胚，就称 M 是一个 n 维流形。从流形的定义中可使我们知道两件事：

(1) M 虽然不是 Euclid 空间，但是它可以"局部 Euclid 空间化"，M 的每一个局部 U_α 都和 R^n 中的一个开集 V_α 同胚，从拓扑学的观点看，U_α 和 V_α 相同。

(2) M 内的点并没有坐标，但可以安装"局部坐标"。由于 U_α 和 V_α 同胚，它们的点与点一一对应，设点 $p\in U_\alpha$，通过同胚映射 φ_α，点 p 映射为 V_α 中的点 x，设 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，就把$(x_1,\cdots,x_n)$看成点 p 的局部坐标，并用$(x_1,\cdots,x_n)$来

表示点 p(图 5.2)。

从直观上概括地说:所谓 n 维流形就是可以局部(n 维)Euclid 空间化的一个拓扑空间,其中的点可以安装局部坐标。

在 n 维流形上加上"微分结构"就成为微分流形。

定义 2 设 M 是一个 n 维流形,这表明 M 有一个开覆盖$\{U_\alpha\}$,并且每一个 U_α 联系着一个映射 $\varphi_\alpha:U_\alpha\to V_\alpha$,$\varphi_\alpha$ 是同胚映射。如果 U_α 和 U_β 都在$\{U_\alpha\}$内,并且 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$,设 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$,在 φ_α 的作用下将点映射为 $x=(x_1,\cdots,x_n)$,在 φ_β 作用下将点 p 映射为 $y=(y_1,\cdots,y_n)$(图 5.3)。

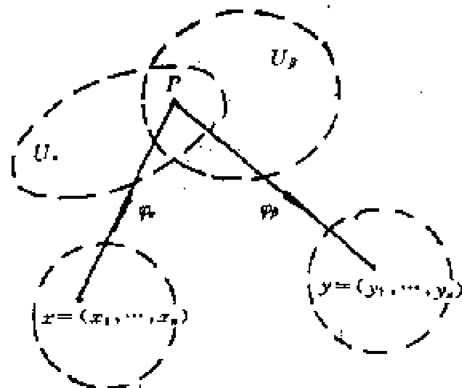


图 5.3

同一个点 p,既可以用坐标 $x=(x_1,\cdots,x_n)$表示,又可以用坐标 $y=(y_1,\cdots,y_n)$表示,于是这两个坐标之间有一个坐标变换式,即

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$
$$x=(x_1,\cdots,x_n)\mapsto y=(y_1,\cdots,y_n)$$

映射 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 是从 $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$到 $\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$的双射,并且又是 n 维 Euclid 空间内的映射。如果它可微并且它的逆映射也可微,就称 M 是 n 维微分流形,又称 U_α 是坐标邻域,φ_α 是坐标映射,$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$是坐标图,$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$是 M 的坐标图集。这好比用一本地图册来表示地球表面上的地球疆界一样,地球表面(近似地)是球面,它不和平面上的任何开矩形同胚,但可能是整个地球册上的一页图,后者就是平面上的一个开矩形,这样一本地图册就足以表现了全世界的地理疆界。

定义 3 如果 M 是一个 n 维微分流形,对一切 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$的 α 和 β,可微映射 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}\in C^k(1\leqslant k\leqslant\infty)$,就称 M 是 n 维 C^k 流形。今后如不作特别说明,总假定 M 是 C^∞流形。

例 3 单位圆周 $C=\{(x,y)\in R^2|x^2+y^2=1\}$,由 R^2 上的通常拓扑诱导出 C 上的拓扑。考虑 C 的开覆盖$\{U_1,U_2\}$:

$$\begin{aligned}U_1&=\{(x,y)\in R^2|x^2+y^2=1,(x,y)\neq(1,0)\}\\&=\{(x,y)\in R^2|x=\cos\theta,y=\sin\theta,0<\theta<2\pi\}\\U_2&=\{(x,y)\in R^2|x^2+y^2=1,(x,y)\neq(-1,0)\}\\&=\{(x,y)\in R^2|x=\cos\theta',y=\sin\theta',-\pi<\theta'<\pi\}\end{aligned}$$

U_1 联系着映射 φ_1,

$$\varphi_1:U_1\to(0,2\pi),(x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)\mapsto\theta$$

U_2 联系着映射 φ_2,

$$\varphi_2:U_2\to(-\pi,\pi),(x,y)=(\cos\theta',\sin\theta')\mapsto\theta'$$

显然,φ_1 和 φ_2 都是同胚映射,所以 C 是一维流形。

再考察

$$\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}:\varphi_1(U_1\cap U_2)\to\varphi_2(U_1\cap U_2)$$

其中,$\varphi_1(U_1\cap U_2)=(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$,$\varphi_2(U_1\cap U_2)=(-\pi,0)\cup(0,\pi)$,有

$$\theta'=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}(\theta)=\begin{cases}\theta & ,0<\theta<\pi\\\theta-2\pi & ,\pi<\theta<2\pi\end{cases}$$

$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ 和它的逆映射都可微，并且属于 C^∞，所以 C 是一维 C^∞ 流形。

例 4 R^3 中的抛物面、椭球面、柱面、马鞍面、双曲面、车胎面等等都是二维 C^∞ 流形，R^n 中的单位球面 $S=\{(x_1,\cdots,x_n)\in R^n | x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1\}$ 是 $n-1$ 维 C^∞ 流形。

要验证这些事实虽不难，但也不简单，下面的定理 1 给出一个较方便的判别方法。

在 Euclid 空间中，对微分流形的陈述可以更直观和更容易掌握。

定义 4 设 $M\subset R^n$，$\{U_a\}$ 是 R^n 中的一族开集，覆盖了 M，如果对每一个 U_a，联系着一个同胚映射 φ_a 和开集 $V_a\subset R^n$，满足

(1) $\varphi_a: U_a \to V_a$，又若 φ_a 和 φ_a^{-1} 都连续可微（这时称 φ_a 是微分同胚）。

(2) $\varphi_a: U_a\cap M \to V_a \cap \{(y,\cdots,y_k)\in R^n | y_{k+1}=y_{k+2}=\cdots y_n=0\}$，$x=(x_1,\cdots,x_n)\mapsto (y_1,\cdots,y_k,0,\cdots,0)$。

就称 M 是 k 维微分流形，$U_a\cap M$ 是 M 的坐标邻域，$(y_1,\cdots,y_k)\in R^k$ 是点 $x\in M$ 的局部坐标。又如果 φ_a 和 φ_a^{-1} 都属于 $C^m(1\leqslant m\leqslant\infty)$，则称 M 是 k 维 C^m 流形。

显然，R^n 中的任何一个开集必定是 n 维 C^∞ 流形。

定理 1 设 $f: R^n\to R$，f 在 R^n 连续可微。令

$$M=\{x\in R^n | f(x)=0\}$$

又设 f 的导数 Df 在 M 内无零点，即 $1\times n$ 矩阵 $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ 在点 $x\in M$ 的秩是 1，则 M 是 $n-1$ 维微分流形。

证明 设 x_0 是 M 内任意一点，不妨假定 $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\neq 0$，作映射

$$\varphi: R^n \to R^n, x=(x_1,\cdots,x_n)\mapsto y=(y_1,\cdots,y_n)$$

其中，$y_i=x_i$，$1\leqslant i\leqslant n-1$；$y_n=f(x_1,\cdots,x_n)$。

由逆映射定理，存在含有 x_0 的开集 U 和含有 $y_0=f(x_0)$ 的开集 V，使得 $\varphi: U\to V$ 是双射，并且存在连续可微的逆映射 $\varphi^{-1}: V\to U$。

此外，当 $x\in M$ 时，$y_n=f(x)=0$，所以

$$\varphi: U\cap M \to V\cap\{(y_1,\cdots,y_n) | y_n=0\}$$

这就证明了 M 是 $n-1$ 维微分流形。证毕。

利用定理 1 容易证明例 4 中的抛物面、椭球面、柱面、马鞍面、双曲面等都是二维 C^∞ 流形，R^n 中的单位球面是 $n-1$ 维 C^∞ 流形。

例 5 设 M 是所有 $n\times n$ 矩阵组成的线性空间，对每个 $A=(a_{ij})\in M$，定义 $\|A\|=\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right\}^{1/2}$。作为赋范线性空间，$M$ 和 R^{n^2} 是同一个空间。令

$$GL(n,R)=\{A\in M | \det A\neq 0\}$$

则 $GL(n,R)$ 是 M 中的开集，这是因为由元素 $a_{11},\cdots,a_{1n},a_{21},\cdots a_{2n},\cdots,a_{n1},\cdots,a_{nn}$ 组成的行列式是变元 $a_{ij}(i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,n)$ 的连续函数，所以 $\{A\in M | \det A=0\}$ 是 M 中的闭集，因此 $GL(n,R)$ 是 M 中的开集，于是它是 n^2 维 C^∞ 流形。

例 6 设 l 是平面上的一条曲线，它的参数方程是

$$x=x(t)=\begin{cases}\frac{1}{t}, & 1\leqslant t<+\infty\\ 0, & -\infty<t\leqslant -1\end{cases}$$

$$y=y(t)=\begin{cases}\sin\pi t, & 1\leqslant t<+\infty\\ t+2, & -\infty<t\leqslant -1\end{cases}$$

当$-1<t<1$时，对应曲线是任意一条连结点(0,1)和点(1,0)的光滑曲线(图5.4)。

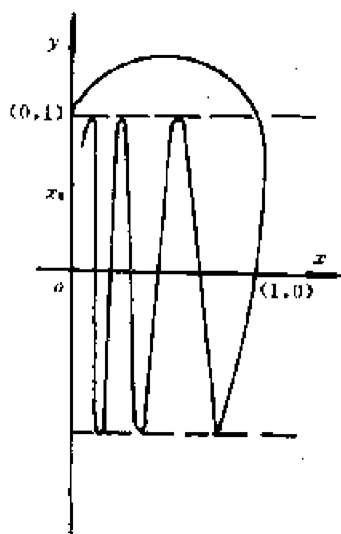


图5.4

l上的拓扑是由R^2中的通常拓扑诱导出来的，l就成为R^2的一个拓扑子空间。粗看起来l似乎是一维微分流形，其实不然，它并不是一维流形。这是因为：如果它是一维流形，设x_0是l上的一点，它在y轴上的-1和1之间，在拓扑空间l内点x_0的邻域如图5.5所示，可以证明它不和直线上的任何开集同胚。

按照微分流形的概念再回过来看R^3中的光滑曲面S，设U是S的一个坐标邻域，φ是相应的坐标映射

$$\varphi: U \to V$$
$$(x,y,z) \mapsto (u,v)$$

这就是说，在曲面S的一个局部范围U内给出了它的参数方程φ^{-1}，即

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$$

其中，$(u,v)\in V$，$(x,y,z)\in U$。

微分流形上的坐标变换有下面的性质。

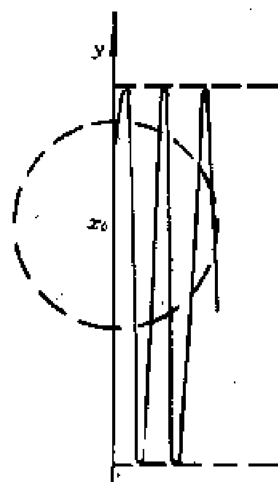


图5.5

定理2 设M是n维微分流形，$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$是坐标图集，当$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$时，则有

$$\det D(\varphi_\beta\cdot\varphi_\alpha^{-1}) = \frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)} \neq 0$$
$$(x_1,\cdots,x_n)\in\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$$

即微分流形上的坐标邻域之间的坐标变换的Jacobi行列式无零点。

证明 因为$(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1})\circ(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})$是从$\varphi_\alpha(U_\alpha\cup U_\beta)$到自身的恒等映射，所以

$$\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\cdot\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)} = 1$$

由此即得$\det(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})\neq 0$。证毕。

R^3中的曲面可以分为两类：一类是双侧曲面；另一类是单侧曲面。例如球面、抛物面、车胎面等都是双侧曲面；Möbius带是单侧曲面。现在将这一概念拓广到流形上去。

定义5 设M是n维微分流形，$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$是它的坐标图集；对于$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$的每一对$\alpha$，$\beta$，坐标变换

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cup U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$
$$x = (x_1,\cdots,x_n)\mapsto y = (y_1,\cdots,y_n)$$

的Jacobi行列式如果恒正，即

$$\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)} > 0,\ (x_1,\cdots,x_n)\in U_\alpha\cap U_\beta$$

就称M是定向的微分流形。

例如R^3中的二维光滑曲面S可以用U_α和U_β覆盖，在坐标图$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$内，曲面$S$表示为

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$$

其中，$(x,y,z)\in U_\alpha$，$(u,v)\in\varphi_\alpha(U_\alpha)$，它的单位法向量是

$$n=\frac{r_u\times r_v}{|r_u\times r_v|},r_u=(x_u,y_u,z_u),r_v=(x_v,y_v,z_v)$$

在坐标图(U_β,φ_β)内，曲面 S 表示为

$$x=x(s,t),y=y(s,t),z=z(s,t)$$

其中，$(x,y,z)\in U_\beta,(s,t)\in\varphi_\beta(U_\beta)$，它的单位法向量是

$$n=\frac{r_s\times r_t}{|r_s\times r_t|},r_s=(x_s,y_s,z_s),r_t=(x_t,y_t,z_t)$$

由 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 建立了从(u,v)到(s,t)的坐标变换：

$$s=s(u,v),t=t(u,v)$$

变换的 Jacobi 行列式是$\frac{\partial(s,t)}{\partial(u,v)}$，在这一变换下，$r_u\times r_v$ 和 $r_s\times r_t$ 有下面的关系：

$$\begin{aligned}r_u\times r_v&=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}i+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}j+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}k\\&=\frac{\partial(s,t)}{\partial(u,v)}\left\{\frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)}i+\frac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)}j+\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}k\right\}\\&=\frac{\partial(s,t)}{\partial(u,v)}r_s\times r_t\end{aligned}$$

如果$\frac{\partial(s,t)}{\partial(u,v)}>0$，即曲面 S 是定向的，这表明 U_α 中的法方向和 U_β 中的法方向是一致的，或者说在定向的光滑曲面上，当法线沿闭曲面上的连续闭曲线变动一周后回到原来的位置时，法线的方向和原来的方向是一致的。

例 7 设 $S=\{(x,y,z)\in R^3|x^2+y^2+z^2=1\}$，考察 S 的六个坐标邻域

$$U_1^+=\{(x,y,z)\in S|x>0\}\text{，坐标是 }y,z$$
$$U_1^-=\{(x,y,z)\in S|x<0\}\text{，坐标是 }z,y$$
$$U_2^+=\{(x,y,z)\in S|y>0\}\text{，坐标是 }z,x$$
$$U_2^-=\{(x,y,z)\in S|y<0\}\text{，坐标是 }x,z$$
$$U_3^+=\{(x,y,z)\in S|z>0\}\text{，坐标是 }x,y$$
$$U_3^-=\{(x,y,z)\in S|z<0\}\text{，坐标是 }y,x$$

坐标系的选取服从右手法则。在 $U_1^+\cap U_2^+$ 内，坐标变换是

$$\begin{cases}y=\sqrt{1-z^2-x^2}\\z=z,x>0,y>0\end{cases}$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(z,x)}=\begin{vmatrix}\frac{-z}{\sqrt{1-z^2-x^2}}&\frac{-x}{\sqrt{1-z^2-x^2}}\\1&0\end{vmatrix}=\frac{x}{\sqrt{1-z^2-x^2}}>0$$

在 $U_1^+\cap U_3^-$ 内，坐标变换为

$$\begin{cases}y=y,\\z=-\sqrt{1-y^2-x^2},x>0,z<0\end{cases}$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(y,x)}=\begin{vmatrix}1&0\\\frac{y}{\sqrt{1-y^2-x^2}}&\frac{x}{\sqrt{1-y^2-x^2}}\end{vmatrix}=\frac{x}{\sqrt{1-y^2-x^2}}>0$$

在 $U_2^-\cap U_3^-$，坐标变换为

$$\begin{cases} x = x, \\ z = -\sqrt{1-y^2-x^2}, y<0, z<0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(y,x)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{y}{\sqrt{1-y^2-x^2}} & \frac{x}{\sqrt{1-y^2-x^2}} \end{vmatrix} = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2-x^2}} > 0$$

在 $U_1^+ \cap U_2^-$，$U_1^+ \cap U_3^+$，…内可得同样的结论，由此可见 S 是定向的微分流形。

设 M 是 n 维 C^∞ 流形，坐标图集为 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$，$G$ 是 M 中的一个开集，它不一定是坐标邻域，$p \in G$。又设 $f: G \to R$，下面给出 f 在点 p 可微和 f 在 G 可微的意义。

定义 6　设 $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 是定义在 $\varphi_\alpha(G \cap U_\alpha)$ 上的实值函数，而 $\varphi_\alpha(G \cap U_\alpha)$ 是 R^n 内的一个开集，因此 $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 是 n 元实值函数。设 $x = \varphi_\alpha(p)$，即 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 是点 p 的局部坐标，如果 $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 在点 x 可微，就称 f 在点 p 可微，如果 f 在每一点 $p \in G$ 可微，称 f 在 G 可微(图 5.6)。

在上面定义中，如果 f 在 G 可微，并且每一个 $f \circ \varphi_\alpha^{-1} \in C^\infty$，就称 f 是 C^∞ 的，记为 $f \in C^\infty$(当然这要求 M 是 C^∞ 流形)。同样可以定义 $f \in C^k$，即 M 是 C^k 流形，同时每一个 $f \circ \varphi_\alpha^{-1} \in C^k$。

如果 $p \in G \cap U_\alpha$ 同时 $p \in G \cap U_\beta$，利用坐标图 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 定义了 f 在 p 可微即 $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 在 x 可微，由于

$$f \circ \varphi_\beta^{-1} = (f \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})$$

于是，当 $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 在点 x 可微，$f \circ \varphi_\beta^{-1}$ 也在点 y 可微。所以可微性与局部坐标的选取无关。

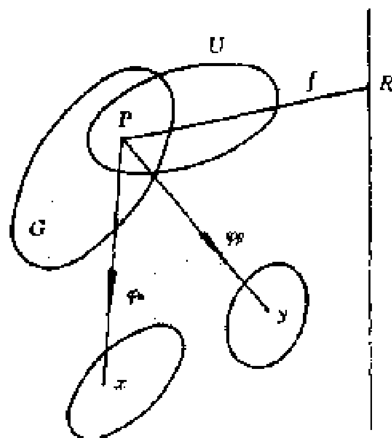


图 5.6

例 8　设 S 是 R^3 中的单位球面，在 S 上定义了一个实值函数 f，$p = (x_0, y_0, z_0)$ 是 S 上的一点，U 是含点 p 的坐标邻域，坐标映射是 φ

$$\varphi^{-1}: (u,v) \mapsto (x,y,z)$$

$$x = \sin u \cos v, y = \sin u \sin v$$

$$z = \cos u \quad (0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi)$$

又设 $(u_0, v_0) = \varphi(x_0, y_0, z_0)$，则

$$f \circ \varphi^{-1}(u,v) = f(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

由流形上函数的可微概念知道，如果 f 作为 u、v 的函数在点 (u_0, v_0) 可微，就说 f 作为 S 上的函数在点 $p = (x_0, y_0, z_0)$ 可微。

设有两个微分流形 M 与 N，若 $f: M \to N$，现在讨论 f 的可微性。

定义 7　设 M 和 N 分别是 m 维和 n 维流形，若映射 $f: M \to N$ 对任意 $p \in M$ 和 $q = f(p) \in N$ 的任意坐标图 (V_β, ψ_β)，存在 p 的坐标图 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$，使得

$$f(U_\alpha) \subset V_\beta$$

并且 $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \psi_\beta(V_\beta)$ 是可微的(图 5.7)，则称 f 为可微映射。映射 $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 又叫做 f 之局部表现，因此，又可以说，若 f 的任一局部表现可微时，f 就叫做可微映射(为方便计，今后说 f 可微均指它是 C^∞ 可微，或者说 f 是光滑映射)。

下面给出判别 $f: M \to N$ 可微的一个命题。

定理 3　若 $f: M \to N$ 是连续映射，且 f 对某一个坐标图集(M、N 中各取一个)，f 的局部表现可微，则 f 可微。

证明 设 $a_1=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$、$a_2=\{(V_\beta,\psi_\beta)\}$分别是 M 与 N 上的两个坐标图集，任取 $p\in M$，

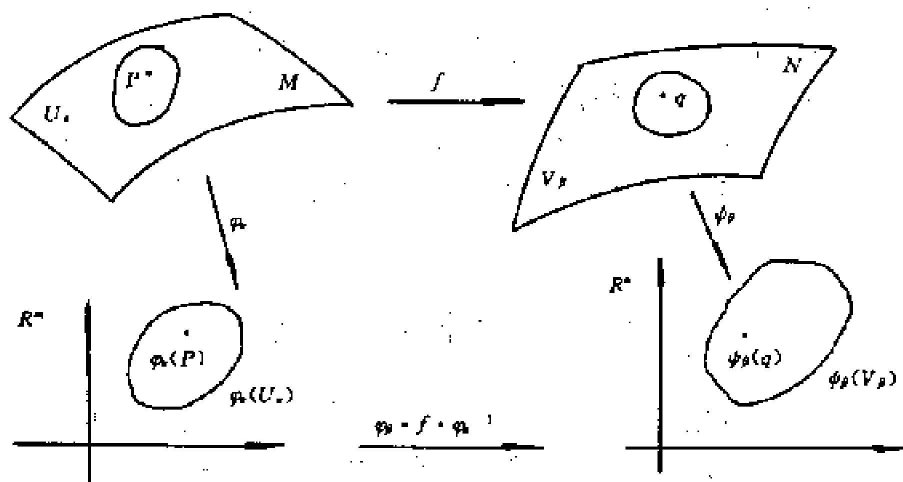


图 5.7

对于含 $q=f(p)$的任何坐标图(V_β,ψ_β)，由于 f 之连续性，存在含 p 之坐标图集$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$(必要时缩小坐标邻域)使$f(U_\alpha)\subset V_\beta$。按假定 f 的局部表现 $\Psi_\beta\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 是可微的，再对 f 的任一局部表现：$\psi'\circ f\circ(\varphi')^{-1}$($\psi'$与 ψ_β，φ'与 φ_α 不一定同属于一个坐标图)，由 p 的任意性，不妨设(U',φ')与(V',ψ')分别是含有 p 和 q 的坐标图，且有 $f(U')\subset V'$，于是 $\psi'\circ f\circ\varphi'^{-1}=(\psi'\circ\psi_\beta^{-1})\circ(\psi_\beta\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1})\circ(\varphi_\alpha\circ\varphi'^{-1})$，由于$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$与$(V',\varphi')$的相容性以及$(V_\beta,\psi_\beta)$与$(V',\psi')$的相容性得知$\psi'\circ\psi_\beta^{-1}\in C^\infty$，$\varphi_\alpha\circ(\varphi'^{-1})\in C^\infty$。所以，$\psi'\circ f\circ\varphi'^{-1}$是可微映射的复合，即 $\psi'\circ f\circ\varphi'^{-1}$可微，因此 f 可微。

特别地，若 $N=R$，则 $M\to R$ 是定义在流形上的函数，类似于定义 7 和定理 3，我们有以下结果。

设 $f:M\to R$，若对任意的 $p\in M$，以及含 p 的任何坐标图(V,φ)，映射：$f\circ\varphi^{-1}$是 C^∞的，则叫 f 是可微的(图 5.8)。

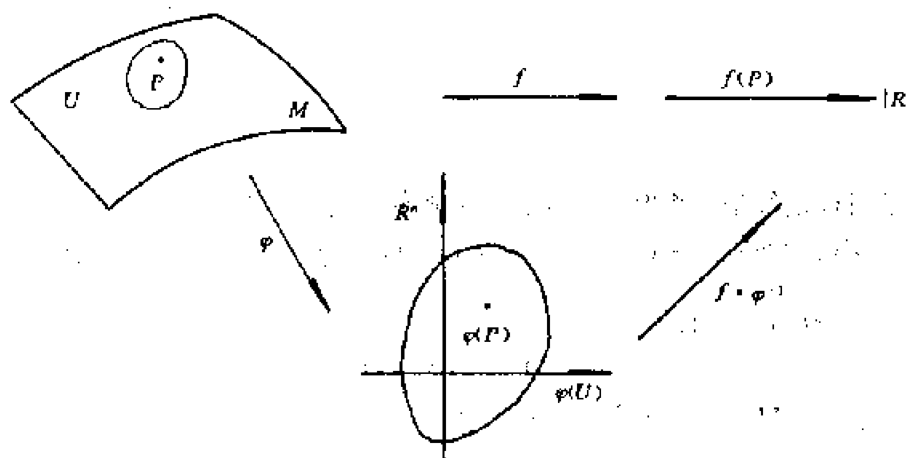


图 5.8

若 f 对 M 的某一个坐标图集，$f\circ\varphi^{-1}\in C^\infty$，则对 M 的一切坐标图集，$f\circ\varphi^{-1}\in C^\infty$，即 f 可微。

应该注意，$f\in C^\infty$并不意味着它有逆存在；更谈不上 f 是同胚。

如果 $f:M\to N$ 为 C^∞的双射，且 $f^{-1}:N\to M$ 是 C^∞的，则 f 是 C^∞同胚。或者说 f 是微分同胚，这时 M 与 N 叫做微分同胚的。两个微分同胚的流形是不加区别的。

如果 $f:M\to N,g:N\to P$ 都是可微映射，则 $g\circ f:M\to P$ 也是可微映射。

事实上，任取 $g\circ f$ 的一个局部表现 $\theta\circ(g\circ f)\circ\varphi^{-1}$。因为 $\theta\circ(g\circ f)\circ\varphi^{-1}=(\theta\circ g\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ f\circ\varphi^{-1})$是 g 的局部表现与 f 的局部表现的复合。所以 $\theta\circ(g\circ f)\circ\varphi^{-1}$是 C^∞的，即 $g\circ f$ 可微。

§ 5.4 切空间和切映射

为了在流形上定义切空间，首先要知道在流形上如何定义切向量，一种方法是把切向量视为 R^n 中可微函数的方向导数的推广，即把切向量视为函数的求导算子。另一种方法是把切向量作为过流形上的“相切”曲线族。然后，指出用这两种方法定义的切向量所形成的切空间是线性同构的，最后介绍切映射的概念及其有关性质。

一、切空间的定义

定义 1 设 M 是微分流形，$I\subset R$ 为包含原点的开区间，若有可微映射 $c:I\to M$，且 $c(0)=x_0$，则映射 c 叫做 M 上过 x_0 的可微曲线，如图 5.9(a)所示。

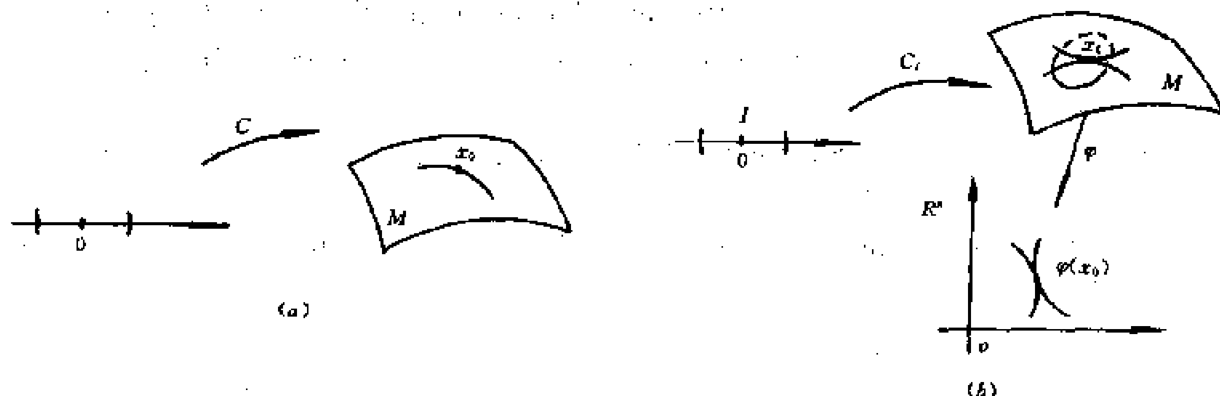


图 5.9

自然，M 上的可微曲线是指映射 c，而不是在 c 映射下的象 $c(I)$。

定义 2 设有可微曲线 $c_i:I\to M$，且 $c_i(0)=x_0(i=1,2)$。若对一个含 x_0 的坐标图(U,φ)，映射 $\varphi\circ c_i:I\xrightarrow{c_i}M\xrightarrow{\varphi}R^n$，使得有

$$d(\varphi\circ c_1)(0)=d(\varphi\circ c_2)(0)$$

则称曲线 c_1 与 c_2 在 $x_0\in M$ 相切，如图 5.9(b)所示。

注意下述例子：

$c_1:I\to R^2$，使 $t\mapsto c_1(t)=(\cos t,\sin t)$

$c_2:I\to R^2$，使 $t\mapsto c_2(t)=(\cos 2t,\sin 2t)$

例如 $I=(-\pi,\pi)$，c_1 和 c_2 有相同的象，它们都是单位圆，但它们在 R^2 中的(1,0)点并不相切。事实上

$$d(\varphi\circ c_1)(0)=dc_1(0)=(-\sin t,\cos t)|_{t=0}=(0,1)$$

$$d(\varphi\circ c_2)(0)=dc_2(0)=(-2\sin 2t,2\cos 2t)|_{t=0}=(0,2)$$

从此可以看到，我们这里讲的曲线相切的概念，与其说是几何概念，不如说是物理概念。即若视 t 为时间，曲线视为运动规律，上述例子表明运动轨迹一样，但运动速度不一样。我们这里讲的曲线相切，应理解为运动有相同速度，在同一运动轨道上，只有速度相同才相切。

应该注意，两曲线相切与坐标图的选取，事实上是没有关系的。因为如果取含 x_0 的另一坐标图 (V,ψ)，则有

$$\begin{aligned}d(\psi\circ c_1)(0)&=d(\psi\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ c_1)(0)\\&=d(\psi\circ\varphi^{-1}(\varphi(x_0))\circ d(\varphi\circ c_2)(0)\\&=d(\psi\circ c_2)(0)\end{aligned}$$

因此，c_1 与 c_2 在 $x_0\in M$ 相切与含 x_0 的坐标图的选取无关。

显然，过 $x_0\in M$ 的可微曲线的相切是一个等价关系。因此，可以将过 x_0 的一切可微曲线的集合 $S_{x_0}(M)$ 分类，每一个等价类称为在 $x_0\in M$ 的一个切向量。若记曲线 c 所在的等价类为 $\hat{c}$，则 $\hat{c}$ 就是在 x_0 的一个切向量。

定义 3 过 $x_0\in M$ 的所有切向量的集合：$S_{x_0}(M)/\sim$，在引进了线性结构之后，称为 M 在 x_0 的切空间，记为 $T_{x_0}(M)$。

例如，通常三维空间中的光滑曲面上的每点有一切平面一样，在此平面上的向量(曲面的切向量)可以定义加法、数乘运称，即切平面有线性结构。所以，对于 $S_{x_0}(M)/\sim$ 要加上线性结构，即要回答 $T_{x_0}(M)$ 构成一个线性空间。

为此，我们先找 $\hat{c}\in T_{x_0}(M)$ 的一个适当的代表元，取定一个含 x_0 的坐标图 (U,φ)，在 $\hat{c}$ 中任取一条曲线 c，作映射

$$d(\varphi\circ c)(\cdot):R\to R^n$$

将它作用到 $1\in R$，便有 $v=d(\varphi\circ c)(\cdot)1\in R^n$，$v$ 是 R^n 中的一个向量。在 R^n 中过 $\varphi(x_0)$ 点有许多相切的曲线，特别选过 $\varphi(x_0)$ 的直线

$$y=\varphi(x_0)+tv,t\in R$$

再返回到 M，有

$$\varphi^{-1}[\varphi(x_0)+tv]\equiv\bar{c}(t)$$

因为

$$d(\varphi\circ\bar{c})(0)1=d[\varphi(x_0)+tv](0)1=v=d(\varphi\circ c)(0)1$$

而 $d(\varphi\circ\bar{c}(0)$ 与 $d(\varphi\circ c)(0)$ 是线性映射，所以，$d(\varphi\circ\bar{c})(0)=d(\varphi\circ c)(0)$。因此，$\bar{c}\in\hat{c}$，$\bar{c}$ 就是我们要找的 $\hat{c}$ 的一个代表元，于是得到一个映射

$$\lambda_\varphi^{x_0}:R^n\to T_{x_0}(M),\lambda_\varphi^{x_0}:v\mapsto\hat{c}$$

可以指出，映射 $\lambda_\varphi^{x_0}:R^n\to T_{x_0}(M)$ 为双射，这样对于 $T_{x_0}(M)$ 可以赋于 n 维线性空间的结构。事实上，若 $\hat{c}_1,\hat{c}_2\in T_{x_0}(M)$，且 $\hat{c}_i=\lambda_\varphi^{x_0}(v_i)$，则对任何 $\mu_i\in R(i=1,2)$。我们定义：

$$\mu_1\hat{c}_1+\mu_2\hat{c}_2=\lambda_\varphi^{x_0}(\mu_1v_1+\mu_2v_2)$$

则 $T_{x_0}(M)$ 便成为线性空间，因此，映射 $\lambda_\varphi^{x_0}:R^n\to T_{x_0}(M)$ 是线性同构映射，即 R^n 与 $T_{x_0}(M)$ 为同构。从而 $T_{x_0}(M)$ 也是 n 维线性空间。

另外，切空间 $T_{x_0}(M)$ 的定义不依赖于 M 上含 x_0 的坐标图的选取。因为 $\lambda_\varphi^{x_0}$ 与 $(\lambda_\varphi^{x_0})^{-1}$ 是线性同构映射，从而用不同的坐标图得到的切空间是线性同构的，故 $T_{x_0}(M)$ 的线性空间结构与

坐标图的选取无关。

二、切空间的另一个定义

微分流形 M 上一点 x_0 的切向量还可以定义为在 x_0 附近的可微函数的求导算子即一个满足线性和 Leibniz 法则的映射，其实在 R^n 中任给一向量 v，都可以定义方向导数算子 $\frac{\partial}{\partial v}$，且对在 x_0 附近的可微函数 f，g 有

$$\frac{\partial}{\partial v}(fg)_{x_0} = f(x_0)\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)_{x_0} + g(x_0)\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{x_0}$$

定义 4 设 $x_0 \in M$，而 f、g 是定义在 x_0 附近的可微函数，如果 $L: C^\infty(M) \to R$ 是线性映射，而且对含 $x_0 \in M$ 的某个邻域内的可微函数 f、g 有

$$L(f \cdot g) = f(x_0)L(g) + g(x_0)L(f)$$

则 L 叫做在 x_0 的求导算子。求导算子 L 就叫做 M 在 x_0 点的切向量。所有在 x_0 点的求导算子的集合 $\{L\}$，并定义自然的线性结构，从而形成一个线性空间 $\{L\}$，这时 $\{L\}$ 就称为流形 M 在 x_0 点的切空间。可证明 $\{L\}$ 和 $T_{x_0}(M)$ 为线性同构，因此 M 在 x_0 点的切空间的两个定义一致。

设 $x_0 \in M$，取含 x_0 的坐标图 (U,φ)，$\varphi(U) \subset R^n$，如果取 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 R^n 中的基底，记相应向量 e_i 的在 x_0 的求导算子为 $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_0}$，即

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_0}(\cdot) \equiv \frac{\partial}{\partial y_i}(\cdot \circ \varphi^{-1})(0) = \frac{\partial}{\partial e_i}(\cdot \circ \varphi^{-1})(0)$$

其中，y_i 是 R^n 中的点在基底 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 下的第 i 个坐标。

定理 1 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{x_0},\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_{x_0},\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{x_0}\right\}$ 是 $T_{x_0}(M)$ 的基底。

证明 为简单计，我们常以 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 表示相应向量 e_i 的在 x_0 的求导算子。任取 $L_{x_0} \in \{L\}$，以及任意的 $f \in C^\infty(U)$，有

$$\begin{aligned} L_{x_0}(f) &= \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial y_i}(f \circ \varphi^{-1})(y_0) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} f \end{aligned}$$

所以

$$L_{x_0} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

其中，$y_0 = \varphi(x_0)$；$a_i = L_{x_0}(\varphi_i)$，即 $\{L\}$ 中的任一元都可以写成 $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ 的线性组合。

再证 $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ 是线性无关的，事实上，若有 $\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$，则因为

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}(\varphi_j \circ \varphi^{-1})(y_0) = \delta_{ij}$$

所以

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_j) = 0, j = 1,\cdots,n$$

即 $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ 线性无关。

根据定理 1，对 R^n 中取定一个基底：$\{e_1,\cdots,e_n\}$，$T_{x_0}(M)$便相应有一个基底$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$，对于 $T_{x_0}(M)$中的任一向量 L_{x_0}，设有

$$L_{x_0}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

则$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$叫做 L_{x_0}在基底$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$下的坐标，下面讨论当 $T_{x_0}(M)$中的基底改变时，相应的切向量的坐标如何改变？为此，取 R^n 中的另一个基底：$\{e'_1,\cdots,e'_n\}$，并设由$\{e_1,\cdots,e_n\}$至$\{e'_1,\cdots,e'_n\}$的过渡方阵为 A，即

$$e'_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}e_i,A=(a_{ij}),i,j=1,2,\cdots,n$$

或者形式地写为

$$e'=(e'_1,\cdots,e'_n)^T=A^T(e_1,\cdots,e_n)^T=A^Te \tag{5.4.1}$$

若$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$与$\left\{\frac{\partial}{\partial x'_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x'_n}\right\}$是 $T_{x_0}(M)$中分别相应于 R^n 中取基底$\{e_1,\cdots,e_n\}$与$\{e'_1,\cdots,e'_n\}$的基底，则对含 x_0 的任一个坐标图(U,φ)以及任何的 $f\in C^\infty(U)$，有

$$\begin{aligned}L_{x_0}(f)&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial}{\partial x_i}(f)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial}{\partial y_i}(f\circ\varphi^{-1})(y_0)\\&=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial}{\partial y'_j}(f\circ\varphi^{-1})(y'_0)\frac{\partial y'_j}{\partial y_i}(y_0)\\&=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i\tilde{a}_{ij}\frac{\partial}{\partial y'_j}(f\circ\varphi^{-1})(y'_0)=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\frac{\partial}{\partial x'_j}(f)\end{aligned}$$

其中，$y_0=\varphi(x_0)\in R^n$；$y'_0=\varphi(x_0)$；$\beta_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\tilde{a}_{ij}$，$\tilde{a}_{ij}=\left(\frac{\partial y'_j}{\partial y_i}\right)_{x_0}$，且$(\tilde{a}_{ij})=(A^{-1})^T$，或者

$$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)^T=A^{-1}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)^T=[(A^T)^T]^{-1}\alpha. \tag{5.4.2}$$

比较(5.4.1)与(5.4.2)两式，说明 L_{x_0}对基底的坐标变换规律与基底的变换规律相反，即 L_{x_0}是逆变向量。我们把它写成

定理 2 流形上的一点 x_0 的切向量是逆变向量。

有了这个定理，可按古典分析作以下形式的计算，十分方便。即

$$\begin{aligned}L_{x_0}&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x'_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x'_j}\\&=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\tilde{a}_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial x'_j}=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\frac{\partial}{\partial x'_j}\end{aligned}$$

其中，$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$、$(\beta_1,\cdots,\beta_n)$、$(\tilde{a}_{ij})$的意义同前。

定义 5 $T_{x_0}(M)$的对偶空间称为 M 在 x_0 点的余切空间，记为 $T^*_{x_0}(M)$，$T^*_{x_0}(M)$之元叫做 M 在 x_0 点的余切向量(Cotagent Vector)。

如果$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$是 $T_{x_0}(M)$的基底，在 $T^*_{x_0}(M)$中取相应的对偶基底为$\{dx_1,\cdots,dx_n\}$，则应有

---

* 注意：若(U,φ)是含 x_0 的坐标图，$x_0\in U$，若 $\varphi(x_0)=(\varphi_1(x_0),\cdots,\varphi_n(x_0))$，如果视$\{x_1,\cdots,x_n\}$为局部坐标，则有 $\varphi_i=x_i$，$i=1,2,\cdots,n$。

$$<\frac{\partial}{\partial x_i}, \mathrm{d}x_j> = \delta_{ij}$$

而对在 $x_0 \in M$ 的每一个余切向量 ξ_{x_0}，可记为

$$\xi_{x_0} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{d}x_i$$

如果在 R^n 中换一个基底，且设 $\xi_x = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathrm{d}x'_i$，类似地可以证明，余切向量 ξ_{x_0}是协变向量。

应该指出，为应用方便，我们把切空间 $T_{x_0}(M)$基底的变化，以及相应的坐标变换关系表述得更明确一些。

因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f)}{\partial x'_j} &= \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial y'_j}(y'_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial y_i}(y_0) \frac{\partial y_i}{\partial y'_j}(y'_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial y'_j} \frac{\partial(f)}{\partial x_i}\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial x'_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial y'_j} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

即

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x'_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial y'_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial y'_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial y'_n} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial y'_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

相应的切向量的坐标变换有：

若 $\sum_{j=1}^{n} \beta_j \frac{\partial}{\partial x'_j} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$，则

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y'_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial y'_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y'_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial y'_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

类似地，若在 $T^*_{x_0}(M)$中有相应的对偶基底 $\{\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_n\}$ 与 $\{\mathrm{d}x'_1, \cdots, \mathrm{d}x'_n\}$。即

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \mathrm{d}x_j\right) = \delta_{ij}, \left(\frac{\partial}{\partial x'_i}, \mathrm{d}x'_j\right) = \delta_{ij}$$

$$\mathrm{d}x'_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \mathrm{d}x_j$$

则

$$\begin{aligned}\delta_{ij} &= \left(\frac{\partial}{\partial x'_i}, \mathrm{d}x'_j\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial y'_i} \frac{\partial}{\partial x_k}, \sum_{l=1}^{n} \lambda_{jl} \mathrm{d}x_l\right) \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} \lambda_{j,l} \frac{\partial y_k}{\partial y'_i} \delta_{kl} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{j,k} \frac{\partial y_k}{\partial y'_i}\end{aligned}$$

因此，$(\lambda_{j,k})$为$\left(\frac{\partial y_k}{\partial y'_i}\right)$的逆矩阵。所以，$\mathrm{d}x'_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y'_i}{\partial y_j} \mathrm{d}x_j$。即

$$\begin{bmatrix} dx'_1 \\ \vdots \\ dx'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y'_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial y'_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y'_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial y'_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

关于余切向量的坐标变换有：如果令 $\theta \in T^*_{x_0}(M)$，且

$$\sum_{i=1}^{n} \theta'_i dx'_i = \theta = \sum_{i=1}^{n} \theta_i dx_i$$

则

$$\theta'_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial y'_i} \theta_j$$

即

$$\begin{bmatrix} \theta'_1 \\ \vdots \\ \theta'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial y'_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial y'_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial y'_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial y'_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}$$

三、切 映 射

设 M、N 分别是 m 维、n 维微分流形，$f: M \to N$ 是可微映射，又设 $x \in M$，$y = f(x) \in N$，我们可以由 f 诱导出 $T_x(M)$ 至 $T_y(N)$ 的一个线性映射，如图 5.10 所示。

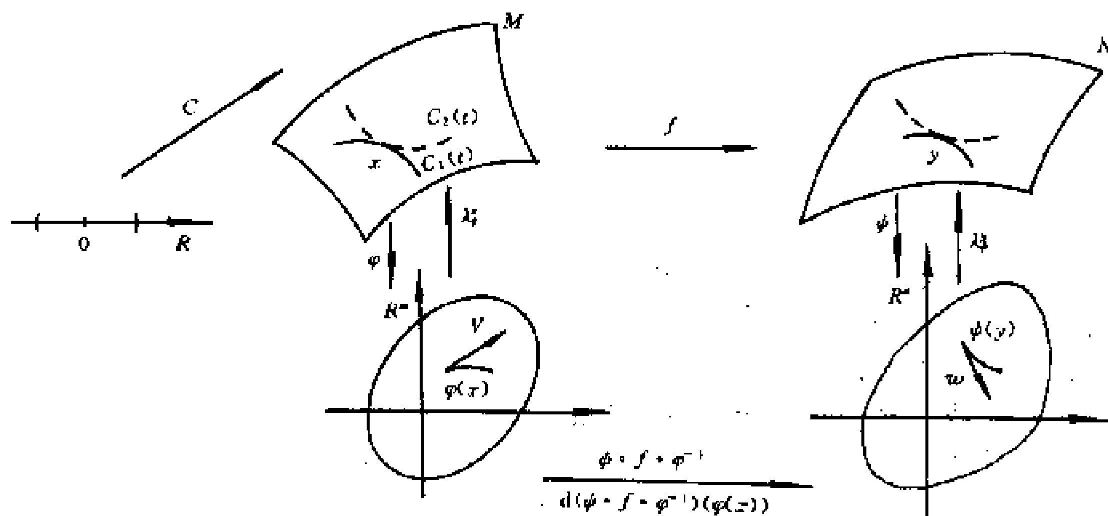


图5.10

设有过点 $x \in M$ 的曲线 $c: R \to M$，使 $c(0) = x$，则 $f \circ c: R \to N$ 是过点 $y \in N$ 的曲线，且有 $f \circ c(0) = f(x) = y$. 若 c_1 与 c_2 在 x 点相切，则 $f \circ c_1$ 与 $f \circ c_2$ 也在 y 点相切。这是因为，若取含 x 的坐标图(U, φ, m)与含 y 的坐标图(V, ψ, n)，且使 $f(U) \subset V$，则

$$d(\varphi \circ c_1)(0) = d(\varphi \circ c_2)(0)$$

而

$$\begin{aligned} d(\psi \circ f \circ c_1)(0) &= d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \circ d(\varphi \circ c_1)(0) \\ &= d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \circ d(\varphi \circ c_2)(0) \\ &= d(\psi \circ f \circ c_2)(0) \end{aligned}$$

即 $f\circ c_1$ 与 $f\circ c_2$ 在 $y\in N$ 相切。因此，有一个映射，它把 c_1 所在的等价类，即 M 在 x 点的一个切向量，映射成 $f\circ c_1$ 所在的等价类，即 N 在 y 点的一个切向量，这个映射记作 T_xf。

定义 6 映射 $T_xf:T_x(M)\to T_y(N)$ 使得 $\hat{c}\in T_x(M)\mapsto f\cdot\hat{c}\in T_y(N)$，叫做 f 在 x 点的切映射。$d(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x))$ 叫做 T_xf 在坐标图 (U,φ,m) 与 (V,φ,n) 下的局部表现。

定理 3 T_xf 是 $T_x(M)$ 至 $T_y(N)$ 的线性映射。

证明 任取 $\hat{c}\in T_x(M)$，并取其代表元 c_v，使 $c_v(t)=\varphi^{-1}[\varphi(x)+tv]$。若记 $v=d(\varphi\circ c_v)(\circ)\cdot 1\in R^m, w=d(\psi\circ f\circ c_v)(\circ)\cdot 1\in R^n$。如图 5.10，则有

$$\begin{aligned} w &= d(\psi\circ f\circ c_v)(0)\cdot 1 \\ &= d(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x))\circ d(\varphi\circ c_v)(0)\cdot 1 \\ &= d(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x))\cdot v \end{aligned}$$

即由 R^m 到 R^n 有线性映射 $d(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x))$，它把 $v\in R^m$ 映成 $w\in R^n$，又因为 $T_x(M)$ 与 R^m，$T_y(N)$ 与 R^n 之间有线性同构映射 $\lambda_\varphi^x,\lambda_\psi^y$，于是

$$\begin{aligned} T_xf(\hat{c}) = \lambda_\psi^y(w) &= \lambda_\psi^y\circ d(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x))v \\ &= \lambda_\psi^y\circ d(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x))\circ(\lambda_\varphi^x)^{-1}(\hat{c}) \end{aligned}$$

由于 $\hat{c}\in T_x(M)$ 的任意性，便有

$$T_xf = \lambda_\psi^y\circ d(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x))\circ(\lambda_\varphi^x)^{-1}$$

即 T_xf 是三个线性映射的复合，故为线性映射。

定理 4（切映射的链法则） 设有微分流形 M,N,P，以及其间的可微映射

$$f:M\to N,\ g:N\to P$$

则

$$T_x(g\circ f) = T_yg\circ T_xf$$

其中，$x\in M$；$y=f(x)\in N$。

证明略。

必须注意：

(1)切映射的定义与流形 M、N 上的坐标图的选取无关；

(2)在图 5.10 中，φ、ψ 是点变成点的映射，而 T_xf 是向量变成向量的映射。自然，λ_φ^x、λ_ψ^y 也是向量变成向量的映射，因此，切映射是由点变成点的映射诱导出来的向量之间的映射。

至目前为止，我们还未讨论流形间可微映射的微分。在许多书上把切映射 $T_xf=f_*:T_x(M)\to T_y(N)$ 就称映射 $f:M\to N$ 的微分或导数，并记为 $Df(x)$。实际上，若 $f:M\to N$ 是可微映射，M 和 N 分别是 m 维和 n 维微分流形，映射 f 在 $x\in M$ 点的微分是指映射

$$Df(x):T_x(M)\to T_y(N),\ y=f(x)$$

使得对任何 $g\in C^\infty(N)$，有

$$(Df(x)\cdot X)g = X(g\circ f)$$

其中，$X\in T_x(M)$。

很容易验证，$Df(x)\cdot X$ 确实是 $f(x)\in N$ 点的切向量，且 $Df(x)$ 是线性映射。特别地，若取 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\in T_x(M)$，则有(图 5.11)

$$\begin{aligned} \left(Df(x)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\right)g &= \frac{\partial}{\partial x_i}(g\circ f) = \frac{\partial(g\circ f\circ\varphi^{-1})}{\partial\bar{x}_i}(\bar{x}) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(g\circ\psi^{-1})}{\partial\bar{y}_j}(\bar{y})\cdot\frac{\partial\bar{y}_j}{\partial\bar{x}_i} \end{aligned}$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\bar{y}_j}{\partial\bar{x}_i}\frac{\partial}{\partial y_j}\right)g$$

这里(U,φ),(V,ψ)分别是含 x 和 $f(x)=y$ 的坐标图。$\bar{x}=\varphi(x)=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_m)\in R^m$,$\bar{y}=\psi(y)=(\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n)\in R^n$,由于 g 的任意性,有

$$Df(x)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\bar{y}_j}{\partial\bar{x}_i}\frac{\partial}{\partial y_j}$$

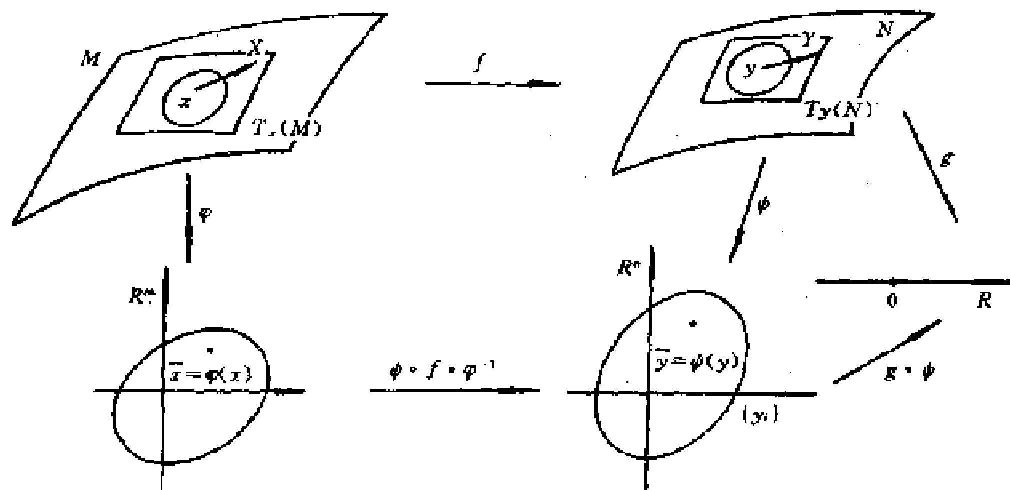


图5.11

亦即

$$\begin{bmatrix}Df(x)\cdot\dfrac{\partial}{\partial x_1}\\ \vdots\\ Df(x)\cdot\dfrac{\partial}{\partial x_m}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\bar{y}_1}{\partial\bar{x}_1}&\cdots&\dfrac{\partial\bar{y}_n}{\partial\bar{x}_1}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ \dfrac{\partial\bar{y}_1}{\partial\bar{x}_m}&\cdots&\dfrac{\partial\bar{y}_n}{\partial\bar{x}_m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial}{\partial y_n}\end{bmatrix}$$

因此,线性映射 $Df(x):T_x(M)\to T_y(N)$ 在基底$\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x_m}\right\}$,$\left\{\dfrac{\partial}{\partial y_1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial y_n}\right\}$下的矩阵表示是$\left(\dfrac{\partial\bar{y}_i}{\partial\bar{x}_j}\right)_{n\times m}$

若令 $x=\sum\limits_{i=1}\alpha_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$,$y=Df(x)\cdot X=\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j\dfrac{\partial}{\partial y_j}$,则有

$$\beta_j=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\frac{\partial\bar{y}_j}{\partial\bar{x}_i},j=1,\cdots,n$$

即

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\bar{y}_1}{\partial\bar{x}_1}&\cdots&\dfrac{\partial\bar{y}_1}{\partial\bar{x}_m}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ \dfrac{\partial\bar{y}_n}{\partial\bar{x}_1}&\cdots&\dfrac{\partial\bar{y}_n}{\partial\bar{x}_m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}$$

由以上讨论可知,这里定义的 f 在 $x\in M$ 点的微分的矩阵表示,恰是 f 的局部表现 $\psi\cdot f\circ\varphi^{-1}$ 的微分 $D(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\psi(x))$,与切映射 T_xf 比较,它们只不过相差同构映射 λ_x^φ,λ_y^ψ。因此,人们想把 $Df(x)$ 与 T_xf 不加区别,而叫切映射就是 f 在 $x\in M$ 上的微分。

§ 5.5 微分流形的切性质

本节将讨论与切映射有关的几个重要概念，然后建立流形上的反函数定理以及隐函数定理。

一、内浸与外罩

定义 1 如果 M、N 是两个同维的微分流形，且 $f:M\to N$ 是可微映射，f 能同胚地(C^∞ 同胚)映射 $x\in M$ 的某一邻域到 $y=f(x)\in N$ 的某一邻域，则称 f 在 x 点是局部同胚的。

定理 1 f 在 $x\in M$ 点是局部微分同胚的充分必要条件是 T_xf 为双射。

证明 若 $x\in M$，$y=f(x)\in N$，作两个分别包含 x 与 y 的坐标图：(U,φ) 与 (V,ψ)，且使 $f(U)\subset V\subset N$，于是 f 有局部表现：$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:R^n\to R^n$。因为 φ 与 ψ 是局部同胚，所以 f 与 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 同时局部同胚。即：

f 在 x 点局部同胚，$\Leftrightarrow\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 在 $\varphi(x)\in R^n$ 点局部同胚，但是，在 R^n 中的反函数定理，有：$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 在 $\varphi(x)$ 点局部同胚 $\Leftrightarrow \mathrm{d}(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x))$ 为双射。

又因为 $T_xf=\lambda_\psi^y\circ\mathrm{d}(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x))\circ(\lambda_\varphi^x)^{-1}$，而 λ_ψ^y 与 $(\lambda_\varphi^x)^{-1}$ 是同构映射，故为双射。因此，f 在 x 点局部同胚 $\Leftrightarrow T_xf$ 为双射。

本定理实际上就是微分流形上的反函数定理。

定义 2 设 $f:M\to N$ 是可微映射，则切映射 T_xf 之秩就称为 f 在 $x\in M$ 点的秩。

显然，当 $M=R^m$，$N=R^n$ 时，$T_xf=Df(x)$，因此，流形间的映射的秩是 Euclid 空间之间映射的秩的概念的推广。[1]

定义 3 如果 $f:M\to N$ 是可微映射，又 T_xf 为单射，则称 f 在 $x\in M$ 点为内浸(immersion)。如果 T_xf 为满射，则称 f 在 $x\in M$ 点为外罩(submersion)。

定理 2 如果 $f:M\to N$ 是可微映射，且 f 在 x_0 点为内浸，则必有包含 $x_0\in M$ 的坐标图 (U,φ,m) 与包含 $y_0=f(x_0)\in N$ 的坐标图 (V,ψ,n)，其中 $m\leqslant n$，$f(U)\subset V$，使得 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:R^m\to R^n$ 为

$$(x_1,\cdots,x_m)\mapsto(x_1,\cdots,x_m,\overbrace{0,\cdots,0}^{n-m\text{个}})$$

即 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 为包含映射。

证明 对于 $x_0\in M$ 与 $y_0=f(x_0)\in N$，作分别包含 x_0 与 y_0 的坐标图 (U,φ,m) 与 (V,ψ,n)，且设 $f(U)\subset V$。再设 $\varphi(x)=(x_1,\cdots,x_m)$，$x\in U$；$\psi'(y)=(y_1,\cdots,y_n)$，$y\in V$。不妨设 $\varphi(x_0)=0$，$\psi'(y)=0$，则有

$$(y_1,\cdots,y_n)=\psi'\circ f\circ\varphi^{-1}(x_1,\cdots,x_m)$$

其中，$(x_1,\cdots,x_m)\in\varphi(U)\subset R^m$，$\psi'\circ f\circ\varphi^{-1}$ 是 f 的局部表现。若记

$$\tilde{f}=\psi'\circ f\circ\varphi^{-1}:R^m\to R^n$$

而 $T_{x_0}f=\lambda_{\psi'}^{y_0}\circ\mathrm{d}(\psi'\circ f\circ\varphi^{-1})(0)\circ(\lambda_\varphi^{x_0})^{-1}$，由题设 $T_{x_0}f$ 为单射，故知 $\mathrm{d}(\psi'\circ f\circ\varphi^{-1})(0)=d\tilde{f}(0)$ 为单射，于是在 R^n 中可以找到一个微分同胚 ψ''，使在 R^m 的原点附近 $\psi''\circ\tilde{f}$ 为包含映射，即 $\psi''\circ\tilde{f}=\psi''\circ\psi'\circ f\circ\varphi^{-1}$ 为包含映射，令 $\psi=\psi''\circ\psi'$，则 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 为包含映射，即

[1] 若 $f:\Omega\subset R^n\to R^m$，在 $x\in\Omega$ 可微，则 $Df(x)\in L(R^n,R^m)$，$\mathrm{rank}Df(x)$ 就叫做 f 在 x 处的秩。

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1,\cdots,x_m) = (x_1,\cdots,x_m,0,\cdots,0)$$

定理 3 如果 $f:M\to N$ 在 x_0 为外罩，则必有包含 $x_0\in M$ 与 $y_0=f(x_0)\in N$ 的坐标图 (U,φ,m) 与 $(V,\psi,n)(m\geqslant n)$，使 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:R^m\to R^n$ 为

$$(x_1,\cdots,x_m)\mapsto(x_1,\cdots,x_n)$$

即 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 为投影映射。

证明 记

$$\bar{f} = \psi\circ f\circ(\varphi')^{-1}:R^m\to R^n$$

为 f 的局部表现，由题设 f 在 x_0 为外罩，即 T_{x_0} 为满射，此对 $d\bar{f}(0)$ 为满射，于是在 R^m 中可以找到一个微分同胚 φ''，使 $\bar{f}\circ\varphi''$ 在 0 点附近为投影映射。即 $\psi\circ f\circ(\varphi')^{-1}\circ\varphi''$ 为投影映射。如果令 $\varphi=(\varphi'')^{-1}\circ\varphi'$，则 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 为投影映射。

定义 4 如果 $f:M\to N$，在 M 上的每点都是内浸（或外罩），则称 f 在 M 上为内浸（或外罩）。

应该注意，若 f 在一点 $x\in M$ 为内浸，则 M 与 $f(M)\subset N$ 是局部微分同胚，但从大范围来看，M 与 $f(M)$ 不一定同胚，如图 5.12 所示。即使 f 在 M 上为内浸，大范围也不一定同胚。

如果再加上 M 与 $f(M)$ 是一对一的条件，大范围还可能不同胚。如图 5.13 所示，这是一个非紧流形对应于一紧流形，故不同胚。

另外，也可能存在这样的可微映射，它们是整体地一对一，但非内浸，比如 $f:R\to R$，$f(x)=x^3$，$T_xf=Df(x)$ 在 $x=0$ 非单射，即 f 在 $x=0$ 非内浸，但它却是一对一的。

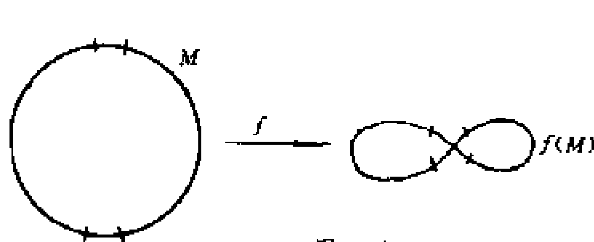


图 5.12



图 5.13

二、嵌入与子流形

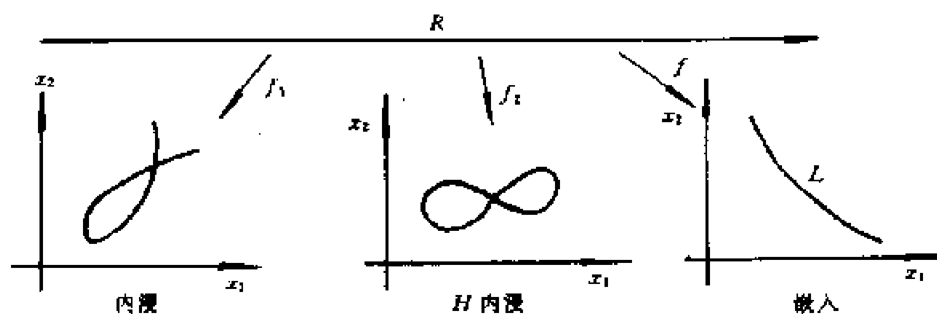
从上面的分析可以看到，如果 $f:M\to N$ 为内浸，则它在整体上不一定为单射，即使是单射，M 与 $f(M)\subset N$（具有 N 的相对拓扑）也不一定同胚。当 f 为单射时，可以通过 f 把 M 的微分构造"搬到"$f(M)$ 上来：$f(M)$ 上的开集，即 M 的开集 U 的象，$f(M)$ 的坐标图即 M 上的坐标图 (U,φ) 与 f 复合而得 $(f(U),\varphi\circ f^{-1})$。从而 $f(M)$ 成为微分流形，但其拓扑与 N 赋于它的相对拓扑一般并不一致，这时我们把 $f(M)$ 称为 N 的内浸子流形。

定义 5 如果 $f:M\to N$ 的内浸，且在整体上是一个单射，又如果当 $f(M)\subset N$ 被赋以 N 的相对拓扑时，f 是一个同胚，则称 f 为嵌入（imbedding）。如图 5.14 所示的情形，f 是内浸，而 f 不是同胚，所以 f 不是嵌入。

定义 6 如果 $f:M\to$N 是嵌入，则称 $f(M)$ 为 N 的嵌入子流形，或正则子流形。

对于嵌入子流形，$V\subset f(M)$ 为开集当且仅当存在 N 中的一个开集 W，使 $V=W\cap f(M)$，由 f 的连续性，V 在 M 中的原象仍然为开集 U，但是，$V=f(U)$ 即使在内浸子流形的情况下也是 $f(M)$ 的开集，只不过在内浸情况下，$f(M)$ 还可能有不是形如 $W\cap f(M)$ 的开集。因此，内浸子流形的拓扑一般应"细于"（finer than）嵌入子流形的拓扑。以下我们讲到的子流形，都是嵌

入子流形，或者正则子流形，为直观起见，我们将上述内浸、嵌入、子流形等概念，作如图 5.14 所示，其中 $f_i:R\to R^2$ 是可微映射，$i=1,2,3$。下面先看 R^n 的子流形。



因为 f_1 非单射故 f_1 非嵌入　　因为 f_2 不同胚故 f_2 非嵌入　　$L\subset R^2$ 为子流形

图 5.14

定义 7　设 $M\subset R^n$，如果对一切 $x\in M$ 均可找到它在 R^n 中的开邻域 W，以及一个微分同胚 φ，使 $\varphi(W\cap M)$ 为 R^n 的一个 m 维线性子空间上的开集，则称 M 是 R^n 的 m 维子流形。

由此定义可以看出：包含映射 $i:M\to R^n$ 是一个嵌入，所以这里的子流形是嵌入子流形。

例 1　S^2 是 R^3 中的(嵌入)子流形，其中微分同胚 φ 就是球极投影。

例 2　如果 $f:R^m\to R^n$ 是可微映射，其图象 $\Gamma=\{(x,f(x)\}\subset R^m\times R^n$ 是 $R^m\times R^n$ 中的 m 维子流形，其中上述的微分同胚 φ 就是映射：$(x,y)\to(x,y-f(x))$，它将 Γ 映成 m 维子空间 $R^m\times\{0\}\subset R^m\times R^n$。

再看一般的 n 维微分流形 N 的子流形 M 的定义。

定义 8　设 N 为一个 n 维微分流形，$M\subset N$，如果任一点 $p\in M$ 都有 N 的坐标图 (U,φ)，使 $\varphi(M\cap N)$ 是 R^n 的 m 维子流形，则称 M 为 N 的 m 维子流形。

由此定义，我们可以在 N 中选择一个 $p\in M\subset N$ 附近的局部坐标 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，使

$$\varphi(M\cap U)=\{x\in U\,|\,x_{m+1}=\cdots=x_n=0\}$$

将 φ 限制在 $M\cap U$ 上可得到一个坐标图，从而可以得到 M 的一个坐标图集使其成为微分流形，而且，这样得到的 M 的一个拓扑也就是 N 所赋予的相对拓扑。由此可知，这样定义的子流形正是由包含映射 $i:M\to N$ 所得到的嵌入子流形。

附注：任何一个 m 维微分流形都可嵌入在维数 $\leqslant 2m+1$ 的 Euclid 空间中，而成为其闭子流形，这就是著名 Whitney 定理，其证明可参看微分拓扑的专著。

例 3　一个微分流形 M 的开集 U 是 M 的子流形，这时 U 又称为 M 的开子流形。显然，开子流形的维数与 M 的维数相同。

定义 9　如果 $f:M\to N$，且 f 在点 $p\in M$ 为外罩，则 p 点称为 f 的正则点(regular point)，否则称为临界点(critical point)。又如果 $q\in N$，且 $f^{-1}(q)$ 中的一切点都为 f 的正则点，则 q 称为 f 的正则值(regular value)，否则，q 称为临界值(critical value)。如果 $f^{-1}(q)=\varnothing$，则 q 也称为正则值。

例 4　设 $f:R^n\to R$ 是可微函数，$f(x)=y,x\in R^n$，或 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$。若 f 在 x 点为外罩，即 $T_xf=Df(x):R^n\to R$ 为满射，亦即 $Df(x)$ 的秩等于 1，因此，$\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right\}=\text{grad}f\neq 0$。而使

$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\cdots=\frac{\partial f_n}{\partial x_n}=0$ 的点 x，又叫 f 的临界点。因此，流形上的临界点的概念与古典分析中临界点的概念是一致的。

如果 $f: R^2\to R$ 是可微映射，如图 5.15 所示，$y=f(x_1,x_2)$；p_1、p_2、p_3 为临界值，y_2 为正则值，可以证明，临界值之截口：$f^{-1}(y_1)$、$f^{-1}(y_3)$、$f^{-1}(y_4)$不是微分流形，而正则值的截口：$f^{-1}(y_2)$是微分流形。

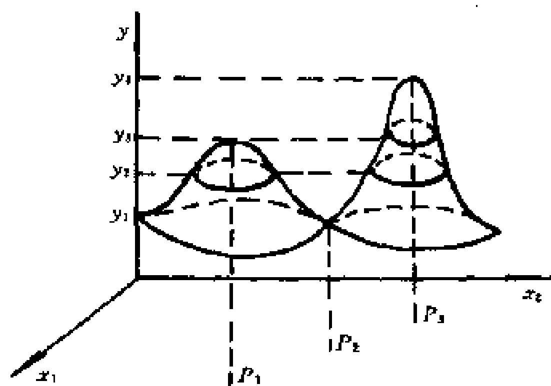


图 5.15

定理 4 如果 $f:M\to N$ 是可微映射，且 $q\in N$ 是 f 的正则值，则 $f^{-1}(q)$是 M 的子流形。

证明 设 $p\in f^{-1}(q)$，则 p 是 f 的正则点，根据正则点的定义，即知 T_pf 为满射，根据定理 3，必有分别包含 p 点与 q 点[$q=f(p)$]的坐标图：(U,φ,m)与(V,ψ,n)，且有 $f(U)\subset V$，$m\geqslant n$，使得 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:R^m\to R^n$ 为投影映射

$$(x_1,\cdots,x_m)\mapsto(x_1,\cdots,x_n)$$

并且 $\psi(q)=0\in R^n$，$\varphi(p)=0\in R^m$. 因此，对 $f^{-1}(q)$中在 p 点附近的点 x，即对 $x\in f^{-1}(q)\cap U$ 有

$$\varphi(x)=(0,\cdots,0,x_{n+1},\cdots,x_m)\in R^m$$

因此，如果令 $U'=f^{-1}(q)\cap U$，则 U'是 $f^{-1}(q)$中的开集，再令：$\varphi'=\varphi|_{U'}$，则$\{(U',\varphi')\}$便是 $f^{-1}(q)$上的坐标图集，即 $f^{-1}(q)$是微分流形，且是 $m-n$ 维的子流形。

将定理 4 与古典的隐函数定理比较，不难看出，它就是隐函数定理。

例 5 n 阶正交矩阵的集合 $O(n)$是维数为 $\frac{1}{2}n(n-1)$的微分(子)流形。

事实上，如果记一切 n 阶矩阵的集合为 $M(n)$，因为 $M(n)$同构于 R^{n^2}，故 $M(n)$为 n^2 维的微分流形，而

$$O(n)=\{A\,|\,AA^T=I,A\in M(n)\}$$

如果记 $S(n)$是一切 n 阶对称方阵的集合，则易知 $S(n)$同构于 R^k，$k=\frac{1}{2}n(n+1)$，即 $S(n)$为 $M(n)$的子流形。我们注意到 AA^T 为对称方阵，所以，如果令 $f:M(n)\to S(n)$，使 $f(A)=AA^T$，则 f 是可微映射，而且 $O(n)=f^{-1}(I)$。所以，为了证明 $O(n)$是微分流形，根据定理 4，只需证明 I 是 f 的一个正则值，即要证明 f 在 $A\in f^{-1}(I)$处的切映射 T_Af 为满射。

事实上，因为 $T_Af=\mathrm{d}f(A)$，但是，

$$\begin{aligned}f(A+B)-f(A)&=(A+B)(A+B)^T-AA^T\\&=BA^T+AB^T+BB^T\end{aligned}$$

所以，$\mathrm{d}f(A)=BA^T+AB^T$。要证明 $\mathrm{d}f(A)$为满射，只要证明对任何 $C\in S(n)$，方程：$BA^T+AB^T=C$ 都有解。这是不难证明的，只要取 $B=\frac{1}{2}CA$，综上述得知，$O(n)$是 $M(n)$的一个子流形，其维数为 $n^2-\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}n(n-1)$，$O(n)$又叫 n 阶正交群。

例 6 球面 $S^n\subset R^{n+1}/\{0\}\subset R^{n+1}$是 R^{n+1}的子流形，其实，令

$$f:R^{n+1}\to R,f(x_1,\cdots,x_{n+1})=\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2$$

则$S^n=f^{-1}(1)$，要证明S^n是R^{n+1}的子流形，只需证明在$f^{-1}(1)$的每一点，$T_xf=\mathrm{d}f(x)$为满射，即证1为f的正则值，而$\dim R=1$，故只需证明在$f^{-1}(1)$的每一点有$\mathrm{d}f(x)\neq 0$,但$\mathrm{d}f(x)=(2x_1,\cdots,2x_{n+1})$,对一切在$f^{-1}(1)$上的点有$\mathrm{d}f(x)\neq 0$,所以,$S^n$为$R^{n+1}$的子流形,但其维数$=n+1-1=n$。

三、横 截 性

上面介绍的嵌入是一个整体性的概念,下面介绍另一个重要的整体性概念——横截性(tranversality)。

前面我们已经讨论过，如果$f: M\to N$是可微映射，x和y是f的正则值，则方程$y=f(x),x\in M$的解集$f^{-1}(y)$是M的一个微分子流形。现在考虑函数值$y\in N$满足一光滑条件(而不是一个定值)时,例如$y\in Z$,而Z是N的一个子流形时,$f^{-1}(Z)$是否还是M的子流形?这就要由f的所谓横截性来解决。

定义 10 设$f:M\to N$是可微映射,且$Z\subset N$是子流形,如果$f^{-1}(Z)=\varnothing$,或者对每一个$x\in f^{-1}(Z)$,有

$$T_y(Z)+Im(T_xf)=T_y(N) \tag{5.5.1}$$

其中，$y=f(x)\in Z\subset N$，则称f横截于N的子流形Z,记为$f\Phi Z$。式(5.5.1)中称为横截性条件。

定理 5 如果$f:M\to N$是可微映射,且f横截于子流形$Z\subset N$,则原象$f^{-1}(Z)$是M的子流形,且$f^{-1}(Z)$在M中的余维数等于Z在N中的余维数。

证明 任取$x\in f^{-1}(Z)$,并取包含x的适当小的邻域U,只需证明$f^{-1}(Z)\cap U$为子流形。设$y=f(x)\in Z$,其中$x\in f^{-1}(Z)\cap U$,令Z在N中的余维数是$l(l=\dim N-\dim Z)$。首先,我们设法化$Z\subset N$为一点的情况。为此,作可微映射$g:N\to R^l$,使在$y\in Z$点附近,有

$$\tilde{Z}\equiv Z\cap V_y=g^{-1}(0)$$

且使

$$T_yg:T_y(N)\to R^l$$

为满射,其中$y\in Z\cap V_y$,V_y是包含y的某一邻域。

如果这样的映射g已经作出(作法放在后面),则当$x\in f^{-1}(\tilde{Z})\cap U$时,原象$f^{-1}(\tilde{Z})$是映射$g\circ f:M\to R^l$的零点集,如图5.16所示。因此,要证明$f^{-1}(\tilde{Z})\cap U$为子流形,由定理4就只要求$0\in R^l$是$g\circ f$的正则值。

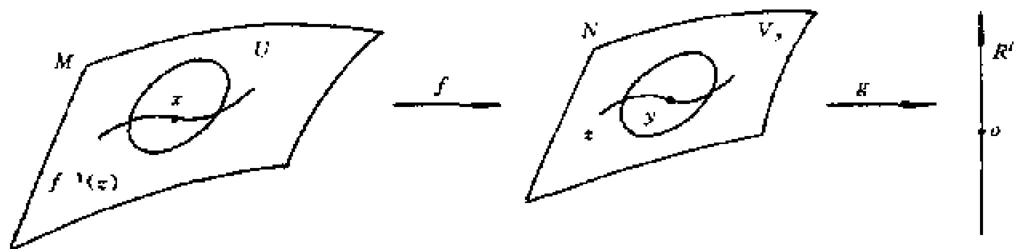


图 5.16

其次,我们证明横截性条件式(5.5.1)所示,就是$0\in R^l$是$g\circ f$的正则值条件。

事实上,若$T_y(N)=T_y(Z)+\mathrm{Im}(T_xf)$,则由切映射的链法则有

$$T_x(g\circ f) = T_y g\circ T_x f$$

而由 g 的作法可知，$T_y g: T_y(N)\to R^l$ 为满射，其核 $\mathrm{Ker}(T_y g)=T_y(Z)\subset T_y(N)$。因此，$T_y g$ 把 $\mathrm{Im}(T_x f)$ 映成整个 R^l，这就说明了 $T_x(g\circ f)$ 是满射。由于 $x\in(\tilde{Z})$ 的任意性，知道 $0\in R^l$ 是映射 $g\circ f$ 的正则值。

最后，证明具有上述性质的映射 g 是可以找到的。令 (V,ψ,n) 是 N 中包含 y 的一个坐标图，如图 5.17 所示，要使 $g(\tilde{Z})=0$，或者 $\tilde{Z}=g^{-1}(0)$，即要 $\tilde{g}[\psi(\tilde{Z})]=0$，要使 $T_y g: T_y(N)\to R^l$ 为满射，即要 $dg(0)$ 为满射（其中，设 $\psi(y)=0\in R^n, y\in Z$）。于是，我们作可微映射 $\tilde{g}=(\tilde{g}_1,\cdots,\tilde{g}_l): R^n\to R^l$，使 $\psi(\tilde{Z})\subset R^n$ 是 $\tilde{g}_i$ 的公共零点集，即使 $\tilde{g}_i[\psi(\tilde{Z})]=0, i=1,\cdots,l$。进而，要使 $d\tilde{g}(0)$ 为满射，必需要 $d\tilde{g}(0)$ 之秩为 l，即需 l 个函数：$d\tilde{g}_1(0),\cdots,d\tilde{g}_l(0)$ 是线性无关的，或者说，l 个函数 $\tilde{g}_1,\cdots,\tilde{g}_l$ 在 $0\in R^n$ 是线性无关的，这样的 $\tilde{g}$ 不难作出，再令 $g=\tilde{g}\circ\psi^{-1}: N\to R^l$ 便是所求的映射。

图 5.17

由定理 4 可知，$f^{-1}(\tilde{Z})$ 的维数等于 $n-l$，即 $f^{-1}(\tilde{Z})$ 在 M 中的余维数为 l。

例 7 如果 $Z\subset N$ 的每一点都是 f 的正则值，则 $f\Phi Z$，这是因为：$T_x f(T_y(M))=T_y(N)$ 对一切 $x\in f^{-1}(Z)$ 成立，其中 $y=f(x)$。

例 8 设 $M=R^2$、$N=R^3$、$Z=R^3$ 中的 (x,y) 平面，$a\in P$，定义映射 $f_a: M\to N$，使

$$f(x,y)=(x,y,x^2+y^2+a)$$

则 $f_a\Phi Z\Leftrightarrow a\neq 0$，如图 5.18 所示。

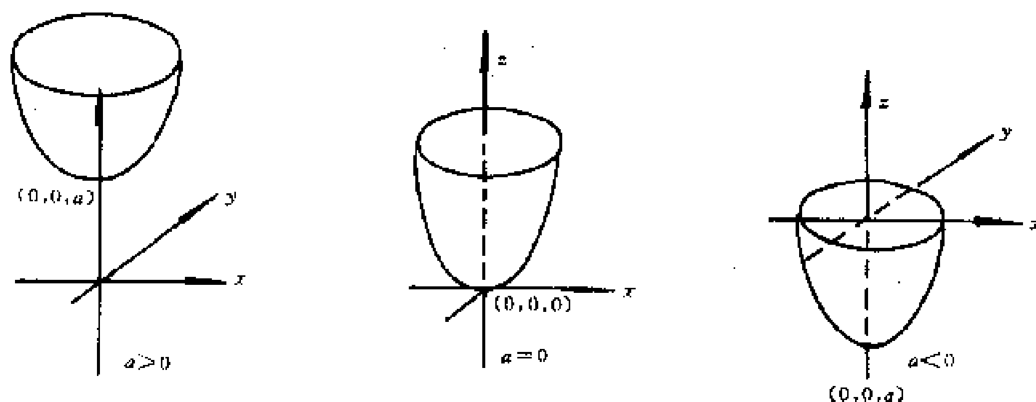


图 5.18

此例直观地表明，如果一个映射不横截于一个子流形，可以稍微摄动一下而成为横截的映射。

例 9 如果 $f: M\to N$ 是包含映射 i，因为 $f(M)=M\subset N$，且 M 为 N 的子流形，如果再考虑一个子流形 $Z\subset N$，则 f 与 Z 的横截性条件变成

$$T_x(M)+T_x(Z)=T_x(N)$$

这是由于 $T_x f[T_x(M)]=T_x(M)$。这时，如果 $f\Phi Z$，也叫做 M 横截于 Z，记为 $M\Phi Z$。

为直观起见，我们图示两个流形是否横截的情形，如图 5.19 所示。

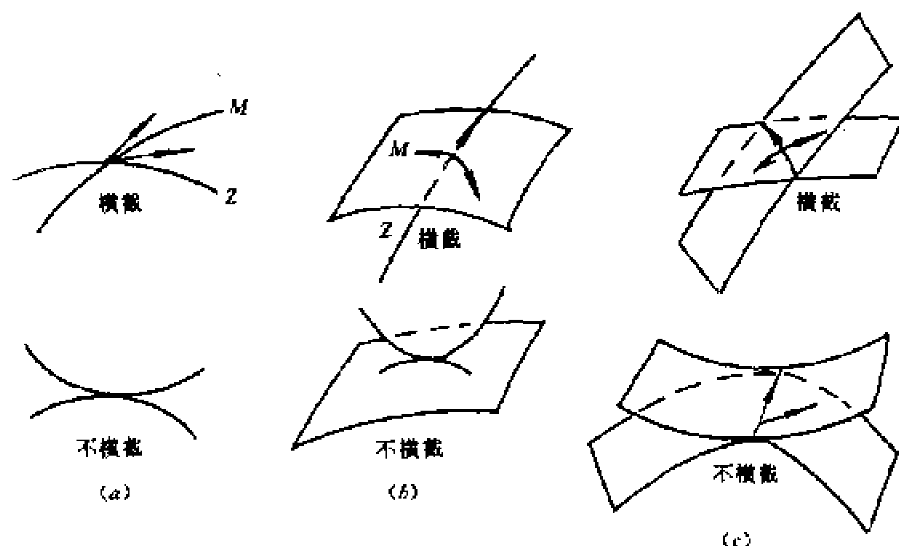


图 5.19

(a) $R^2=N$ 中的曲线；(b) $R^3=N$ 中的曲面与曲线；(c) $R^3=N$ 中的曲面

§5.6 向 量 丛

本节讨论向量丛的概念，它不仅在微分几何、偏微分方程等学科有重要的应用，而且与力学也有密切联系。

在正式讨论切丛之前，先考虑一个力学问题：在三维 Euclid 空间中，一质点的自由运动应该由什么样性质的集合来描述？我们知道，一个质点的运动是由状态所在的空间位置 x 以及相应的运动速度 v 决定的。设 $x=x(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$，则 $v=v(t)=(\dot{x}_1(t),\dot{x}_2(t),\dot{x}_3(t))$（$\dot{x}_i(t)$表示 x_i 对 t 的导数）。因此，要描述质点在三维间的运动状态，应该是空间

$$R^3\times R^3=\{(x,v)\,|\,x\in R^3,v\in R^3\}$$

也就是说在三维空间的每一点再设置一个三维空间。这时，一个质点的运动有 3+3=6 个自由度。若是考虑质点组的运动，类似于一个质点的情形，只是自由度更高些，比如说有 n 个质点的自由运动，描述它们的运动状态的空间是

$$R^{6n}=R^{3n}\times R^{3n}$$

这样的空间在力学上叫做相空间。

如果考虑有约束的质点运动，其相空间又如何？比如，若质点沿空间某一光滑曲线 L 运动，设 $x\in L$，相应的速度 $v\in T_x(L)$，这时相空间应该是

$$E=\bigcup_{x\in L}T_x(L)$$

E 就称为曲线 L 的切丛，切丛是研究力学的极好的框架。

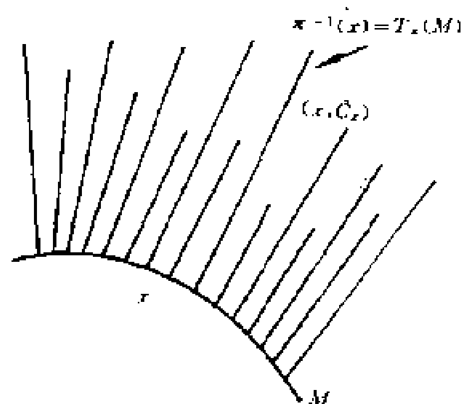


图 5.20

设 M 为一个 n 维微分流形，考虑 M 上所有点的切空间的并

$$E=\bigcup_{x\in M}T_x(M)=\{(x,\hat{c}_x)\}$$

其中，$x\in M$，$\hat{c}_x(\in T_x(M)$，如图 5.20 所示。

引进投影映射

$$\pi: E \to M$$

使
$$(x,\hat{c}_x) \mapsto x$$

而 $\pi^{-1}: M \to E$，有

$$\pi^{-1}(x) = T_x(M) = \{\hat{c}_x\}$$

下面我们讨论如何由 M 的微分构造，赋以 E 一个微分构造，使之成为微分流形。

设 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 是 M 的一个坐标图集，且设 $V_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$，若令

$$\psi_\alpha: V_\alpha \to \varphi(U_\alpha) \times R^n \subset R^{2n}$$

使

$$\psi_\alpha(x,\hat{c}_x) = (\varphi_\alpha(x), T_x\varphi_\alpha(\hat{c}_x))$$

则 ψ_α 是 $V_\alpha \subset E$ 到 R^{2n} 中的开集 $\varphi_\alpha(U_\alpha) \times R^n$ 的一对一映射（注意：φ_α: $U_\alpha \subset M \to R^n$，$T_x\varphi_\alpha = \mathrm{id} \circ \mathrm{d}(\mathrm{id} \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(x)) \circ (\lambda^x_{\varphi_\alpha})^{-1} = (\lambda^x_{\varphi_\alpha})^{-1}$ 是同构映射）。若规定 $\pi^{-1}(U_\alpha) = V_\alpha$ 是 E 中的开集，则 ψ_α 是连续映射，即 ψ_α 为同胚映射，亦即 (V_α,ψ_α) 为 E 中的坐标图，如图 5.21 所示。

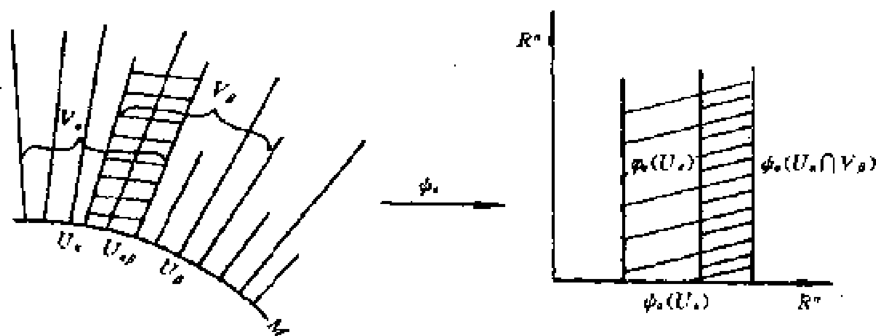


图 5.21

下面证明 E 中坐标图的相容性。如果 (V_β,ψ_β) 是 E 中包含 $(x,\hat{c}_x)$ 的另一坐标图，我们只要证明

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} \in C^\infty$$

因为
$$\psi_\alpha(x,\hat{c}_x) = (\varphi_\alpha(x), T_x\varphi_\alpha(\hat{c}_x))$$

所以

$$\psi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(x), T_x\varphi_\alpha(\hat{c}_x)) = (x,\hat{c}_x)$$

$$\begin{aligned}
\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(x), T_x\varphi_\alpha(\hat{c}_x)) &= \psi_\beta(x,\hat{c}_x) \\
&= (\varphi_\beta(x), T_x\varphi_\beta(\hat{c}_x)) \\
&= (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(x)), T_x\varphi_\beta \circ (T_x\varphi_\alpha)^{-1}(T_x\varphi_\alpha(\hat{c}_x))) \\
&= \{\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(x)), T_x(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(T_x\varphi_\alpha(\hat{c}_x))\} \\
&= \{\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(x)), \mathrm{d}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(x)) \circ (T_x\varphi_\alpha(\hat{c}_x))\}
\end{aligned}$$

这里用到了切映射的链法则，以及 $T_x\varphi_\alpha = (\lambda^x_{\varphi_\alpha})^{-1}$，$\mathrm{d}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(x)) = (\lambda^x_{\varphi_\beta})^{-1} \circ (\lambda^x_{\varphi_\alpha}) = T_x\varphi_\beta \circ (T_x\varphi_\alpha)^{-1} = T_x(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})$。由于 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \in C^\infty$，$\mathrm{d}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) \in C^\infty$，故有 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} \in C^\infty$，即 (V_α,ψ_α) 与 (V_β,ψ_β) 在 E 中相容，于是 $\{(V_\alpha,\psi_\alpha)\}$ 便是 E 中的一个坐标图集，亦即 E 是一个微分流形。

定理 1 如果 M 是 n 维微分流形，则 $E = \bigcup_{x \in M} T_x(M)$ 有以下的向量丛构造：

(1) E 是微分流形，$\pi: E \to M$ 为投影映射；

(2)$\psi_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to\varphi_\alpha(U_\alpha)\times R^n$ 是微分同胚，此性质是说 E 局部与乘积空间同胚，又称 E 的局部平凡性；

(3)对每个 $x\in M$，$\pi^{-1}(x)=T_x(M)\cong R^n$；

(4)在 $T_x(M)\cong R^n$ 上的结构群 $G=GL(n,R)$，即 $\mathrm{d}(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(x))\in G$ 为 n 阶满秩(实)线性群，其中 $\mathrm{d}(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(x))$ 又叫转移矩阵。

定义 1　设 M 为 n 维微分流形，$E=\bigcup_{x\in M}T_x(M)$，$\pi:E\to M$ 为投影映射，则 E 是微分流形(当然，首先给 E 赋于适当的拓扑结构，维数$=2n$)，E 就称为 M 的切丛，常记为 $T(M)$。其中 M 叫做底空间，$E=T(M)$ 叫做全空间。$\pi^{-1}(x)=T_x(M)$ 叫做在 $x\in M$ 点的纤维，因此，切丛的每个纤维都是线性空间。

定义 2　如果 M 中只有一个坐标图(U,φ)，则 $T(M)\simeq\varphi(M)\times R^n$，这时 $T(M)$ 称为平凡切丛。特别地，当 $M=R^n$ 时，$T(R^n)=R^n\times R^n$。

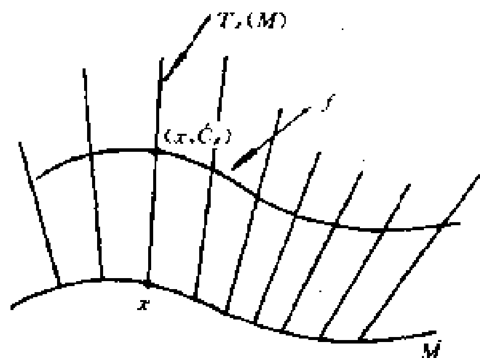


图 5.22

定义 3　如果 $U\subset M$ 为开集，且有可微映射

$$f:U\to f(U)\subset T(M)$$

使 $\pi\circ f=id$，即使任何 $x\in U$，有 $\pi\circ f(x)=x$，则映射 f 叫做切丛 $T(M)$ 的一个局部切口(local cross-section)。若 $U=M$，则 f 称为切丛的整体切口(global cross-section)。如图 5.22 所示。

由于 f 的定义，$\pi\circ f(x)=x$，$\forall\ x\in U$，f 的这一性质，又称为 f 是保持纤维的。

当 $U\subset M$ 落到一个坐标邻域时，对每一点 $x\in U$，$f(x)=(x,\hat{c}_x)$，相应有一个切向量 $\hat{c}_x\in T_x(M)$，而且，当 x 在 U 中变化时，有

$$f(U)=\left\{\left(x,\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x\right)\Big|\,x\in U\right\}$$

这里用到了$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_x,\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_x\right\}$是 $T_x(M)$ 中的基底，因此，切丛的切口 f 确定了 U 上的一个向量场。

类似于切丛的讨论，我们介绍余切丛。

设 M 为 n 维微分流形，作 M 上所有点的余切空间的并：$T^*(M)\triangleq\bigcup_{x\in M}T_x^*(M)=\{(x,w_x)\}$，$w_x\in T_x^*(M)$。再引进投影映射 $\pi:T^*(M)\to M$，使

$$(x,w_x)\mapsto x$$

而 $\pi^{-1}(x)=T_x^*(M)=\{w_x\}$。我们欲证 $T^*(M)$ 也可以成为 $2n$ 维的微分流形。

令$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$是 M 上的一个坐标图集，且令

$$V_\alpha=\pi^{-1}(U_\alpha)$$

以及

$$\psi_\alpha:V_\alpha\to\varphi_\alpha(U_\alpha)\times R^n\subset R^{2n}$$

使得

$$\psi_\alpha(x,w_x)=(\varphi_\alpha(x),T_x^*\varphi_\alpha(w_x))$$

其中，$T_x^*\varphi_\alpha:T_x^*(M)\to R^n(=R^{n^*})$ 是 $\lambda_{\varphi_\alpha}^x:R^n\to T_x(M)$ 的对偶映射，如图 5.23 所示。

$T_x^*\varphi_\alpha(w_x)=v^*\in R^n$，$w_x\in T_x^*(M)$。下面证明$\{(V_\alpha,\psi_\alpha)\}$是 $T^*(M)$ 的一个坐标图集。注意

到，(图 5.23) $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(x), v^*) = \psi_\beta(x, w_x) = (\varphi_\beta(x), \xi^*) = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(x)), \xi^*)$，但是

$$\xi^* = (\lambda_{\varphi_\beta}^x)^* \circ ((\lambda_{\varphi_\alpha}^x)^{*-1}(v^*))$$
$$= ((\lambda_{\varphi_\alpha}^x)^{-1} \circ \lambda_{\varphi_\beta}^x)^*(v^*)$$
$$= (((\lambda_{\varphi_\beta}^x)^{-1} \circ \lambda_{\varphi_\alpha}^x)^{-1})^*(v^*)$$

$$(\text{切丛结果}) = [(\mathrm{d}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(x))^{-1}]^*$$
$$= (J^T)^{-1}(v^*)$$

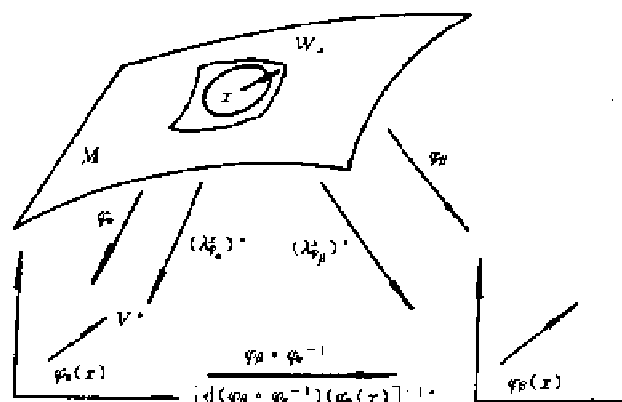


图 5.23

即 $(\lambda_{\varphi_\beta}^x)^* \circ [(\lambda_{\varphi_\alpha}^x)^*]^{-1}$ 是 $J = \mathrm{d}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(x))$ 的逆步矩阵，因此，$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} \in C^\infty$，同理 $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} \in C^\infty$，故 (V_α, ψ_α) 与 (V_β, ψ_β) 是相容的，从而得到 $T^*(M)$ 也是一个微分流形。

定理 2 如果 M 是 n 维微分流形，则 $T^*(M) = \bigcup_{x \in M} T^*(M)$ 有以下的向量丛构造：

(1) $T^*(M)$ 是微分流形，$\pi: T^*(M) \to M$ 为投影映射；

(2) $\psi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \to \varphi(U_\alpha) \times R^n$ 是微分同胚；

(3) 对每个 $x \in M$，$\pi^{-1}(x) = T_x^*(M) \cong R^n$；

(4) 在 $T_x^*(M)$ 上的转移矩阵是 $J = \mathrm{d}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(x))$ 的逆步矩阵，即 J 的转置逆矩阵。

定义 4 设 M 为 n 维微分流形，$T^*(M) = \bigcup_{x \in M} T_x^*(M)$，$\pi: T^*(M) \to M$ 为投影映射，则 $T^*(M)$ 为微分流形（当然，首先给 $T^*(M)$ 赋于适当的拓扑结构，维数 $= 2n$），$T^*(M)$ 就称为 M 的余切丛。同样，M 叫做底空间，$\pi^{-1}(x) = T_x^*(M)$ 叫做在 $x \in M$ 点的纤维，每个纤维是 $T_x^*(M) \cong R^n$，也是线性空间。

定义 5 如果 M 只有一个坐标图 (U, φ)，则 $T^*(M) \cong \varphi(M) \times R^n$，这时 $T^*(M)$ 称为平凡的余切丛。

定义 6 设 $U \subset M$ 为开集，且有可微映射 $f: U \to T^*(U)$，使

$$\pi \circ f = id$$

即对任一个 $x \in U$，有 $\pi \circ f(x) = x$，则 f 称为余切丛 $T_x^*(M)$ 的一个局部切口，如果 $U = M$，则 f 称为余切丛的整体切口。

显然，f 也是保持纤维的映射，但是，无论是切丛，还是余切丛的整体切口，都不一定存在。如果上述 $U \subset M$ 落到一个坐标邻域内，则对每一个 $x \in U$，$f(x) = (x, w_x)$，相应有一个余切向量 w_x，而且，当 x 在 U 中变化时，

$$f(U) = \left\{ \left(x, \sum_{i=1}^n a_i(x)(\mathrm{d}x_i)_x \,\middle|\, x \in U \right) \right\}$$

因此，余切丛的切口 f 也确定了 U 上的一个向量场，有时就称切口 f 是 U 上的向量场。

例 1 R^2 中的单位圆 S^1 的切丛 TS^1。设 S^1 有四个坐标图：$\{(U_i^\mp, \varphi_i^\mp) \mid i = 1, 2\}$，其中

$$U_i^\mp = \{x \in S^1 \mid \pm x_i > 0\}$$

即

$$U_1^- = \{(x_1, x_2) \in S^1, x_1 > 0\}$$
$$U_1^- = \{(x_1, x_2) \in S^1, x_1 < 0\}$$
$$U_2^- = \{(x_1, x_2) \in S^1, x_2 > 0\}$$
$$U_2^- = \{(x_1, x_2) \in S^1, x_2 < 0\}$$

然而

$$\varphi_1^+:U_1^+\to(-1,1)\subset R,\varphi_1^+(x_1,x_2)=x_2;$$
$$\varphi_1^-:U_1^-\to(-1,1)\subset R,\varphi_1^-(x_1,x_2)=x_2;$$
$$\varphi_2^+:U_2^+\to(-1,1)\subset R,\varphi_2^+(x_1,x_2)=x_1;$$
$$\varphi_2^-:U_2^-\to(-1,1)\subset R,\varphi_2^-(x_1,x_2)=x_1;$$

我们具体作出 $TS^1=\{((x_1,x_2),(v_1,v_2))\in R^2\times R^2|x_1^2+x_2^2=1,(x_1,x_2)\cdot(v_1,v_2)=0\}$的一个坐标图集：$\{x=(x_1,x_2)\in S^1,v=(v_1,v_2)\in T_x(S^1)\}$

$$\psi_1^+:(x,v)\mapsto\psi_1^+(x,v)=(\varphi_1^+(x),T_x\varphi_1^+(v))$$

因为
$$T_x\varphi_1^+(v)=d\varphi_1^+(x)\cdot v=(0,1)\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=v_2$$

所以
$$\psi_1^+(x,v)=(x_2,v_2),\psi_1^+:TU_1^+\to(-1,1)\times R$$

其余三个坐标图可同样作出。例如

$$\psi_2^-(x,v)=(\varphi_2^-(x),T_x\varphi_2^-(v))=(x_1,v_1)$$

当$(x_1,x_2)\in U_1^+\cap U_2^-$ 时，即当 $x_1\in(0,1)$，$x_2\in(-1,0)$时，有

$$\begin{aligned}\psi_2^-\circ(\psi_1^+)^{-1}(\varphi_1^+(x),T_x\varphi_1^-(v))&=\psi_2^-\circ(\psi_1^+)^{-1}(x_2,v_2)\\&=\left(\sqrt{1-x_2^2},-x_2v_2\Big/\sqrt{1-x_2^2}\right)\end{aligned}$$

其中，$x_1^2+x_2^2=1,x_1v_1+x_2v_2=0$。所以，$\{(TU_i^\pm,\psi_i^\pm),i=1,2,3,4\}$就是$TS^1$ 上的一个坐标图集。

定义 7 设 M,E 是微分流形，且投影映射 $\pi:E\to M$ 为满射，也是可微映射。又设 M 有一个开复盖$\{U_\alpha\}$，以及微分同胚族 $\varphi=\{\varphi_\alpha\}$，使得

(1)$\varphi_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times R^n$ 是微分同胚；

(2)对任何 $x\in M$，$\pi^{-1}(x)=E_x$ 是线性空间，且 $\varphi_{\alpha,x}:\pi^{-1}(x)=E_x\to\{x\}\times R^n$ 是线性同构；

(3)如果 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，则 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha[\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)]\to\varphi_\beta[\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)]$是 $x\in U_\alpha\cap U_\beta$ 的 C^∞函数，且

$$g_{\beta\alpha}(x)=\varphi_{\beta,x}\circ(\varphi_{\alpha,x})^{-1}\in GL(n,R)$$

我们把$\{E,M,\pi\}$叫做微分向量丛或简称向量丛。其中 E 叫全空间，M 叫底空间，$E_x=\pi^{-1}(x)$ 称为在 $x\in M$ 的纤维，$g_{\beta\alpha}(x)=\varphi_{\beta,x}\circ(\varphi_{\alpha,x})^{-1}$叫做向量丛的转移函数。

命题 1 $g_{r\alpha}=g_{r\beta}\circ g_{\beta\alpha}$

证明 因为 $g_{r\alpha}=\varphi_r\circ\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$，所以 $g_{r\alpha}=g_{r\beta}\circ g_{\beta\alpha}$

命题 2 $g_{\alpha\alpha}=I$

证明 令 $\alpha=\beta$，由 $g_{\beta\alpha}$的定义立即可得。

命题 3 $g_{\beta\alpha}=(g_{\alpha\beta})^{-1}$

证明 令命题 1 中的 $r=\alpha$，再由命题 2 便得。

例 2 如果 M 是 n 维微分流形，则 $E=M\times R^n$ 是平凡的向量丛，其底空间为 M，纤维是 R^n，$\pi:E\to M$，$\pi(x,y)=x$。

必须指出，切丛$T(M)$，余切丛 $T^*(M)$都是向量丛。设$\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}$是 M 上的一个坐标图集，令 $\varphi_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times R^n$，使 $\varphi_{\alpha,x}(\hat{c}_x)=(x,T_x\psi_\alpha(\hat{c}_x))$，则 $\varphi=\{\varphi_\alpha\}$满足向量丛的条件。类似地，余切丛也是向量丛。

习 题 五

1. 设 X 是拓朴空间而 A,B 是 X 的子集，证明：

(1)$A\subset\overline{A}$；

(2)$\overline{\overline{A}}=\overline{A}$；

(3)$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

2. 设 X 是实数集，装备着下列三种拓扑：τ_1 是通常拓扑；τ_2 是可列补拓扑；τ_3 是所有含 0 的开区间以及空集组成的拓扑。再设 Q 是所有有理数组成的集合，问 Q 分别在(X,τ_1)，(X,τ_2)，X，(τ_3)内稠密吗？

3. 设$(X,\tau_1$ 和(Y,τ_2)是两个拓扑空间，$f:X\to Y$ 连续，证明对 X 中的任何紧集 K，$f(K)$是 Y 中的紧集。

4. 设(X,τ)是拓扑空间，R 是一维 Euclid 空间，$f:X\to R$ 连续，K 是 X 中的一个紧集，证明 f 在 K 上有最大值和最小值。

5. 证明 Euclid 空间满足 A_2 公理和 T_2 公理。

6. 证明在 Hausdorff 空间中，如果 $x_n\to x$，$x_n\to y$，则 $x=y$。

7. 证明 Hausdorff 空间的子空间是 Hausdorff 空间；反之，如果拓扑空间的每一点有一个闭邻域，使得它在相对拓扑下是 Hausdorff 的，则此拓扑空间是 Hausdorff 的。

8. 如果 X_1,X_2 为 Hausdorff 空间，证明它们的乘积拓扑空间也是 Hausdorff 空间。

9. 证明直线区间和圆是不同胚的；R 和 R^2 是不同胚的。

10. 证明开区间是一维流形，闭区间不是一维流形。

11. 证明上半锥面 $z^2=x^2+y^2,z\geqslant 0$ 是二维流形，但整个锥面不是二维流形。

12. 证明 R^3 中的抛物面、马鞍面、椭球面、双曲面、柱面都是二维 C^∞一流形。

13. 设 f 是从 R^n 到 R^r 的连续可微映射，$M=\{x\in R^n|f(x)=0\}$，又设 Df 在点 $x\in M$ 的秩是 $k,k<n$. 证明 M 是 $n-k$ 维微分流形。

14. 证明 $M=\{(x,y,u,v)\in R^4|x^2+y^2=1,u^2+v^2=1\}$是二维微分流形。

第六章　非线性系统的定性分析方法

微分方程是研究自然科学和工程技术的数学工具之一。它几乎和微积分同时产生，在相当长的一段时间内，人们设法寻求微分方程的通解。直到19世纪后半叶，在天体力学及其它技术科学所提出的一些问题中，需要研究较复杂的微分方程解的局部和全局的性质。但由于绝大多数的这种方程不能用初等函数的积分予以表示通解，因而提出了直接根据微分方程的结构来研究解的属性，或探讨由微分方程所确定的积分曲线的分布状况，从而促使微分方程定性理论或几何理论的发展。

法国数学家 H. Poincaré 和俄国数学家 A. M. Liapunov 是常微分方程定性理论的共同创始人。前者为了研究天体力学和宇宙形成理论一类问题，从1881～1886年连续发表了《微分方程所确定的曲线》为题的数篇论文，后者从1882年～1892年完成了在理论与实用上具有普遍意义的博士论文：《运动稳定性的一般问题》。但在以后一个时期，除了 G. D. Birkhoff 继承并发展了 Poincaré 的工作提炼出"动力体系"理论外，关于微分方程定性理论的研究比较沉寂。从本世纪30年代起，由于新的物理、力学以及工程技术、自动调节、自动控制等问题的推动，使微分方程定性理论中的概念、问题和方法又在新的条件下得到了发展。

本章首先扼要阐述线性微分方程组的基本理论和常系数线性微分方程组的基本解矩阵的结构及解法，这些内容是研究非线性系统的必要基础；然后，对一般定性理论和稳定性理论作初步介绍，即相平面、奇点和极限环的基础知识，以及解的稳定性概念和稳定性理论的基本定理。

§6.1　线性微分方程组的基本理论

本节主要阐述线性微分方程组的一般概念和基本理论，这部分内容理论比较完整，解的结构比较简单，同时又是研究非线性微分方程的有力工具。

一阶线性微分方程组的一般形式为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t)\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)\end{aligned}\right\} \tag{6.1.1}$$

其中，已知函数 $a_{ij}(t)(i,j=1,2,\cdots n)$ 和 $f_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 在区间 $t\in[\alpha,\beta]$ 上连续。式(6.1.1)的矩阵形式为

$$X' = A(t)X + F(t) \tag{6.1.2}$$

其中，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$；$A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}$；$F(t)=(f_1(t),f_2(t),\cdots,f_n(t))^T$。

当 $f_i(t)\equiv 0(i=1,2,\cdots,n)$ 时，方程组(6.1.2)化为

$$X' = A(t)X \tag{6.1.3}$$

则式(6.1.3)称为齐次线性微分方程组；若 $F(t)$ 为非零向量，则式(6.1.2)称为非齐次线性微分方程组；如果(6.1.2)和(6.1.3)两式中的 $A(t)$ 相同，则称式(6.1.3)是式(6.1.2)的对应齐次方程组。

现在我们给出方程组(6.1.1)或(6.1.2)解的概念。若一组函数 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 使得在 $t\in[\alpha,\beta]$ 上有恒等式

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + f_i(t), i = 1,2,\cdots,n$$

成立，则称 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 是方程组(6.1.1)或(6.1.2)在 $[\alpha,\beta]$ 上的一个解；含有 n 个独立的任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的解

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(t;c_1,c_2,\cdots,c_n) \\ x_2 = \varphi_2(t;c_1,c_2,\cdots,c_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \varphi_n(t;c_1,c_2,\cdots,c_n) \end{array}\right\} \tag{6.1.4}$$

称为(6.1.1)的通解；如果由 n 个未就 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 解出的关系式

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_1(t,x_1,x_2,\cdots,x_n;c_1,c_2,\cdots,c_n) = 0 \\ \Phi_2(t,x_1,x_2,\cdots,x_n;c_1,c_2,\cdots,c_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_n(t,x_1,x_2,\cdots,x_n;c_1,c_2,\cdots,c_n) = 0 \end{array}\right\} \tag{6.1.5}$$

能确定方程组(6.1.1)的通解，则式(6.1.5)称为方程组(6.1.1)的通积分。

若令 $X=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^T$，则 X 称为方程组(6.1.2)的解向量；而所有满足方程组(6.1.2)的解向量的全体所构成的集合称为方程组(6.1.2)的解空间。

一、齐次线性微分方程组的基本定理

现在主要讨论齐次线性微分方程组(6.1.3)全部解的集合的代数结构问题，我们假设系数矩阵函数 $A(t)$ 在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上是连续的，它的元素 $a_{ij}(t)$ 可以取复数值。

1. 关于解的基本定理

定义 1 设有 m 个向量函数 $X_1(t),X_2(t),\cdots,X_m(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，如果存在一组不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$，使

$$c_1X_1(t) + c_2X_2(t) + \cdots + c_mX_m(t) = 0, t \in [\alpha,\beta]$$

则称向量函数组 $X_1(t),X_2(t),\cdots,X_m(t)$ 线性相关，否则称它们线性无关。

例如，向量函数 $\begin{bmatrix} \sin^2t-1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} \cos^2t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ 在任何区间上都是线性相关的，而下面的 $k+1$ 个 m 维向量函数

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} t^k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

在任何区间上都是线性无关的。

事实上，要使

$$c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \cdots + c_{k+1} t^k = 0$$

只有 $c_1 = c_2 = \cdots = c_{k+1} = 0$，所以，上面的 $k+1$ 个向量函数在任何区间上都是线性无关的。

定义 2 设在区间 $[\alpha, \beta]$ 上给定 n 个 n 维向量函数

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}, X_2(t) = \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{bmatrix}, \cdots, X_n(t) = \begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

称行列式

$$W[X_1(t), X_2(t), \cdots X_n(t)] = W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots\cdots & & & \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

为这些向量函数的 Wronski 行列式。

定理 1 若 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 是方程组(6.1.3)的两个解，c_1, c_2 是任意常数，则它们的线性组合

$$X = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t)$$

也是(6.1.3)的解。

定理 2 如果向量函数 $X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上线性相关，则它们的 Wronski 行列式 $W(t) \equiv 0, t \in [\alpha, \beta]$。

证明 由假设可知存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 使得

$$c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \cdots + c_n X_n(t) \equiv 0, t \in [\alpha, \beta]$$

把上式看成是以 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为未知量的齐次线性代数方程组，而它的系数行列式就是 $X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)$ 的 Wronski 行列式 $W(t)$。因方程组有非零解 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$，故其系数行列式应为零，即 $W(t) \equiv 0, t \in [\alpha, \beta]$。证毕。

定理 2 的逆定理未必成立。例如，向量函数 $\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t^2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 的 Wronski 行列式为

$$W(t) = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

但它们是线性无关的。

必须指出，这个定义的向量函数组的线性相关性与在线性代数中所定义的向量组的线性相关性并不是完全一样的。

定理 3 若方程组(6.1.3)的解 $X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)$ 线性无关，则它们的 Wronski 行列式 $W(t) \neq 0, t \in [\alpha, \beta]$。

证明 用反证法，设若存在 $t_0 \in [\alpha, \beta]$，使 $W(t_0) = 0$，考察

$$c_1 X_1(t_0) + c_2 X_2(t_0) + \cdots + c_n X_n(t_0) = 0$$

因为 $W(t_0) = 0$，所以必有 $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \cdots \bar{c}_n$ 存在，使得

$$X(t) = \bar{c}_1 X_1(t) + \bar{c}_2 X_2(t) + \cdots + \bar{c}_n X_n(t)$$

是方程组(6.1.3)的解，且 $X(t_0) = 0$。

但是，当 $t\in[\alpha,\beta]$ 时，恒等于零的向量函数 0 也是方程组(6.1.3)满足初始条件 $X(t_0)=0$ 的解。由解的唯一性知 $X(t)\equiv 0, t\in[\alpha,\beta]$，即

$$\bar{c}_1X_1(t)+\bar{c}_2X_2(t)+\cdots+\bar{c}_nX_n(t)\equiv 0, t\in[\alpha,\beta]$$

因为 $\bar{c}_1,\bar{c}_2,\cdots,\bar{c}_n$ 不全为零，这与 $X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)$ 线性无关的假设矛盾。定理得证。

推论 方程组(6.1.3)的 n 个解 $X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)$ 作成的 Wronski 行列式 $W(t)$ 在 $t\in[\alpha,\beta]$ 上，或者恒为零或者恒不为零。

定理 4 若 $X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)$ 是方程组(6.1.3)的 n 个解，则它们的 Wronski 行列式满足下列关系式

$$W(t)=W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}[a_{11}(t)+a_{22}(t)+\cdots+a_{nn}(t)]dt}$$

证明 由 Wronski 行列式求得公式得

$$\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{vmatrix} x'_{11}(t) & x'_{12}(t) & \cdots & x'_{1n}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t)\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ x'_{n1}(t) & x'_{n2}(t) & \cdots & x'_{nn}(t)\end{vmatrix} \quad (6.1.6)$$

由于 $X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)$ 都是方程组(6.1.3)的解，所以式(6.1.6)右端的第一项等于

$$\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{n}a_{1j}(t)x_{j1} & \sum_{j=1}^{n}a_{1j}(t)x_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n}a_{1j}(t)x_{jn}\\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}(t)x_{11} & a_{11}x_{12} & \cdots & a_{11}(t)x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(t)W(t)$$

其它的每一个行列式都作类似的处理，于是得到

$$\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}=[a_{11}(t)+a_{22}(t)+\cdots+a_{nn}(t)]W(t)$$

积分得

$$W(t)=W(t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t}[a_{11}(\tau)+a_{22}(\tau)+\cdots+a_{nn}(\tau)]\mathrm{d}\tau\right\}$$

从上式可以看出，方程组(6.1.3)的 n 个解所构成的 Wronski 行列式对某一点 $t_0\in[\alpha,\beta]$ 来说，若 $W(t_0)=0$，则 $W(t)\equiv 0$；若 $W(t_0)\neq 0$，则 $W(t)\neq 0, t\in[\alpha,\beta]$。

定理 5 方程组(6.1.3)一定存在 n 个线性无关的解 $X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)$。

证明 任取 $t_0\in[\alpha,\beta]$，由解的存在唯一性定理，方程组(6.1.3)分别满足初始条件

$$X_1(t_0)=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},X_2(t_0)=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},X_n(t_0)=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

的 n 个解 $X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)$ 一定存在。又因为这 n 个解的 Wronski 行列式 $W(t_0)=1\neq0$，故 $X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)$ 是线性无关的。证毕。

定理 6 若 $X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)$ 是方程组(6.1.3)的 n 个线性无关解，则方程组(6.1.3)任一解 $X(t)$ 均可表为

$$X(t)=c_1X_1(t)+c_2X_2(t)+\cdots+c_nX_n(t)$$

其中，$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是相应的确定常数。

证明 取一组常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，对于任取 $t_0\in[\alpha,\beta]$，令 $X(t_0)=c_1X_1(t_0)+c_2X_2(t_0)+\cdots+c_nX_n(t_0)$，把它看成是以 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为未知量的方程组，则方程组的系数行列式就是 $W(t_0)$。因为 $X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)$ 线性无关，于是 $W(t_0)\neq0$，所以方程组有唯一解 $c_1,c_2,\cdots,c_n$。以这组确定的 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 构成的向量函数 $c_1X_1(t)+c_2X_2(t)+\cdots+c_nX_n(t)$ 也是方程组(6.1.3)的解。于是方程组(6.1.3)的两个解 $X(t)$ 和 $c_1X_1(t)+c_2X_2(t)+\cdots+c_nX_n(t)$ 具有相同的初始条件，即

$$X(t_0)=c_1X_1(t_0)+c_2X_2(t_0)+\cdots+c_nX_n(t_0)$$

由解的唯一性，得到

$$X(t)=c_1X_1(t)+c_2X_2(t)+\cdots+c_nX_n(t)$$

证毕。

由定理 5 和定理 6 可知，方程组(6.1.3)的解集合的最大线性无关组的个数等于 n。我们称方程组(6.1.3)的任意 n 个线性无关解 $X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)$ 为方程组(6.1.3)的一个基本解组。显然，(6.1.3)的基本解组不是唯一的，但是知道(6.1.3)的一个基本解组就知道了它的全部解，因此

$$X(t)=\sum_{k=1}^{n}c_kX_k(t)$$

是方程组(6.1.3)的通解。

方程组(6.1.3)的解空间的维数是 n，即方程组(6.1.3)所有解的集合构成一个 n 维线性空间。

2. 基本解矩阵

定义 3 若一个 $n\times n$ 的矩阵的每列都是方程组(6.1.3)的解，则称这个矩阵为方程组(6.1.3)的解矩阵，若 n 个解在$[\alpha,\beta]$上是线性无关的，则称解矩阵为方程组(6.1.3)在$[\alpha,\beta]$上的基本解矩阵。

我们用 $G(t)$ 表示由方程组(6.1.3)的 n 个线性无关的解 $\Phi_1(t),\Phi_2(t),\cdots,\Phi_n(t)$ 作为列构成的基本解矩阵，即

$$G(t)=(\Phi_1(t),\Phi_2(t),\cdots,\Phi_n(t))$$

于是，可以把定理 5 和定理 6 以及定理 2 和定理 3 简要地表达为以下两个定理。

定理 7 方程组(6.1.3)一定存在基本解矩阵 $G(t)$，对方程组(6.1.3)的任一解 $\Psi(t)$，一定存在 n 维常数向量 C 使

$$\Psi(t)=G(t)C$$

定理 8 方程组(6.1.3)的一个解矩阵 $G(t)$ 是基本解矩阵的充分必要条件是 $\det G(t)\neq0$，$t\in[\alpha,\beta]$，而且如果对某一个 $t_0\in[\alpha,\beta]$，$\det G(t_0)\neq0$，则 $\det G(t)\neq0,t\in[\alpha,\beta]$。

必须指出，定理 8 的结论，只是对方程组(6.1.3)的解向量所构成的解矩阵才成立。一般的函数矩阵在其列向量线性无关时，其对应的行列式是可以为零的。例如，矩阵

$$\begin{bmatrix}1 & t & t^2\\0 & 1 & t\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

的行列式在任何区间上恒等于零，但它的列向量都是线性无关的。由定理 8 可知，这个矩阵不可能是任何一个齐次线性微分方程组的解矩阵。

推论 1 若 $G(t)$ 是方程组(6.1.3)在 $[\alpha,\beta]$ 上的基本解矩阵，B 是非奇异的 $n\times n$ 常数矩阵，则 $G(t)B$ 也是方程组(6.1.3)在 $[\alpha,\beta]$ 上的基本解矩阵。

证明

$$\begin{aligned}G(t)B &= [\Phi_1(t),\Phi_2(t),\cdots,\Phi_n(t)]B\\&= [\Phi_1(t),\Phi_2(t),\cdots,\Phi_n(t)]\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}\\&= \left(\sum_{i=1}^{n}b_{i1}\Phi_i(t),\sum_{i=1}^{n}b_{i2}\Phi_i(t),\cdots,\sum_{i=1}^{n}b_{in}\Phi_i(t)\right)\end{aligned}$$

由上式可以看出，$G(t)\cdot B$ 的每一列，都是 $\Phi_1(t),\Phi_2(t),\cdots,\Phi_n(t)$ 的线性组合，所以 $G(t)B$ 的每一列也是解，因此 $G(t)\cdot B$ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的解矩阵；又因为 $\det G(t)\neq 0$，且 B 是非奇异矩阵，所以 $\det(G(t)\cdot B)=\det G(t)\cdot\det B\neq 0, t\in[\alpha,\beta]$。由定理 8 知，$G(t)\cdot B$ 是方程组(6.1.3)在 $[\alpha,\beta]$ 上的基本解矩阵。

显然，推论 1 的逆也是对的。

事实上，因为 $G(t)\cdot B$ 是基本解矩阵，则有 $\det(G(t)\cdot B)\neq 0$，由此得 $\det B\neq 0$，即 B 是非奇异矩阵，于是 B^{-1} 存在，再由推论 1 得

$$(G(t)\cdot B)\cdot B^{-1}=G(t)$$

也是基本解矩阵。

推论 2 若 $G_1(t)$ 和 $G_2(t)$ 是方程组(6.1.3)在 $[\alpha,\beta]$ 上的两个基本解矩阵，则必存在一个 $n\times n$ 的非奇异矩阵 B，使得在 $[\alpha,\beta]$ 上，$G_2(t)=G_1(t)\cdot B$。

证明 设 $G_2(t)=(\Psi_1(t),\Psi_2(t),\cdots,\Psi_n(t))$，$\Psi_j(t)$ 是 $G_2(t)$ 的第 j 列，由定理 7 可知

$$\Psi_j(t)=G_1(t)\cdot B_j, j=1,2,\cdots,n$$

其中 B_j 是适当选取的常数列向量。

令 $B=(B_1,B_2,\cdots,B_n)$，可得

$$G_2(t)=G_1(t)\cdot B, t\in[\alpha,\beta]$$

又因为 $\det G_2(t)=\det G_1(t)\cdot\det B$，而 $\det G_2(t)\neq 0,\det G_1(t)\neq 0, t\in[\alpha,\beta]$，所以得到 $\det B\neq 0$，即 B 为非奇异阵。证毕。

二、非齐次线性微分方程组的基本定理

本段讨论非齐次线性微分方程组(6.1.1)或(6.1.2)的解的结构。

定理 9 若 $\Phi(t)$ 是方程组(6.1.2)的解，而 $\Psi(t)$ 是方程组(6.1.2)对应的齐次线性方程组(6.1.3)的解，则 $\Phi(t)+\Psi(t)$ 是方程组(6.1.2)的解。

证明 直接令 $X=\Phi(t)+\Psi(t)$ 代入式(6.1.2)验证即可。

定理 10 如果 $\Phi_1(t),\Phi_2(t)$ 是方程组(6.1.2)的两个解，则 $\Phi_1(t)-\Phi_2(t)$ 是与方程组

(6.1.2)对应的齐次线性方程组(6.1.3)的解。

证明 因为

$$\Phi'_1(t) = A(t)\Phi_1(t) + F(t), \Phi'_2(t) = A(t)\Phi_2(t) + F(t)$$

于是有

$$[\Phi_1(t) - \Phi_2(t)]' = A(t)[\Phi_1(t) - \Phi_2(t)]$$

所以,$\Phi_1(t)-\Phi_2(t)$是方程组(6.1.3)的解。

定理 11 设$G(t)$是方程组(6.1.3)的基本解矩阵,$\Phi^*(t)$是方程组(6.1.2)的一个解,则方程组(6.1.2)的任一解$\Phi(t)$都可表为

$$\Phi(t) = G(t)C + \Phi^*(t)$$

其中,C是任一常数列向量。

证明 由定理 10 知,$\Phi(t)-\Phi^*(t)$是方程组(6.1.3)的解,再由定理 7 知,存在常数向量C使

$$\Phi(t) - \Phi^*(t) = G(t)C$$

即

$$\Phi(t) = G(t)C + \Phi^*(t)$$

证毕。

定理 11 给出了方程组(6.1.2)的解的结构。在已知方程组(6.1.3)的基本解矩阵的情况下,我们可以仿照解一阶线性方程的作法,用常数变易法求方程组(6.1.2)的一个解。

若$G(t)$是(6.1.3)的基本解矩阵,则$G(t)C$也是(6.1.3)的解,其中C为常数列向量。为了求得(6.1.2)的解,我们将C改为t的函数向量$C(t)$。

现设方程(6.1.2)有形如$\Phi(t)=G(t)\times C(t)$的解,这里$C(t)=(c_1(t),c_2(t),\cdots,c_n(t))^T$是待定的函数向量,将$\Phi(t)=G(t)C(t)$代入式(6.1.2),得

$$G'(t)C(t) + G(t)C'(t) = A(t)G(t)C(t) + F(t)$$

因为$G(t)$是方程组(6.1.3)的基本解矩阵,因而

$$C'(t) = G^{-1}(t)F(t)$$

于是

$$C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^{t} G^{-1}(s)F(s)\mathrm{d}s, t_0, t \in [\alpha,\beta]$$

令$C(t_0)=0$,因此

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} G^{-1}(s)F(s)\mathrm{d}s, t_0, t \in [\alpha,\beta]$$

若方程组(6.1.2)有形如

$$\Phi(t) = G(t)C(t)$$

的解,则解中的函数向量$C(t)$将由上式确定,这样,(6.1.2)的解的公式可写成

$$\Phi(t) = G(t)\int_{t_0}^{t} G^{-1}(s)F(s)\mathrm{d}s, t_0, t \in [\alpha,\beta] \tag{6.1.7}$$

反之,式(6.1.7)确定的函数向量$\Phi(t)$必是方程组(6.1.2)的解。

事实上,对式(6.1.7)两端求导得到

$$\Phi'(t) = G'(t)\int_{t_0}^{t} G^{-1}(s)F(s)\mathrm{d}s + G(t)G^{-1}(t)F(t) = A(t)\Phi(t) + F(t)$$

即 $\Phi(t)$满足方程组(6.1.2)，且有 $\Phi(t_0)=0$。

定理 12 若 $G(t)$是方程组(6.1.3)的基本解矩阵，则

$$\Phi(t)=G(t)\int_{t_0}^{t}G^{-1}(s)F(s)\mathrm{d}s$$

是方程组(6.1.2)的解，且满足初始条件 $\Phi(t_0)=0$。

根据定理 11 和定理 12 可以看出，求方程组(6.1.2)满足初始条件 $\Phi(t_0)=\eta$ 的解，只需在公式

$$\Phi(t)=G(t)C+G(t)\int_{t_0}^{t}G^{-1}(s)F(s)\mathrm{d}s$$

中适当选取 C，即可得到。

令 $t=t_0$，则 $\Phi(t_0)=G(t_0)C$。因 $\det G(t_0)\neq 0$，故有

$$C=G^{-1}(t_0)\Phi(t_0)=G^{-1}(t_0)\eta$$

因此，方程组(6.1.2)满足初始条件 $\Phi(t_0)=\eta$ 的求解公式

$$\Phi(t)=G(t)G^{-1}(t_0)\eta+G(t)\int_{t_0}^{t}G^{-1}(s)F(s)\mathrm{d}s \tag{6.1.8}$$

令，$\Phi_h=G(t)G^{-1}(t_0)\eta$，它就是式(6.1.3)满足初始条件 $\Phi_h(t_0)=\eta$ 的解。公式(6.1.7)和(6.1.8)称为非齐次线性微分方程组(6.1.2)的常数变易公式。

例 已知方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{t}x-y+t\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{t^2}x+\dfrac{2}{t}y-t^2\end{cases}\quad t>0 \tag{6.1.9}$$

的对应齐次方程组

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{t}x-y\\\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}y\end{aligned}\right\} \tag{6.1.10}$$

求方程组(6.1.9)的通解。

解 首先求(6.1.10)通解。引进新的未知函数 $z=x+ty$，于是

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t}x-y+y+t\left(\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}y\right)=\frac{2}{t}z$$

解得 $z=t^2$。从而 $x=t^2-ty$，代入(6.1.10)的第一个方程得，$y=t\ln t$，$x=t^2(1-\ln t)$。于是(6.1.10)的两个解为

$$X_1(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t^2\\-t\end{bmatrix}$$

$$X_2(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t^2(1-\ln t)\\t\ln t\end{bmatrix}$$

且 Wronski 行列式

$$W(t)=\begin{vmatrix}t^2 & t^2(1-\ln t)\\-t & t\ln t\end{vmatrix}=t^3\neq 0\quad(t>0)$$

从而得到(6.1.10)的基本解矩阵

$$G(t)=\begin{bmatrix} t^2 & t^2(1-\ln t) \\ -t & t\ln t \end{bmatrix}$$

经计算得

$$G^{-1}(\tau)=\frac{1}{\tau^2}\begin{bmatrix} \ln\tau & \tau\ln\tau-\tau \\ 1 & \tau \end{bmatrix}$$

又

$$f(\tau)=\begin{bmatrix} \tau \\ -\tau^2 \end{bmatrix}$$

于是

$$G^{-1}(\tau)f(\tau)=\frac{1}{\tau}\begin{bmatrix} \ln\tau-\tau^2\ln\tau+\tau^2 \\ 1-\tau^2 \end{bmatrix}$$

为简单起见，取 $t_0=1$，则有

$$\int_1^t G^{-1}(\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\ln^2 t-\frac{t^2}{2}\ln t+\frac{3}{4}t^2-\frac{3}{4} \\ \ln t-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

最后，方程组(6.1.9)的通解为

$$X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t^2 & t^2(1-\ln t) \\ -t & t\ln t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2\ln t-\frac{1}{2}t^2\ln^2 t+\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{4}t^2 \\ \frac{1}{2}t\ln^2 t+\frac{1}{2}t\ln t-\frac{3}{4}t^3+\frac{3}{4}t \end{bmatrix}$$

§6.2 常系数线性微分方程组

本节应用§6.1的理论，具体地求解常系数线性微分方程组的问题，主要讨论齐次线性微分方程组

$$X'=AX \tag{6.2.1}$$

的基本解矩阵的结构。其中，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$；$A=(a_{ij})_{n\times n}$是 $n\times n$ 的常数矩阵。我们将通过代数的方法探求(6.2.1)的基本解矩阵。

一、矩阵指数 e^A(或 expA)的定义和性质

定义 1 设 A 是 $n\times n$ 矩阵，矩阵指数 e^A 定义为

$$e^A\triangleq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}=I+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{n!}A^n+\cdots \tag{6.2.2}$$

其中，I 为 n 阶单位矩阵；A^n 是矩阵 A 的 n 次幂。规定 $A^0=I$，$0!=1$。式(6.2.2)右端的级数对于任意 A 都是收敛的，因而 e^A 是一个确定的矩阵。

事实上，由范数的性质易知，对一切正整数 k，有

$$\left\|\frac{A^k}{k!}\right\|\leqslant\frac{\|A\|^k}{k!}$$

又因对于任一矩阵 A，$\|A\|$ 是一个确定的正实数，所以数项级数

$$\|I\| + \|A\| + \frac{\|A\|^2}{2!} + \cdots + \frac{\|A\|^n}{n!} + \cdots$$

是收敛的，其和为 $n-1+e^{\|A\|}$。

必须指出，如果一个矩阵级数的每一项的范数都小于一个收敛的数值级数的对应项，则这个矩阵级数是收敛的，因而式(6.2.2)对于一切矩阵 A 都是收敛的。

定义 2 定义级数

$$e^{At} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \tag{6.2.3}$$

式(6.2.3)在 t 的任何有限区间都是一致收敛的。

矩阵指数 e^A 的性质：

1. 若矩阵 A,B 是可交换的即 $AB=BA$，则

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

事实上，由二项式定理及 $AB=BA$，得

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k} c_k^l A^l B^{k-l}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{k} \frac{A^l}{l!} \frac{B^{k-l}}{(k-l)!}\right]$$

而

$$e^A e^B = \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}\right]\left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!}\right] - \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{k} \frac{A^l}{l!} \frac{B^{k-l}}{(k-l)!}\right]$$

所以

$$e^{A-B} = e^A \cdot e^B$$

2. 对于任何 $n\times n$ 矩阵 A，则 $(e^A)^{-1}$ 存在，且有

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}$$

事实上，因为 A 与 $-A$ 是可交换的，令 $B=-A$，由性质 1，得

$$e^A e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^0 = I$$

所以 e^A 是可逆的，且 $(e^A)^{-1}=e^{-A}$。

3. 若 B 为非奇异矩阵，则

$$e^{B^{-1}AB} = B^{-1}e^A B$$

事实上，由矩阵指数定义为

$$e^{B^{-1}AB} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(B^{-1}AB)^k}{k!}$$

$$= I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B^{-1}A^k B}{k!} = B^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}B$$

$$= B^{-1}e^A B$$

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{At}) = Ae^{At}$。

事实上，由 e^{At} 在任何有限区间上一致收敛，且每项均有导数存在，因而可以逐项求导。

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

于是

$$(e^{At})' = 0 + A + \frac{2A^2t}{2!} + \cdots + \frac{nA^nt^{n-1}}{n!} + \cdots$$
$$= A\left(I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{A^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots\right)$$
$$= Ae^{At}$$

定理 1 矩阵$G(t)=e^{At}$是(6.2.1)的基本解矩阵,且$G(0)=I$。反之,满足$G(0)=I$的基本解矩阵就是e^{At}。

证明 由于$G(0)=I, G'(t)=AG(t)$,所以$G(t)=e^{At}$是方程组(6.2.1)的解矩阵,又因为$\det G(0)=\det I=1$,因此$G(t)$是方程组(6.2.1)的基本解矩阵。

反之,若$G(t)$是(6.2.1)的基本解矩阵,且$G(0)=I$,由方程组解的唯一性,即得$G(t)=e^{At}$。

根据定理1可知,(6.2.1)的任一解$\Phi(t)$都可以写成

$$\Phi(t) = e^{At}C$$

其中,C是常数向量。

例 1 试求$X'=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}X$的基本解矩阵。

解 因为$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$令$B=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$,且有$BC=CB$,于是

$$e^{At} = e^{(B+C)t} = e^{Bt}e^{Ct}$$
$$= \begin{bmatrix}e^{2t} & 0\\0 & e^{2t}\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}t + \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}^2\frac{t^2}{2!} + \cdots\right\}$$
$$= \begin{bmatrix}e^{2t} & 0\\0 & e^{2t}\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}t\right\} = e^{2t}\begin{bmatrix}1 & t\\0 & 1\end{bmatrix}$$

二、基本解矩阵的计算公式

本段利用线性代数的基本知识,讨论$\exp(At)$的计算方法,从而解决常系数线性微分方程组的基本解矩阵的具体计算问题。

1. 矩阵的特征值与特征向量

类似于解n阶常系数线性微分方程的方法,设方程组(6.2.1)有形如

$$\Phi(t) = e^{\lambda t}C, (C \neq 0)$$

的解,代入式(6.2.1),得

$$\lambda e^{\lambda t}C = Ae^{\lambda t}C$$

于是

$$(\lambda I - A)C = 0$$

因此,$e^{\lambda t}C$是(6.2.1)的解的充分必要条件是λ满足方程

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

设A是一个$n\times n$的常数矩阵,令

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

是A的关于λ的n次特征多项式,而

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = 0 \qquad (6.2.4)$$

称为A的特征方程,也称为式(6.2.1)的特征方程。满足式(6.2.4)的λ叫做A的特征值(或特

征根）。对于 A 的任一特征值 λ，方程组

$$(\lambda I - A)C = 0$$

的非零解向量 C，叫做 A 的对应于特征向量。

根据以上的讨论，当 λ 是 A 的特征值，C 是对应于 λ 的特征向量时，$e^{\lambda t}C$ 就是式(6.2.1)的一个解。

若 $\lambda=\lambda_0$ 是特征方程的单根，则称 λ_0 是简单的特征根；若 $\lambda=\lambda_0$ 是特征方程的 k 重根，则称 λ_0 是 k 重特征根。

例 2 解方程组

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} X$$

解

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

的特征方程为

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

A 的特征根 $\lambda=1,3,-2$。它们对应的特征向量依次为

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此方程组的通解为

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

2. 当矩阵 A 的具有 n 个线性无关的特征向量时基本解矩阵的计算

从线性代数可知，不同的特征值所对应的特征向量必然是线性无关的，但一个 k 重的特征根却不一定具有 k 个线性无关的特征向量，对应于 k 重根，矩阵 $\lambda I-A$ 的秩必然是大于或等于 $n-k$。因此，n 阶矩阵 A 具有 n 个线性无关的特征向量包括以下两种情况：

(1) A 具有 n 个不同的特征值；

(2) A 的每一重特征值，所对应的线性无关的特征向量的个数与特征值的重数相同。

下面给出当 A 具有 n 个线性无关的特征向量时，微分方程组(6.2.1)的基本解矩阵的计算方法。

定理 2 若矩阵 A 具有 n 个线性无关的特征向量 $V_1, V_2, \cdots, V_n$，它们对应的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$（可能有相同的），则方程组(6.2.1)的基本解矩阵是

$$G(t) = (e^{\lambda_1 t}V_1, e^{\lambda_2 t}V_2, \cdots, e^{\lambda_n t}V_n)$$

证明 由上面关于特征值与特征向量的定义可知，每一向量函数

$$e^{\lambda_j t}V_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

都是(6.2.1)的一个解。因此矩阵

$$G(t) = (e^{\lambda_1 t}V_1, e^{\lambda_2 t}V_2, \cdots, e^{\lambda_n t}V_n)$$

是式(6.2.1)的一个解矩阵，又因为向量 $V_1,V_2,\cdots V_n$ 线性无关，所以

$$\det G(0)=\det(V_1,V_2,\cdots,V_n)\neq 0$$

因此，$G(t)$是(6.2.1)的一个基本解矩阵。证毕。

例 3 求方程组

$$X'=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}X$$

的一个基本解矩阵

解 由特征方程

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2=0$$

解得 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=-1$

对应 $\lambda_1=2$ 的特征向量为

$$U=\alpha(1,1,1)^T$$

对应 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的特征向量为

$$V=\beta(0,1,-1)^T,W=\gamma(1,0,-1)^T$$

取 $\alpha=\beta=\gamma=1$，则得基本解矩阵

$$G(t)=\begin{bmatrix}e^{2t}&0&e^{-t}\\e^{2t}&e^{-t}&0\\e^{2t}&-e^{-t}&-e^{-t}\end{bmatrix}$$

3. 当矩阵 A 的线性无关的特征向量的个数小于 n 时，基本解矩阵的计算

若特征方程 $\det(\lambda I-A)=0$ 具有重特征根时，则线性无关的特征向量的个数有可能小于 n，这样，就不能用定理 2 求基本解矩阵。在这种情况下，我们可以设法直接求满足初始条件 $\Phi(0)=\eta$ 的解

$$\Phi(t)=e^{At}\eta。$$

这种问题的主要困难在于：e^{At}是一个无穷矩阵级数，它不便于计算。如果能使 $e^{At}\eta$ 变成有限项的和，那末这一困难就可以克服。为此，需要引述线性代数的有关结论，作为预备知识。

设 A 是一个 $n\times n$ 的矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是 A 的不同的特征值，它的重数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$，且 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$，可以证明对应于每一个 n_i 的重特征值为 λ_i 线性方程组

$$(\lambda I-A)^{n_i}U=0,i=1,2,\cdots,k$$

具有 n_i 个线性无关的解。因此这一方程组的解的集合构成一个 n_i 维的子空间 $\mathscr{U}_i(i=1,2,\cdots,k)$，利用这些子空间 $\mathscr{U}_i$，我们可以对 n 维的每一个向量进行分解。即对 n 维空间的任一向量 U，存在唯一的一组向量 $U_1,U_2,\cdots,U_k$，其中 $U_i\in\mathscr{U}_i(i=1,2,\cdots,k)$，使得

$$U=U_1+U_2+\cdots+U_k$$

上面所述分解理论的两个特殊情形：

(1)若 A 具有 n 个相异的特征根即 $n_i=1,i=1,2,\cdots n$，则任一向量 U，可表为

$$\begin{aligned}U&=U_1+U_2+\cdots+U_n\\&=c_1V_1+c_2V_2+\cdots+c_nV_n\end{aligned}$$

其中，$V_1,V_2,\cdots,V_n$ 是 A 的一组线性无关的特征向量；$c_i(i=1,2,\cdots n)$是某些常数。

(2)若 A 只有一个特征值(即 n 重特征值),这时不必对 n 维向量进行分解,并且易于求出基本解矩阵 e^{At}。

我们可求方程组(6.2.1)满足初始条件 $\Phi(0)=\eta$ 的解

$$\Phi(t) = e^{At}\eta.$$

首先将 n 维向量 η 在各子空间 $\mathscr{U}_i$ 上进行分解,设

$$\eta = U_1 + U_2 + \cdots + U_k, U_i \in \mathscr{U}_i \quad (i = 1,2,\cdots,k)$$

且

$$(\lambda_i I - A)^{n_i} U_i = 0, i = 1,2,\cdots,k.$$

当 $l \geqslant n_i$ 时(l 为正整数),显然有

$$(\lambda_i I - A)^l U_i = 0, i = 1,2,\cdots,k$$

注意到

$$\Phi(t) = e^{At}\eta = e^{At}(U_1 + U_2 + \cdots + U_k) = \sum_{i=1}^{k} e^{At} U_i$$

及

$$e^{(\lambda_i I - A)t} U_i = \left\{ I + (\lambda_i I - A)t + \frac{(\lambda_i I - A)^2}{2!} t^2 + \cdots + \frac{(\lambda_i I - A)^{n_i - 1}}{(n_i - 1)!} t^{n_i - 1} \right\} U_i$$

因为当 $l \geqslant n_i$ 时,$(\lambda_i I - A)^l U_i = 0$。

根据矩阵指数性质($-At$ 与 $\lambda_i I$ 可交换),有

$$e^{(\lambda_i I - A)t} = e^{\lambda_i It} e^{-At} = e^{-At} e^{\lambda_i It}$$

因而得

$$\begin{aligned} e^{-At} U_i &= e^{-\lambda_i t} e^{(\lambda_i I - A)t} U_i \\ &= e^{-\lambda_i t} \left\{ I + (\lambda_i I - A)t + \frac{(\lambda_i I - A)^2}{2!} t^2 + \cdots + \frac{(\lambda_i I - A)^{n_i - 1}}{(n_i - 1)!} \right\} U_i \end{aligned}$$

于是

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i t} \left\{ I + (\lambda_i I - A)t + \frac{(\lambda_i I - A)^2}{2!} t^2 + \cdots + \frac{(\lambda_i I - A)^{n_i - 1}}{(n_i - 1)!} t^{n_i - 1} \right\} U_i,$$

或写成

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i t} \left\{ \sum_{j=0}^{n_i - 1} \frac{t^j}{j!} (\lambda_i I - A)^j \right\} U_i \qquad (6.2.5)$$

公式(6.2.5)就是方程组(6.2.1)满足初始条件 $\Phi(0)=\eta$ 的解。

公式(6.2.5)表明,常系数线性微分方程组(6.2.1)的任一解,都可以通过有限次代数运算求出来。同时,从公式(6.2.5)还可以得到基本解矩阵 e^{At}。

然后再来考虑,A 只有一个 n 重的特征值 λ_0 的情形。这时线性方程组

$$(\lambda_0 I - A)^n U = 0$$

必有 n 个线性无关解。方程的解集合构成一个 n 维线性空间,于是任一 n 维向量都是方程组的解。因此,

$$(\lambda_0 I - A)^n$$

必为零矩阵。于是可以直接得到 e^{At},而

$$e^{-At} = e^{-\lambda_0 t} e^{(\lambda_0 I - A)t} = e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda_0 I - A)^i}{i!} t^i \qquad (6.2.6)$$

根据公式(6.2.5),可以直接得到下面的一个定理,这个定理在常微分方程的理论和应用

上都是非常重要的。

定理 3 对于给定的常系数线性微分方程组(6.2.1),有

(1)若 A 的特征值的实部都是负的,则(6.2.1)的任一解,当 $t\to+\infty$ 时都趋于零;

(2)若 A 的特征直的实部都是非正的,且实部为零的特征值的重数与所对应的线性无关的特征向量的个数相同,则方程组(6.2.1)的任一解当 $t\to+\infty$ 时,都保持有界;

(3)若 A 的特征值至少有一个具有正实部,则(6.2.1)至少有一解当 $t\to+\infty$ 时,趋于无穷。

证明 根据公式(6.2.5)易知,方程组(6.2.1)的任一解都可表示为 t 的指数函数与 t 的幂函数的线性组合,即可得(1)和(2)的结论。

设 $\lambda=\alpha+i\beta$ 是 A 的特征根,且 $\alpha>0$,取 η 为 A 的对应于 λ 的特征向量,则向量函数

$$\Phi(t)=e^{\lambda t}\eta=e^{\alpha t+i\beta t}\eta$$

是(6.2.1)的一个解。于是,当 $t\to+\infty$ 时,有

$$\|\Phi(t)\|=e^{\alpha t}\|\eta\|\to+\infty$$

这就证明了定理中的(3)。

例 4 求方程组 $X'=AX$,其中 $X=(x_1,x_2,x_3)^T$

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

满足初始条件 $\Phi(0)=\eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)^T$ 的解 $\Phi(t)$,并求 e^{At}。

解 A 的特征方程为

$$\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$$

特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$,其中 λ_1 的重数为 $n_1=1$,λ_2 的重数 $n_2=2$。解下面方程组

$$(I-A)U=0 \text{ 和 } (2I-A)^2U=0$$

首先讨论

$$(I-A)U=\begin{bmatrix}-2 & +1 & -1\\ -2 & +1 & -1\\ -1 & +1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

此方程组的解为

$$U_1=\begin{bmatrix}0\\ \alpha\\ \alpha\end{bmatrix},\text{其中 }\alpha\text{ 为任意常数}$$

于是子空间 $\mathscr{U}_1$ 是由向量 U_1 所张成的。

其次讨论

$$(2I-A)^2U=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

此方程组的解为

$$U_2=\begin{bmatrix}\beta\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix},\text{其中 }\beta,\gamma\text{ 是任意常数}$$

子空间 $\mathscr{U}_2$ 是由向量 U_2 所张成的。

现在讨论向量 $\eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)^T$ 在子空间 $\mathscr{U}_1$、$\mathscr{U}_2$ 上分解。令

$$\eta = U_1 + U_2, U_1 \in \mathscr{U}_1, U_2 \in \mathscr{U}_2,$$

因而

$$\begin{cases} \beta = \eta_1 \\ \alpha + \beta = \eta_2 \\ \alpha + \gamma = \eta_3 \end{cases}$$

解得 $\alpha=\eta_2-\eta_1, \beta=\eta_1, \gamma=\eta_3-\eta_2+\eta_1$，于是

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 - \eta_1 \\ \eta_2 - \eta_1 \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_1 \\ \eta_3 - \eta_2 + \eta_1 \end{bmatrix}$$

根据公式(6.2.5)，我们得到满足 $\Phi(0)=\eta$ 的解为

$$\Phi(t) = e^t I U_1 + e^{2t}\{I + (2I - A)t\} U_2$$

$$= e^t \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 - \eta_1 \\ \eta_2 - \eta_1 \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} \eta_1 + t(\eta_3 - \eta_2 + \eta_1) \\ \eta_1 + t(\eta_3 - \eta_2 + \eta_1) \\ \eta_3 - \eta_2 + \eta_1 \end{bmatrix}$$

令 η 依次为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

代入上式，即得到三个线性无关解，以这些解为列，就得到基本解矩阵

$$e^{At} = \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & -te^{2t} & te^{2t} \\ -e^t + (1+t)e^{2t} & e^t - te^{2t} & te^{2t} \\ -e^t + e^{2t} & e^t - e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

三、常系数非齐次线性微分方程组的常数变易公式

设非齐次线性微分方程组为

$$X' = AX + F(t) \tag{6.2.7}$$

其中，A 是 $n\times n$ 的常数矩阵；$F(t)$ 是已知的连续向量函数。因为(6.2.7)对应的齐次线性微分方程组(6.2.1)的基本解矩阵为 $G(t)=e^{At}$，这样 §6.1 中的常数变易公式(6.1.8)在形式上变得特别简单，其中

$$G^{-1}(s) = (e^{As})^{-1} = e^{-sA}$$

$$G(t)G^{-1}(t_0) = e^{At}e^{-At_0} = e^{(t-t_0)A}$$

如果初始条件 $\Phi(t_0)=\eta$，$\Phi_h(t)=e^{(t-t_0)A}\eta$，这样方程组(6.2.7)满足 $\Phi(t_0)=\eta$ 的解为

$$\Phi(t) = e^{(t-t_0)A}\eta + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}F(s)\mathrm{d}s \tag{6.2.8}$$

公式(6.2.8)就是常系数非齐次线性微分方程组的常数变易公式。

例 5 解 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{dX}{dt}=\begin{bmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(t)\\ X|_{t=0}=X_0,\end{cases}$$

其中，$u(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0\\ 1, & t>0.\end{cases}$

解 已知 $A=\begin{bmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}$，$(\lambda I-A)=\begin{bmatrix}\lambda & -6\\ 1 & \lambda+5\end{bmatrix}$，$(\lambda I-A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda^2+5\lambda+6}\begin{bmatrix}\lambda-5 & 6\\ -1 & \lambda\end{bmatrix}$，从而求得

$$e^{At}=\begin{bmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t} & 6e^{-2t}-6e^{-3t}\\ -e^{-2t}+e^{-3t} & -2e^{-2t}+3e^{-3t}\end{bmatrix}$$

再由式(6.2.8)得原方程组的解

$$\begin{aligned}X(t)&=e^{At}X_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}d\tau\\&=e^{At}X_0+\int_0^t\begin{bmatrix}6e^{-2(t-\tau)}-6e^{-3(t-\tau)}\\ -2e^{-2(t-\tau)}+3e^{-3(t-\tau)}\end{bmatrix}d\tau\\&=\begin{bmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t} & 6e^{-2t}-6e^{-3t}\\ -e^{-2t}+e^{-3t} & -2e^{-2t}+3e^{-3t}\end{bmatrix}X_0+\begin{bmatrix}1-3e^{-2t}+2e^{-3t}\\ e^{-2t}-e^{-3t}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

§6.3 线性周期系统的 Floquet 理论

本节考虑周期系数线性微分方程组

$$X'=A(t)X \tag{6.3.1}$$

其中，$A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}$ 是在 $-\infty<t<+\infty$ 上以 $T(T>0)$ 为周期的连续的 $n\times n$ 矩阵函数，即 $A(t+T)=A(t)$，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$。研究方程组(6.3.1)解的性质，Floquet 理论和 Liapunov 可化组的情形。

一、矩阵的对数函数 $\log X$

引理 设 A 是任一非奇异的 $n\times n$ 矩阵，则必存在 $n\times n$ 矩阵 B 使 $e^B=A$。

必须指出，引理中所出现的矩阵 B 并不是唯一的。例如

$$e^B=e^Be^{2k\pi iI}=e^{B+2k\pi iI},k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

定义 1 设 X 为非奇异矩阵，如果存在 Y 矩阵使得

$$e^Y=X$$

则称矩阵 Y 为矩阵 X 的对数函数，记作 $Y=\log X$。显然，这个函数是多值的。

还可以指出，一个实的非奇异矩阵 C 的对数不一定是实的，即不一定就存在一个实的矩阵 B，使 $e^B=C$；如单行单列矩阵 $C=-1$ 就是一例。但可以证明：若 C 是一实矩阵，则必存在一个实矩阵 B，使 $C^2=e^B$。

二、周期系数线性微分方程组解的基本性质

定理 1 若 $G(t)$ 是方程组(6.3.1)的基本解矩阵，则 $G(t+T)$ 也是方程组(6.3.1)的基本解矩阵；从而存在一个非奇异常数矩阵 C，使

$$G(t+T)=G(t)C$$

此处 C 称为方程组(6.3.1)的关于解 $G(t)$ 的根本矩阵。

事实上，由 $\det G(t)\neq 0 \quad (-\infty<t<+\infty)$，得

$$\det G(t+T)\neq 0 \qquad (-\infty<t<+\infty)$$

此处，由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t+T)=A(t+T)G(t+T)=A(t)G(t+T)$$

故 $G(t+T)$ 也是方程组(6.3.1)的一个基本解矩阵。

可以证明，方程组(6.3.1)的所有根本矩阵都是彼此相似的。

定理 2(Floquet 定理)　对方程组(6.3.1)的任一基本解矩阵 $G(t)$，必存在一个可微的，周期为 T 的非奇异矩阵函数 $P(t)$ 和一个常数矩阵 B，使

$$G(t)=P(t)\mathrm{e}^{Bt} \tag{6.3.2}$$

证明　由定理 1，必存在一个非奇异常数矩阵 C，使

$$G(t+T)=G(t)C \tag{6.3.3}$$

又根据引理，必存在一个非奇异常数矩阵 B，使

$$C=\mathrm{e}^{BT} \text{ 或 } B=\frac{1}{T}\log C \tag{6.3.4}$$

如令

$$P(t)=G(t)\mathrm{e}^{-Bt} \tag{6.3.5}$$

则

$$G(t)=P(t)\mathrm{e}^{Bt}$$

其中，$P(t)$ 是可微的，并且是周期为 T 的非奇异的周期函数，因为由式(6.3.5)、(6.3.3)、(6.3.4)，有

$$\begin{aligned}P(t+T)&=G(t+T)\mathrm{e}^{-B(t+T)}\\&=G(t)\mathrm{e}^{BT}\mathrm{e}^{-BT}\mathrm{e}^{-Bt}=G(t)\mathrm{e}^{-Bt}=P(t)\end{aligned}$$

$$\det P(t)=\det G(t)\cdot\det\mathrm{e}^{-Bt}\neq 0$$

定理 2 指出，如果已知 $G(t)$ 在区间 $0\leqslant t\leqslant T$ 上的值，则它在 $-\infty<t<+\infty$ 上的值就被完全确定。事实上，由式(6.3.2)得

$$G(0)=P(0),G(T)=P(T)\mathrm{e}^{BT}=P(0)\mathrm{e}^{BT}$$

从而有

$$\mathrm{e}^{BT}=G^{-1}(0)G(T) \tag{6.3.6}$$

由此可以确定 B。这样，根据式(6.3.5)，由 $G(t)$ 在 $0\leqslant t\leqslant T$ 上的值就确定了 $P(t)$ 的值；从而再根据 $P(t)$ 的周期性，由式(6.3.2)便确定了 $G(t)$ 在整个 $-\infty<t+\infty$ 上的值。

定理 3(Liapunov 定理)　在变换 $X=P(t)Y$ 之下，方程组(6.3.1)可化为常系数线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=BY$$

其中，矩阵 B 和 $P(t)$ 分别由式(6.3.4)和式(6.3.5)确定。

证明　在等式 $X=P(t)Y$ 两端对 t 微分，得

$$A(t)P(t)Y=P'(t)Y+P(t)Y'$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=[P^{-1}(t)A(t)P(t)-P^{-1}(t)P'(t)]Y$$

由式(6.3.2)和式(6.3.5),有

$$P^{-1}(t)A(t)P(t)-P^{-1}(t)P'(t)=B$$

故

$$Y'=BY$$

如上所述,对方程组(6.3.1)的任一基本解矩阵 $G(t)$,总存在唯一的非奇异常数矩阵 C,使 $G(t+T)=G(t)C$;而对应于这个 C,又至少存在一个常数矩阵 B,使 $C=\mathrm{e}^{BT}$。

必须指出,矩阵 C 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是由式(6.3.1)唯一确定的,我们称它为方程组(6.3.1)的特征值。相应地,称矩阵 B 的特征值 $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n$ 为方程组(6.3.1)的特征指数。但是特征指数却不是由方程组(6.3.1)唯一确定的,因为由 C 所确定的 B 不是唯一的,并对不同的 B 它们的特征值之间总相差 $\frac{2\pi i}{T}$ 的整数倍。又在方程组(6.3.1)的特征值 $\lambda_j(j=1,2,\cdots,n)$ 与特征指数 $\rho_j(j=1,2,\cdots,n)$ 之间满足关系

$$\lambda_j=\mathrm{e}^{\rho_j T},j=1,2,\cdots,n$$

例 1 如果 $\mathrm{Re}\rho_j<0$ 或 $|\lambda_j|<1,j=1,2,\cdots,n$,则由式(6.3.2)得

$$\lim_{t\to+\infty}G(t)=0$$

从而当 $t\to+\infty$ 时,方程组(6.3.1)的所有解 $X(t)\to 0$。

例 2 由式(6.3.2)不难看出,要使方程组(6.3.1)存在有周期为 T 的非零解的充要条件是存在一个非零的 n 维列向量 C,使

$$(\mathrm{e}^{BT}-I)\cdot C=0\quad(I\text{ 是 }n\times n\text{ 单位阵})$$

这个条件相当于 $C=\mathrm{e}^{BT}$ 以 1 为其特征值,或 B 以 $0\left(\mathrm{mod}\ \frac{2\pi i}{T}\right)$ 为其特征值。

下面给出一个基本结果,由式(6.3.6)看出,$G(T)=G(0)\mathrm{e}^{BT}$,所以 $\lambda_j,j=1,2,\cdots,n$ 也是矩阵 $G^{-1}(0)G(T)$ 的特征值。特别当 $G(0)=I$ 时,则 $\mathrm{e}^{BT}=G(T)$,而 $\lambda_j,j=1,2,\cdots,n$ 便是 $G(T)$ 的特征值。于是根据 Liouville 公式有

$$\prod_{j=1}^{n}\lambda_j=\det G(T)=\exp\int_0^T\mathrm{tr}A(s)\mathrm{d}s \tag{6.3.7}$$

从而

$$\sum_{j=1}^{n}\rho_j=\frac{1}{T}\int_0^T\mathrm{tr}A(s)\mathrm{d}s\left(\mathrm{mod}\ \frac{2\pi i}{T}\right) \tag{6.3.8}$$

因此,如果已知方程组(6.3.1)的 $n-1$ 个特征值或特征指数,就可以由式(6.3.7)和式(6.3.8)确定它的第 n 个特征值或特征指数。

三、可 化 组

我们知道,在线性微分方程组理论中最简单的与讨论得最多的是常系数微分方程组,所以,我们对于可以利用某种变换化为常系数方程组的这种方程组最为关心,Liapunov 称这种方程组为可化组。

定义 2 如果存在一个非奇异的 $n\times n$ 矩阵函数 $S(t)$,它具有以下性质:

(1)$S(t)$ 与 $S'(t)$ 都在 $t\geqslant\tau$ 上连续;

(2)$S(t)$ 与 $S^{-1}(t)$ 都在 $t\geqslant\tau$ 有界,即存在 $M>0$,使

$$|S(t)| \leqslant M, |S^{-1}(t)| \leqslant M, \text{当 } t \geqslant \tau \text{ 时};$$

(3)在变换 $X=S(t)Y$ 之下，方程组(6.3.1)化成

$$Y' = BY \tag{6.3.9}$$

其中，B 是一 $n\times n$ 常数矩阵，则称方程组(6.3.1)是可化组。具有上述性质的矩阵 $S(t)$ 称为 Liapunov 矩阵，变换 $X=S(t)Y$ 称为 Liapunov 变换。

根据定理 3 可知，凡是有周期系数的线性方程组(6.3.1)都是可化组。下面我们给出可化组所具有的一般特征。

定理 4(Luking 定理)　方程组(6.3.1)为可化组的充分必要条件是它有一个基本解矩阵 $G(t)$ 可写成

$$G(t) = S(t)e^{Bt}$$

的形式，其中 $S(t)$ 和 $S'(t)$ 都是定义在 $t\geqslant\tau$ 上的有界的 $n\times n$ 矩阵函数，而 B 是 $n\times n$ 常数矩阵。

证明　必要性：设方程组(6.3.1)是可化的。于是必存在满足上述条件(1)～(3)的矩阵 $S(t)$，从而在变换 $X=S(t)Y$ 之下，方程组(6.3.1)将化成方程组(6.3.9)，但已知 e^{Bt} 是方程组(6.3.9)的一基本解矩阵，因此 $G(t)=S(t)e^{Bt}$ 便是方程组(6.3.1)的一基本解矩阵。并且 $S(t)$ 满足定理所要求的条件。

充分性　设方程组(6.3.1)具有形如 $G(t)=S(t)e^{Bt}$ 的基本解矩阵，其中 $S(t)$、B 满足定理所述条件。

令作变换 $X=G(t)e^{-Bt}Y$，则

$$\begin{aligned} X' &= G'(t)e^{-Bt}Y + G(t)(-B)e^{-Bt}Y + G(t)e^{-Bt}Y' \\ &= AG(t)e^{-Bt}Y \end{aligned}$$

因为 $G'(t)=AG(t)$，所以

$$Y' = BY$$

因此，方程组(6.3.1)是可化的。证毕。

定理 5　若方程组(6.3.1)的所有解都是有界的，并对所有的 $t\geqslant\tau$，$\int_\tau^t \mathrm{tr}A(s)\mathrm{d}s > d > -\infty$；则方程组(6.3.1)是可化的，并可化成方程组 $Y'=0$

证明　设 $G_0(t)=(x_{ij}(t))$ 是方程组(6.3.1)的一个基本解矩阵，则根据它是有界的。又因 $G_0^{-1}(t)=(G_{ij}(t)/\det G_0(t))$，其中 $G_{ij}(t)$ 是 $G_0(t)$ 中元素 x_{ij} 所对应的代数余子式，并且

$$\det G_0(t) = \det G_0(\tau)e^{\int_\tau^t \mathrm{tr}A(s)\mathrm{d}s} > \det G_0(\tau)e^d > 0$$

因此 $\det G_0^{-1}(t)$ 也是有界的，从而 $G_0(t)$ 是 Liapunov 矩阵。

作变换 $X=G_0(t)Y$，则有

$$X' = G_0'(t)Y + G_0(t)Y' = AG_0(t)Y$$

因为 $G_0'=AG_0(t)$，所以 $G_0(t)Y'=0$，又因为 $G_0(t)$ 是非奇异的，故 $Y'=0$。证毕。

推论　若方程组(6.3.1)的系数矩阵 $A(t)$ 满足条件

$$\int_\tau^{+\infty} |A(s)|\mathrm{d}s < +\infty$$

则方程组(6.3.1)是可化的。

证明留给读者完成。

§6.4 相平面和奇点

一、相　平　面

设二维自治系统

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= f(x,y)\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= g(x,y)\end{aligned}\right\} \tag{6.4.1}$$

其中 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 是 x、y 的连续可微函数。

当给定 x_0、y_0 后，方程(6.4.1)存在唯一的解

$$x = \varphi(t), y = \psi(t) \tag{6.4.2}$$

满足条件

$$\varphi(0) = x_0, \psi(0) = y_0$$

显然 $x=\varphi(t-a)$，$y=\psi(t-a)$ 也是方程组(6.4.1)的解，其中 a 是常数，这时 $\varphi(t-a)|_{t=a}=x_0$，$\psi(t-a)|_{t=a}=y_0$。

把 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 视为 (x,y) 平面上曲线的参数方程，那末它在点 $(\varphi(t),\psi(t))$ 处的切向量是

$$(f(\varphi(t),\psi(t)),g(\varphi(t),\psi(t)))$$

即该曲线在点 (x,y) 处的切向量是 $(f(x,y),g(x,y))$，在 t、x、y 空间中的曲线 $(t,\varphi(t),\psi(t))$ 是微分方程组(6.4.1)的积分曲线，而它在 (x,y) 平面上的投影就是以 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 为参数方程的曲线，称为方程组(6.4.1)的相曲线，而 (x,y) 平面称为自治系统的相平面。

微分方程组的积分曲线是不相交的，它们在 (x,y) 平面上的投影(相轨线)是否相交呢？如果 $x=u(t)$，$y=v(t)$ 是方程组(6.4.1)的另一解，它在 (x,y) 平面上的图形——相轨线与相轨线(6.4.2)相交于某一点，即存在 t_1 和 t_2，使得

$$\varphi(t_1) = u(t_2), \psi(t_1) = v(t_2)$$

那末，因为 $x=u(t+t_2-t_1)$，$y=v(t+t_2-t_1)$ 也是(6.4.1)的解，满足

$$u(t+t_2-t_1)|_{t=t_1} = u(t_2) = \varphi(t_1)$$

$$v(t+t_2-t_1)|_{t=t_1} = v(t_2) = \psi(t_1)$$

从而由初值问题解的唯一性得到

$$u(t+t_2-t_1) \equiv \varphi(t), v(t+t_2-t_1) \equiv \psi(t)$$

即 $x=u(t-t_2-t_1)$，$y=v(t+t_2-t_1)$ 和 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 完全一致，从而 $x=u(t)$，$y=v(t)$ 在 (x,y) 平面上表示的曲线与 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 表示的曲线完全一致。因此，相轨线或者重合或者不相交。

定义　当 $\varphi(t)\equiv a$，$\psi(t)\equiv b$ 时，相轨线退化为 (x,y) 平面上的一个点，这时

$$f(a,b) = 0, g(a,b) = 0 \tag{6.4.3}$$

反之，若 (a,b) 适合式(6.4.3)，那末 $x=a$，$y=b$ 是方程组(6.4.1)的解，相轨线退化为一点 (a,b)，称 (a,b) 为自治系统式(6.4.1)的奇点，也称为式(6.4.1)的平衡位置(或平衡解)。

例如，具有阻尼的单摆运动方程是

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + b\frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \tag{6.4.4}$$

其中,φ是摆角;l是摆长;b是阻尼系数;g是重力加速度。若令

$$x = \varphi, y = \frac{d\varphi}{dt}$$

那末式(6.4.4)可化为微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{g}{l}\sin x - by \end{cases}$$

显然,$x=k\pi, y=0$是它的平衡位置,其中k为整数。这也表明,一个二阶自治系统的奇点可能不止一个。但是,我们总是对各个奇点逐一进行讨论。

如果(a,b)是系统(6.4.1)的奇点,令$\bar{x}=x-a, \bar{y}=y-b$,那末式(6.4.1)变为

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt} = f(\bar{x} + a, \bar{y} + b) \\ \dfrac{d\bar{y}}{dt} = g(\bar{x} + a, \bar{y} + b) \end{cases}$$

它仍是自治系统,并且(0,0)是它的奇点。因此,我们可以假设奇点为(0,0),而不会妨碍讨论的一般性。

设(0,0)是方程组(6.4.1)的奇点,那末

$$f(0,0) = 0, g(0,0) = 0$$

若记

$$\alpha = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}, \beta = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$$

$$\gamma = \frac{\partial g(0,0)}{\partial x}, \delta = \frac{\partial g(0,0)}{\partial y}$$

那末在(0,0)附近成立着

$$f(x,y) = \alpha x + \beta y + X(x,y)$$

$$g(x,y) = \gamma x + \delta y + Y(x,y)$$

其中,$X(x,y)$,$Y(x,y)$在(0,0)附近连续可微,并且

$$\left.\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{X(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{Y(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.4.5}$$

方程组(6.4.1)在(0,0)附近可表示如下

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta y + X(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = \gamma x + \delta y + Y(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{6.4.6}$$

其中X,Y满足条件(6.4.5)。

二、二阶线性系统的奇点

为讨论自治系统(6.4.6)在奇点(0,0)附近相轨线的性状,先讨论它的一次近似方程组的

相轨线的性状，然后借助于一次近似讨论(6.4.6)。方程组(6.4.6)的一次近似是二阶系统

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=\alpha x+\beta y\\\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=\gamma x+\delta y\end{aligned}\right\}\tag{6.4.7}$$

该方程组的系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$$

当 A 的行列式

$$\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$$

时，方程组(6.4.7)有唯一的奇点(0,0)；当 A 的行列式为 0 时，如果 α,β,γ 和 δ 不全为 0，例如 $\alpha\neq 0$，那末 $\alpha x+\beta y=0$ 上的点都是奇点；当 A 的元素全为 0 时，相平面上每一点都是奇点。下面主要讨论 $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ 的情形。

对于方程组(6.4.7)的相轨线的性状，可以借助于它的解的表达式来进行。从对常系数线性微分方程组的讨论知道，它取决于系数矩阵 A 的特征值的情况。A 的特征方程是

$$\begin{vmatrix}\lambda-\alpha & -\beta\\ -\gamma & \lambda-\delta\end{vmatrix}=\lambda^2-(\alpha+\delta)\lambda+(\alpha\delta-\beta\gamma)=0$$

1. 当 $(\alpha+\delta)^2-4(\alpha\delta-\beta\gamma)=(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma>0$ 时，A 有两个不同的实特征值 λ_1 和 λ_2。如果 A 相应于 λ_1 和 λ_2 的特征向量为 $\begin{pmatrix}h_{11}\\h_{12}\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}h_{21}\\h_{22}\end{pmatrix}$，那末它们是线性无关的，方程组(6.4.7)的通解是

$$\left.\begin{aligned}x&=c_1h_{11}\mathrm{e}^{\lambda_1t}+c_2h_{21}\mathrm{e}^{\lambda_2t}\\y&=c_1h_{12}\mathrm{e}^{\lambda_1t}+c_2h_{22}\mathrm{e}^{\lambda_2t}\end{aligned}\right\}\tag{6.4.8}$$

由表达式(6.4.8)得到：

当 $c_1=c_2=0$ 时，它是奇点(0,0)；

当 $c_1\neq 0,c_2=0$ 时，它是

$$x=c_1h_{11}\mathrm{e}^{\lambda_1t},y=c_1h_{12}\mathrm{e}^{\lambda_1t}$$

这从(0,0)出发而不含(0,0)的半直线。当 $\lambda_1<0$ 时，该半直线上的点当 $t\to+\infty$ 时趋于(0,0)；而若 $\lambda_1>0$，那末当 $t\to-\infty$ 时趋于(0,0)，即当 t 增加时，轨线的点远离奇点(0,0)，半直线是直线

$$h_{12}x-h_{11}y=0\tag{6.4.9}$$

的一部分。

当 $c_1=0,c_2\neq 0$ 时，(6.4.7)的解是

$$x=c_2h_{21}\mathrm{e}^{\lambda_2t},y=c_2h_{22}\mathrm{e}^{\lambda_2t}$$

也是半直线，即是直线

$$h_{22}x-h_{21}y=0\tag{6.4.10}$$

除去(0,0)后的两条半直线。

问题在于这两条直线式(6.4.9)和式(6.4.10)能否直接由方程组(6.4.7)来决定？由于这两条直线都过原点，设它们的斜率为 k，这时 $\dot{y}(t)/\dot{x}(t)=k$，从而 k 应当适合

$$k=\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}=\frac{\gamma+\delta k}{\alpha+\beta k}$$

即

$$\beta k^2+(\alpha-\delta)k-\gamma=0 \tag{6.4.11}$$

当$(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma>0$时，它有两个实根$k_1$和$k_2$。也就是说，直线(6.4.9)和(6.4.10)的斜率是由方程(6.4.11)决定的。所以，并不需要求出A的特征向量。其实，由(6.4.11)能决定特征向量。

为进一步讨论，对λ_1、λ_2的不同情形仔细分析：

(1) $\lambda_1<\lambda_2<0$，这时，(6.4.7)的每一相轨线当$t\to+\infty$时趋于奇点(0,0)，并且当$c_1\neq0$，$c_2\neq0$时

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{c_1h_{12}e^{\lambda_1t}+c_2h_{22}e^{\lambda_2t}}{c_1h_{11}e^{\lambda_1t}+c_2h_{21}e^{\lambda_2t}}=\frac{h_{22}}{h_{21}}$$

即是直线(6.4.10)的斜率。它表明，所有其余的相轨线都趋于(0,0)，且在(0,0)处与直线(6.4.10)相切。

同样，当$t\to-\infty$时，$(x(t),y(t))$趋于无穷远，且它的渐近线的斜率为$\frac{h_{12}}{h_{11}}$，即渐近线与(6.4.9)平行，这时，奇点称为稳定结点。

(2) $0<\lambda_1<\lambda_2$，这时，当$t\to-\infty$时，(6.4.7)的每一相轨线趋于(0,0)，即相轨线远离(0,0)，情形与(6.4.1)相似。这时，奇点(0,0)称为不稳定结点。

(3) $\lambda_1<0<\lambda_2$，这时，当$c_1\neq0$，$c_2\neq0$，相轨线当$t\to+\infty$时或$t\to-\infty$时都趋于无穷远，并且它的渐近线的斜率分别为k_1和k_2，即是直线(6.4.9)和(6.4.10)的斜率。进而可以证明，(6.4.9)和(6.4.10)是相轨线的渐近线。这时，奇点称为鞍点。因此，当$\lambda_1\neq\lambda_2$时，相轨线的大致形式已经决定，剩下的问题是，当奇点是结点时，相轨线趋于(0,0)的直线的斜率是方程(6.4.11)的哪一个根。为此，我们看一些例题。

例1 设二阶系统是

$$\frac{dx}{dt}=-3x-2y$$

$$\frac{dy}{dt}=x$$

这时，特征方程

$$\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda+2)=0$$

有两个负根，从而(0,0)是稳定结点。而趋于(0,0)的半直线相轨线的斜率k由

$$2k^2+3k+1=(2k+1)(k+1)=0$$

决定，所以$k_1=-\frac{1}{2}$，$k_2=-1$。

为了决定相轨线趋于(0,0)时公切线的斜率，我们取点(0,1)，轨线在(0,1)处的切线指向是向量(−2,0)，由于相轨线是不相交的，从(0,1)出发的相轨线当$t\to+\infty$时趋于(0,0)，所以应与$y=-x$相切(图6.1)。

例2 设二阶系统是

$$\frac{dx}{dt}=3x-2y$$

$$\frac{dy}{dt}=x$$

特征方程

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

有两个正根 1 和 2，方程(6.4.11)是

$$2k^2 - 3k + 1 = (2k - 1)(k - 1) = 0$$

所以
$$k_1 = \frac{1}{2}, k_2 = 1。$$

为决定当 $t \to -\infty$ 时相轨线的公切线斜率，取点(0,1)，过(0,1)的相轨线的切线指向与向量(−2,0)一致，从而相轨线的切线指向与向量(−2,0)一致，从而相轨线在 $t \to -\infty$ 时的公切线斜率为 1(图 6.2)。

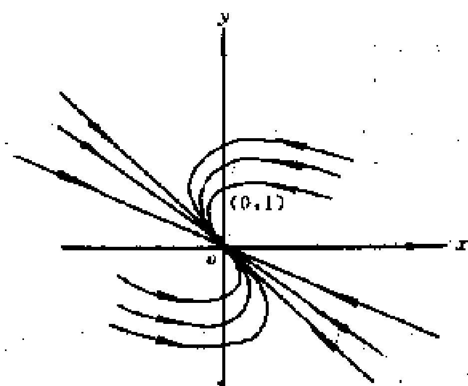


图 6.1

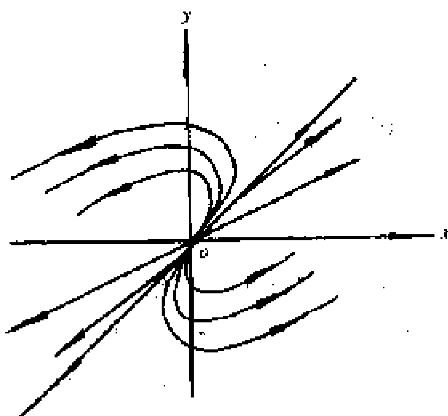


图 6.2

例 3 设二阶系统是

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = x$$

特征方程是

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

它有两个根 −1 和 2，所以奇点是鞍点。

方程(6.4.11)成为

$$2k^2 + k - 1 = (2k - 1)(k + 1) = 0$$

所以 $k_1 = \frac{1}{2}, k_2 = -1$。

由于当 $x > 0$ 时，$\frac{dy}{dt} > 0$；当 $x < 0$ 时，$\frac{dy}{dt} < 0$ 所以相轨线性状如图 6.3 所示。

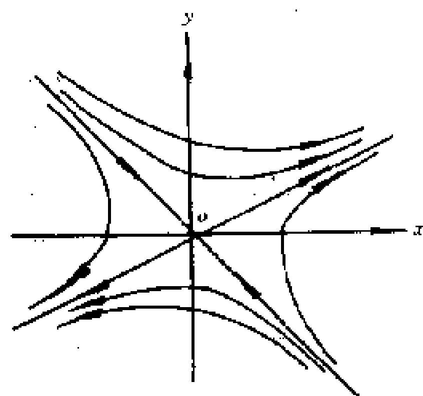


图 6.3

2. 当 $(\alpha-\delta)^2 + 4\beta\gamma = 0$ 时，A 有两个相同的特征值 λ，这时(6.4.7)的解的表达式有两种可能的情形。

(1) 如果 A 相应于 λ 有两个线性无关的特征向量 $\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \end{pmatrix}$，那末(6.4.7)的通解是

$$x = (c_1 h_{11} + c_2 h_{21})e^{\lambda t}$$

$$y = (c_1 h_{12} + c_2 h_{22})e^{\lambda t}$$

当 $c_1^2+c_2^2\neq 0$ 时，它们都是趋于或远离(0,0)的半直线都是方程组(6.4.7)的相轨线。

当 $\lambda<0$ 时，相轨线都趋于(0,0)，称奇点(0,0)是稳定的临界结点(图 6.4)；当 $\lambda>0$ 时，相轨线都远离(0,0)，称奇点(0,0)为不稳定的临界结点(图 6.5)。

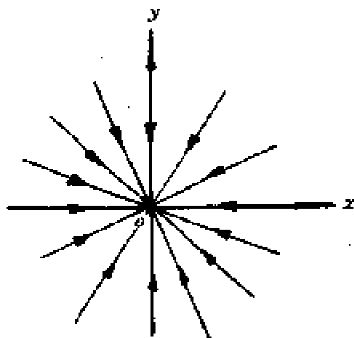


图 6.4

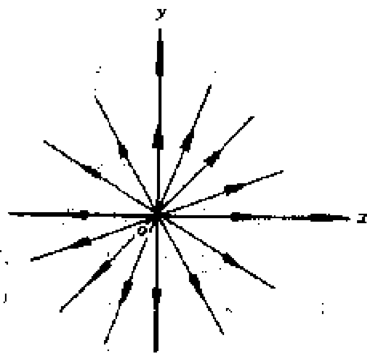


图 6.5

显然，系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\lambda x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\lambda y$$

是这种情形。

(2) 如果 A 相应于 λ 恰有一个特征向量 $\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}$，这时(6.4.7)的通解具有形状

$$x=c_1h_1\mathrm{e}^{\lambda t}+c_2(h_1t+g_1)\mathrm{e}^{\lambda t}$$

$$y=c_1h_2\mathrm{e}^{\lambda t}+c_2(h_2t+g_2)\mathrm{e}^{\lambda t}$$

其中

$$\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}g_1\\g_2\end{bmatrix}$$

是 A 相应于 λ 的循环向量系数多项式，如果 $\lambda<0$，那末，当 $t\to+\infty$ 时，相轨线趋于(0,0)。

当 $c_1\neq 0, c_2=0$ 时，相轨线是半直线

$$x=c_1h_1\mathrm{e}^{\lambda t},\ y=c_2h_2\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{6.4.12}$$

当 $c_2\neq 0$ 时，如果 $t\to+\infty$，那末

$$\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{c_1h_2+c_2(h_2t+g_2)}{c_1h_1+c_2(h_1t+g_1)}\to\frac{h_2}{h_1}$$

即相轨线以半直线式(6.4.12)为公切线，当 $t\to-\infty$ 时，相轨线的渐近方向也是半直线式(6.4.12)的方向。

半直线式(6.4.12)的斜率 k 可由方程(6.4.11)决定。

例 4 设二阶系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-4x-4y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x$$

这时，特征方程

$$\lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2=0$$

有两个相同的根-2，方程(6.4.11)是

$$-4k^2-4k-1=-(2k+1)^2=0$$

所以 $k=-\frac{1}{2}$。

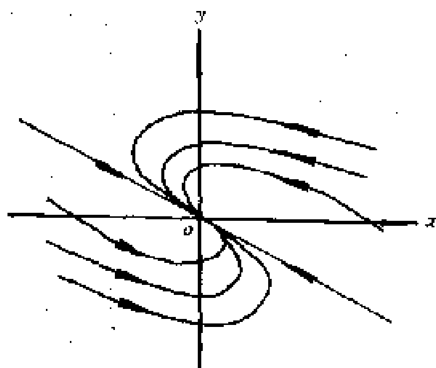


图 6.6

相轨线分布如图 6.6 所示，奇点(0,0)称为稳定的退化结点。

当 $\lambda>0$ 时，(0,0)是不稳定的退化结点。

怎样区分临界结点和退化结点呢？我们知道，在退化结点时，仅有两条趋于(0,0)的半直线是相轨线，而在临界结点时有无穷多条，所以，只要从方程(6.4.11)有几个根来决定就可以了。如果方程(6.4.11)仅有一个根，那末(0,0)是退化结点；如果方程(6.4.11)退化为不定方程，即 $\alpha=\delta,\beta=\gamma=0$，那末(0,0)是临界结点。

3. 当$(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma<0$ 时，A 有两个互为共轭复数的特征值 $\lambda=\mu+i\nu$ 和 $\bar{\lambda}=\mu-i\nu(\nu>0)$。

设 A 相应于特征值 λ 的特征向量为 $h+ik$，这里 $h=\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}$和 $k=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}$是实向量，即

$$Ah+iAk=\mu h-\nu k-i(\nu h+\mu k)$$

从而

$$Ah=\mu h-\nu k,\ Ak=\nu h+\mu k$$

记 $x=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，令 $x=h\bar{x}+k\bar{y}$，即

$$x=h_1\bar{x}+k_1\bar{y},y=h_2\bar{x}+k_2\bar{y} \tag{6.4.13}$$

那末

$$h\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t}+k\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(h\bar{x}+k\bar{y})$$

因此

$$\begin{aligned}h\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t}+k\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}t}&=(\mu h-\nu k)\bar{x}+(\nu h+\mu k)\bar{y}\\&=(\mu\bar{x}+\nu\bar{y})h+(-\nu\bar{x}+\mu\bar{y})k\end{aligned}$$

由于 h 和 k 是线性无关的，所以

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t}=\mu\bar{x}+\nu\bar{y},\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}t}=-\nu\bar{x}+\mu\bar{y} \tag{6.4.14}$$

从而

$$\bar{x}\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t}+\bar{y}\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}t}=\mu(\bar{x}^2+\bar{y}^2)$$

$$\bar{x}\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}t}-\bar{y}\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t}=-\nu(\bar{x}^2+\bar{y}^2)$$

所以

$$\bar{x}^2(t)+\bar{y}^2(t)=c^2\mathrm{e}^{2\mu t} \tag{6.4.15}$$

其中 c 为任意常数。又

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{arctg}\,\frac{\bar{y}(t)}{\bar{x}(t)}=-\nu$$

所以

$$\operatorname{arctg}\frac{\bar{y}(t)}{\bar{x}(t)} = \theta_0 - \nu t \tag{6.4.16}$$

其中 θ_0 为另一常数。

在$(\bar{x},\bar{y})$平面引进极坐标

$$\bar{x} = \bar{r}\cos\theta, \bar{y} = \bar{r}\sin\theta$$

那末由(6.4.15)和(6.4.16)得到

$$\bar{r} = \bar{r}_0 e^{\mu t}, \theta = \theta_0 - \nu t$$

其中 $\bar{r}_0=c$,从而相轨线在$(\bar{x},\bar{y})$平面上的极坐标方程是

$$\bar{r} = \bar{r}_0 \exp\left(-\frac{\mu}{\nu}(\theta - \theta_0)\right)$$

它是环绕坐标原点 $\bar{O}$ 的螺线。

设 $\bar{l}$ 是$(\bar{x},\bar{y})$平面上过原点 $\bar{O}$ 的直线

$$\bar{y} = \bar{m}\,\bar{x}$$

相轨线在 $t=t_0$ 时刻与 $\bar{l}$ 相交于 $\bar{M}_0$,经时间$\frac{\pi}{\nu}$后,幅角 θ 减少角度 π,从而再次与直线 $\bar{l}$ 相交,设交点为 $\bar{M}_1$,这时$\overline{OM_1}$的长等于$\overline{O\,M_0}$的长乘以 $e^{\frac{\mu}{\nu}\pi}$,如果 l、M_0 和 M_1 分别为 $\bar{l}$、$\bar{M}_0$ 和 $\bar{M}_1$ 在线性变换(6.4.13)下的象,那末 OM_0 的长的平方

$$\begin{aligned}
|\overline{OM_0}|^2 &= x^2 + y^2 = (h_1\bar{x} + k_1\bar{y})^2 + (h_2\bar{x} + k_2\bar{y})^2 \\
&= \{(h_1 + \bar{m}k_1)^2 - (h_2 + \bar{m}k_2)^2\}\bar{x}^2 \\
&= \{(h_1 + \bar{m}k_1)^2 + (h_2 + \bar{m}k_2)^2\}\frac{1}{1+\bar{m}^2}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)
\end{aligned}$$

即

$$\overline{OM_0} = p\,\overline{\bar{O}\,\bar{M}_0}$$

其中 $p^2=\{(h_1+\bar{m}k_1)^2-(h_2+\bar{m}k_2)^2\}/(1+\bar{m}^2)$是常数。同样

$$\overline{OM_1} = p\,\overline{\bar{O}\,\bar{M}_1}$$

因此,我们得到

$$\overline{OM_1} = e^{\frac{\mu}{\nu}\pi}\,\overline{OM_0}$$

这里系数 $e^{\frac{\mu}{\nu}\pi}$与点 M_0 的位置无关。所以,相轨线绕原点旋转角度 π 后,它的向径是原来长度的 $e^{\frac{\mu}{\nu}\pi}$倍。于是得到:

(1)如果 $\mu<0$,那末相轨线是环绕原点 O 的螺旋线,且当 $t\to+\infty$时趋于奇点(0,0),称这种奇点为稳定焦点。

(2)如果 $\mu>0$,那末当 $t\to-\infty$时,$(x(t),y(t))\to(0,0)$,奇点(0,0)是不稳定焦点。

(3)如果 $\mu=0$,那末由式(6.4.14)得到 $\bar{x}^2+\bar{y}^2=c_1^2+c_2^2$ 是$(\bar{x},\bar{y})$平面上的圆周,在线性变换(6.4.13)下变为(x,y)平面上的椭圆,即相轨线是以(0,0)为中心的椭圆,奇点称为中心。

它们相轨线的性状如图 6.7、图 6.8、图 6.9 所示。

综上所述,我们得到下面的定理。

定理 1 对于二阶线性系统(6.4.7),假设系数矩阵 A 的特征值为 λ_1 和 λ_2,那末奇点(0,0)的类型由 λ_1 和 λ_2 决定,即

(1)当 $\lambda_1\leqslant\lambda_2<0$ 时,它是稳定的结点;

(2)当 $\lambda_1<0<\lambda_2$ 时，它是鞍点；

(3)当 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2$ 时，它是不稳定结点；

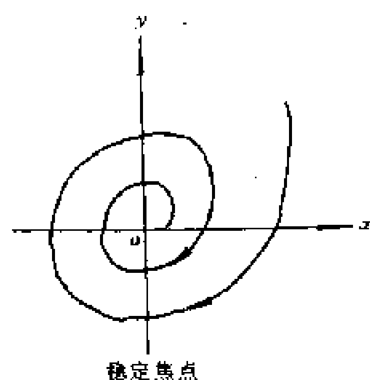


图 6.7

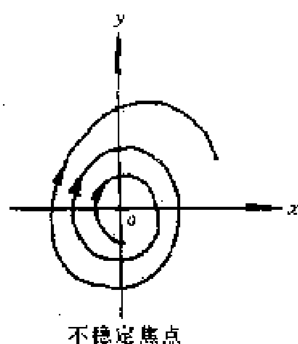


图 6.8

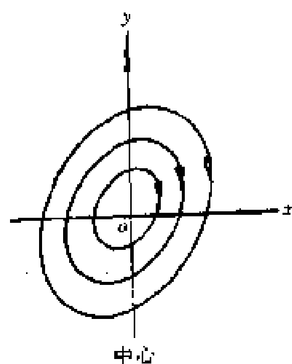


图 6.9

(4)当 $\lambda_1=\bar{\lambda}_2=\mu+i\nu,\mu\neq0,\nu\neq0$ 时，它是焦点；

(5)当 $\lambda_1=\bar{\lambda}_2=i\nu$，它是中心。

三、关于非线性系统的 Perron 定理

对于非线性系统式(6.4.6)，有下述的 Perron 定理：

定理 2 对于非线性系统式(6.4.6)

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\alpha x+\beta y+X(x,y) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\gamma x+\delta y+Y(x,y) \end{cases}$$

假设 $\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$，$A$ 的特征值为 λ_1 和 λ_2，且当 $(x,y)\to(0,0)$ 时

$$X^2(x,y)+Y^2(x,y)=O\{(x^2+y^2)^{1+\varepsilon}\}$$

其中 $\varepsilon>0$ 是常数，那末

(1)当 $\lambda_1\leqslant\lambda_2<0$ 时，(0,0)是式(6.4.6)的稳定结点，即在奇点附近相轨线都趋于奇点，它们在(0,0)有公切线(可能有两条轨线例外)；

(2)当 $\lambda_1<0<\lambda_2$ 时，(0,0)时式(6.4.6)的鞍点，即除两条趋于(0,0)和两条远离(0,0)的相轨线外，其余相轨线都不趋于奇点(0,0)；

(3)当 $\lambda_1=\bar{\lambda}_2=\mu+i\nu,\mu\neq0,\nu\neq0$ 时，(0,0)是式(6.4.6)的焦点，即相轨线是盘旋趋于或远离奇点(0,0)。

这就是说，当 A 的特征值不具有零实部时，方程组(6.4.6)的相轨线性状由它的一次近似决定，该定理的证明比较复杂，因而从略。

例 5 考虑具有阻尼的单摆运动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$$

令 $x=\varphi,y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，它等价于方程组

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=-\frac{g}{l}\sin x-by \end{aligned}\right\} \tag{6.4.17}$$

它是一个非线性系统，我们来考察该系统的相图。

首先，讨论点(0,0)，这时，一次近似方程是

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{g}{l}x-by\end{cases}$$

特征方程是

$$\lambda^2+b\lambda+\frac{g}{l}=0$$

当 $b>0$ 充分小时，它的根是一对共轭复数，$\mathrm{Re}\lambda=-\dfrac{b}{2}<0$，从而(0,0)是稳定焦点。

其次，讨论奇点$(\pi,0)$，置

$$\bar{x}=x-\pi,\bar{y}=y,$$

那末

$$\begin{cases}\dfrac{d\bar{x}}{dt}=\bar{y}\\ \dfrac{d\bar{y}}{dt}=-\dfrac{g}{l}\sin(\bar{x}+\pi)-b\bar{y}=\dfrac{g}{l}\sin\bar{x}-b\bar{y}\end{cases}$$

它的一次近似方程是

$$\begin{cases}\dfrac{d\bar{x}}{dt}=\bar{y}\\ \dfrac{d\bar{y}}{dt}=\dfrac{g}{l}\bar{x}-b\bar{y}\end{cases}$$

特征方程是

$$\lambda^2+b\lambda-\frac{g}{l}=0$$

具有两个异号的实根，所以奇点是鞍点。而鞍点附近有两条相轨线负向趋于鞍点，我们称它们为鞍点的分界线，分界线在鞍点处的切线斜率 k 由下式决定：

$$k=\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{\bar{y}}(t)}{\dot{\bar{x}}(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\dfrac{g}{l}\sin\bar{x}(t)-b\bar{y}(t)}{\bar{y}(t)}=\frac{\dfrac{g}{l}-bk}{k},$$

即 k 满足方程

$$k^2+bk-\frac{g}{l}=0$$

它具有两个异号的实根，因此，$(\pi,0)$是系统(6.4.17)的鞍点，它的分界线的切线斜率 k 适合上式。

同样，$(-\pi,0)$也是式(6.4.17)的鞍点，分界线的切线斜率 k 也适合上式，而(0,0)、$(2\pi,0)$、$(-2\pi,0)$是稳定焦点，一般地，$(2j\pi,0)$是稳定焦点，$((2j+1)\pi,0)$是鞍点，其中 $j=0,\pm1,\pm2,\cdots$。从而系统式(6.4.17)的相图如图 6.10。

从上面的相图看出，如果单摆的初始动能和势能都较小，即初始速度和摆角较小，那末单摆只能在平衡位置附近来回摆动，并且由于阻尼的作用而最后趋于静止；如果单摆的初始能量适当，它将趋于新的平衡位置 π，且需要无限的时间；如果初始能量再大，它将绕过平衡位置 π，而走向平衡位置 2π，且在 2π 附近摆动(相应于单摆绕一周而在平衡位置附近摆动)；如果初始

能量更大，它将绕过π、2π，以至趋于3π，或绕过3π而在4π附近摆动等等。总之，由相图可以看出单摆运动的种种可能的情形。

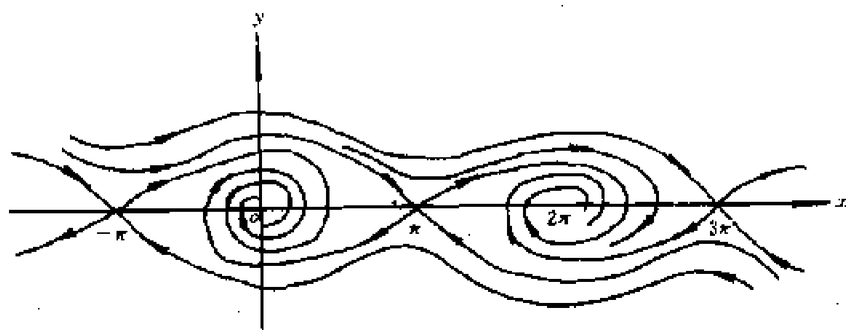


图 6.10

§6.5 极 限 环

这一节进一步讨论二阶非线性自治系统

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=f(x,y)\\\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=g(x,y)\end{aligned}\right\}\tag{6.5.1}$$

的相轨线的分布状况，主要是讨论系统有周期解时的几何图象。设$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$是自治系统式(6.5.1)的周期解，即存在的常数T使得

$$\varphi(t+T)=\varphi(t),\psi(t+T)=\psi(t)$$

那末该周期解的相图是相平面上的一条闭曲线，称为系统式(6.5.1)的闭轨线。在线性系统中，奇点是中心时，它附近的每一轨线是闭轨线，其余情形系统没有闭轨线。在二阶非线性自治系统中，有一类重要的由孤立闭轨线表述的运动，不仅对微分方程理论本身，而且在工程技术应用上也起着重要的作用，这类孤立的闭轨线称为极限环。在无线电技术中，广泛使用的三极管振荡回路，是极限环理论的重要应用，这是不能用线性化来表征的物理现象，我们在下面将说明这一点。

一、简单例题

我们从考察以下的例子开始

例1 考察系统

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=y+x(1-x^2-y^2)\\\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=-x+y(1-x^2-y^2)\end{aligned}\right\}\tag{6.5.2}$$

引用极坐标$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，即$r^2=x^2+y^2$，$\theta=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}$，那末方程组化为

$$\left.\begin{aligned}r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}&=x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=r^2(1-r^2)\\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}&=-\frac{x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{x^2+y^2}=-1\end{aligned}\right\}\tag{6.5.3}$$

由式(6.5.3)，得
$$\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}\theta}=-2r^2(1-r^2)$$
即
$$r=0,r=1$$
以及
$$r=\frac{1}{\sqrt{1+ce^{2\theta}}}$$

当 $c=0$ 时，它是 $r=1$，即单位圆周 Γ
$$x^2+y^2=1$$

当 $c>0$ 时，它是位于单位圆周 Γ 内的螺旋线，当 $\theta\to+\infty$ 时，它趋于奇点(0,0)；当 $\theta\to-\infty$ 时，它盘旋逼近于单位圆周 Γ，如图 6.11 所示。

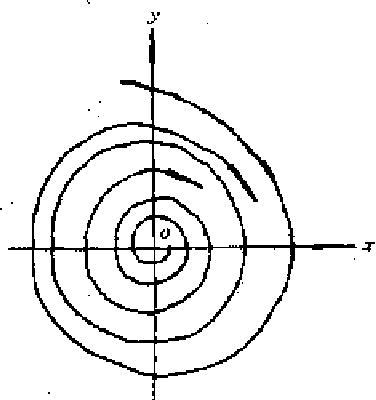


图 6.11

当 $c<0$ 时，它位于单位圆周 Γ 的外部；当 $\theta\to-\infty$ 时，它盘旋逼近于单位圆周 Γ；当 $\theta\to\frac{1}{2}\ln(-c)$ 时，$r\to+\infty$。

该例题表明，单位圆周 $\Gamma:x^2+y^2=1$ 是一条闭轨线，而在它的充分小的邻域中，系统的其余轨线都盘旋趋于它，于是奇点(0,0)是它的不稳定焦点，而 Γ 是系统的极限环。

例 2 考察二阶系统

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}&=-y+x(x^2+y^2)\sin\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=x+y(x^2+y^2)\sin\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}\right\}\tag{6.5.4}$$

规定右端函数当 $x=y=0$ 时取值 0。

引用极坐标，该方程组(6.5.4)化为
$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=r^3\sin\frac{\pi}{r},\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=1$$

所以，每个圆周
$$\Gamma_n:r=\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots)$$

都是方程组的闭轨线；并且

当 $1<r$ 时， $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}>0$

当 $\frac{1}{2m}<r<\frac{1}{2m-1},m=1,2,\cdots$ 时， $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}<0$

当 $\frac{1}{2m+1}<r<\frac{1}{2m},m=1,2,\cdots$ 时， $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}>0$

因此，位于两条闭轨线 Γ_n 和 Γ_{n+1} 之间的每条轨线是(正向或负向)盘旋逼近于 Γ_n 或 Γ_{n+1} 的。这样，系统有无穷多条孤立的闭轨线，都对应于方程组(6.5.4)的周期解。

在奇点(0,0)的每一邻域中含有无限多条闭曲线，我们也称具有这种性质的奇点为"中心焦点"。

以上两个例子只是解释二阶非线性自治系统可能出现闭轨线的情况。下面，我们分析无线

电电子学中的一个问题，即三极管振荡回路。

二、电子管振荡器的工作原理

电子管振荡器是由电子管(或晶体管)、电容、自感线圈、电阻、互感线圈及直流电源组成的振荡器。它具有不衰减的振荡周期，是无线电技术中最简单的振荡器，有着广泛的技术应用。它的工作原理正是二阶非线性自治系统的极限环理论的重要应用。这里解释它的工作原理。

三极管是一种电子管，它具有三个极——板极 a、栅极 s 和阴极 k。在栅极和阴极之间有电势差 U_s，称为栅压，但没有电流，而从板极到阴极之间有电流 i_a，它受栅压 U_s 控制，即

$$i_a = f(U_s)$$

其中，f 是三极管的特性函数，它是单调增加的函数，当 $U_s \to -\infty$ 时，它趋于 0，$U_s \to +\infty$ 时它趋于有限值 I_M。

电子管振荡器的振荡回路如图 6.12 所示。因此

$$i_a = i + i_c$$

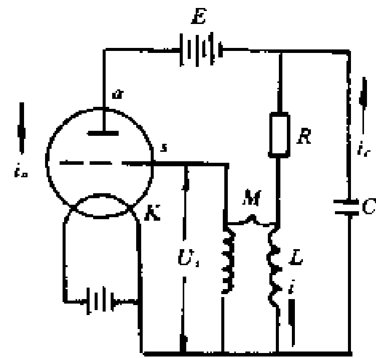


图 6.12

在 LRC 回路中应用 Kirchhoff 定律，得

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + \frac{1}{C}\int(i - i_a)\mathrm{d}t = 0$$

两边对 t 求导得

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i = \frac{1}{C}i_a = \frac{1}{C}f(U_s)$$

根据互感 M 得

$$U_s = M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

所以 i 适合方程

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i = \frac{1}{C}f\left(M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right) \tag{6.5.5}$$

这就是描述电子管振荡器工作的非线性微分方程。令

$$x = i - f(0)$$

$$y = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

那末式(6.5.5)可化为二阶非线性自治方程组

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y, \\ &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{LC}x - \frac{R}{L}y + \frac{1}{LC}\{f(My) - f(0)\} \end{aligned}\right\} \tag{6.5.6}$$

若引进记号

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}, 2\delta = \frac{R}{L}, g(y) = \omega^2\{f(My) - f(0)\}$$

那末方程组(6.5.6)化为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y \\ &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 x - 2\delta y + g(y) \end{aligned}\right\} \tag{6.5.7}$$

由于 f 是单调增加的，所以 g 也是 y 的单调增加函数，并且 $g(0)=0$，因此，$(0,0)$ 是方程组(6.5.7)的唯一奇点。

特别简单的情形是函数 $f(U_s)$ 呈如下形状(图 6.13)：

$$f(U_s)=\begin{cases} I_M, & \text{当 } U_s>0 \text{ 时} \\ \frac{1}{2}I_M, & \text{当 } U_s=0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } U_s<0 \text{ 时} \end{cases}$$

这时

$$g(y)=\begin{cases} \omega^2 b, & \text{当 } y>0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } y=0 \text{ 时} \\ -\omega^2 b, & \text{当 } y<0 \text{ 时} \end{cases}$$

图 6.13

其中，$b=I_M/2$。

因此，当 $y>0$ 时，式(6.5.7)呈形状

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega^2(x-b)-2\delta y \end{aligned}\right\} \tag{6.5.8}$$

当 $y<0$ 时，式(6.5.7)呈形状

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega^2(x+b)-2\delta y \end{aligned}\right\} \tag{6.5.9}$$

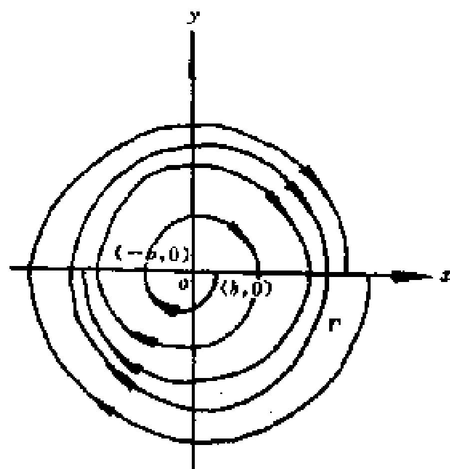


图 6.14

如果在整个相平面上讨论式(6.5.8)，那末 $(b,0)$ 是式(6.5.8)的稳定焦点。当 $\delta^2\leqslant\omega^2$ 时，系数阵的特征值是一对具有负实部的共轭复数，从而奇点是稳定焦点。同样，$(-b,0)$ 是式(6.5.9)的稳定焦点(图 6.14)。

为完整地讨论式(6.5.7)的相轨线，应当把式(6.5.8)和式(6.5.9)的相轨线在 $y=0$ 处连接起来。

当 $y=0, x=\xi$ 时，因为 $g(0)=0$，所以相轨线的切向量应当是 $(0,-\omega^2\xi)$。当 $\xi>0$ 时，它指向半平面 $y<0$；当 $\xi<0$ 时，它指向半平面 $y>0$。因此，当 $\xi>0$ 时，相轨线按(6.5.9)在半平面 $y<0$ 上以顺时针方向绕 $(-b,0)$ 旋转，直到与 x 轴相交于点 $(-\eta,0)$，$\eta>b$。并且，由于 $(-b,0)$ 是稳定焦点，所以点 $(-\eta,0)$ 与奇点 $(-b,0)$ 的距离 $\eta-b$ 是点 $(\xi,0)$ 与 $(-b,0)$ 的距离 $\xi+b$ 的 k 倍，而 $k<1$，所以

$$\eta = b + k(\xi+b) \tag{6.5.10}$$

当相轨线到达点 $(-\eta,0)$ 时，它是指向半平面 $y>0$。所以，相轨线接着按式(6.5.8)在半平面 $y>0$ 上以顺时针方向绕 $(b,0)$ 旋转，直到与 x 轴相交于点 $(\xi_1,0)$。由于式(6.5.8)的系数矩阵和式(6.5.9)的完全一样，所以 $(\xi_1,0)$ 与奇点 $(b,0)$ 的距离 ξ_1-b 也是 $(-\eta,0)$ 与 $(b,0)$ 的距离 $\eta+b$ 的 k 倍。因此

$$\xi_1 = b + k(\eta + b) = b + k(2b + k(\xi + b))$$
$$= b + 2kb + k^2b + k^2\xi$$

因此点$(\xi,0)$沿系统(6.5.7)的相轨线绕(0,0)顺时针旋转角度2π后到达点$(\xi_1,0)$，当$\xi_1=\xi$时得到(6.5.7)的一条闭轨线，即当

$$\xi = \xi_1(=\xi_0) = \frac{(1+2k-k^2)b}{1-k^2} = \frac{1+k}{1-k}b$$

时，$\xi_1=\xi=\xi_0$，所以$(\xi_0,0)$出发的相轨线是闭轨线Γ。

当$\xi\neq\xi_0$时，相轨线绕(0,0)顺时针旋转角度2π后到达点$(\xi_1,0)$，而

$$\xi_1 = (1-k^2)\xi_0 + k^2\xi$$

所以

$$\xi_1 - \xi_0 = k^2(\xi - \xi_0)$$

显然，如果$\xi>\xi_0$，那末$\xi_1>\xi_0$，并且$\xi_1-\xi_0<\xi-\xi_0$（由于$0<k<1$），即相轨线盘旋逼近于闭轨线Γ；如果$\xi<\xi_0$，那末$\xi_1<\xi_0$且$\xi_0-\xi_1=k^2(\xi_0-\xi)$，相轨线也盘旋逼近于闭轨线$\Gamma$。

这说明闭轨线Γ是系统式(6.5.7)的极限环，并且系统式(6.5.7)的其余的相轨线都趋于它。我们称Γ是稳定的极限环。它表明系统式(6.5.7)当$g(y)$满足式(6.5.8)时有一个周期解，而其余的解的相轨线都趋于闭轨线，即电子管振荡器具有不衰减的周期振荡。这是非线性系统才具有的特性，它不能用线性化来解释。

三、闭轨线存在与否的判别法

极限环是二阶非线性自治系统的一类重要的轨线，判断一个系统是否存在极限环是一个十分重要和困难的问题。

定理 1(Bendixson 否定判据)　设f,g在单连通区域D内连续可微，并且$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}\neq 0$，那末系统(6.5.1)在$D$内不存在闭轨线。

证　我们利用 Green 公式用反证法来证明定理。

如果系统式(6.5.1)存在周期为T的周期解$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，它的相图是闭轨线Γ，Γ所围的区域记为G。那末由 Green 公式

$$\int_\Gamma (g\mathrm{d}x - f\mathrm{d}y) = -\iint_G \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

如果$\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial y}>0$，那末上式右端是负的，而

$$\int_\Gamma g\mathrm{d}x - f\mathrm{d}y = \int_0^T \left(g\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - f\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^T (gf - fg)\mathrm{d}t = 0$$

得到矛盾，所以式(6.5.1)无闭轨线位在D内。

例 3　考察具有阻尼的单摆运动

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

令$x=\varphi$，$y=\dot\varphi$，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{g}{l}\sin x - by$$

所以

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}=-b<0$$

根据定理 1 该方程组不存在周期解。

判断闭轨线的存在性，有下面环域定理。

定理 2 如果在式(6.5.1)的定义区域 D 内存在一个环域 G，G 内不含有式(6.5.1)的奇点，并且在 G 的边界处相轨线的切线都指向 G 内(或都指向 G 外)，那末在环域 G 中至少存在式(6.5.1)的一条闭轨线。

证明参看 § 8.3 定理 4。

关于二阶非线性自治系统的极限环个数和位置的讨论，是一个没有完全解决的问题。特别，当 f，g 是二次多项式时，称系统式(6.5.1)是二次微分系统，我国学者已经证明存在二次微分系统具有四个极限环。

联系非线性振动时讨论方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+g(x)=0$$

是否存在周期解的问题，是一个重要的问题，并且已有许多精细的结果。

§ 6.6 解的稳定性的定义

我们已经讨论了二阶自治系统的奇点和极限环，并曾讨论奇点的稳定性。现在，我们给出一阶常微分方程组的解的稳定性的定义，并且讨论解的稳定性的基本方法。

设一阶常微分方程组是

$$\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}=f_k(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)\qquad(k=1,2,\cdots,n)\tag{6.6.1}$$

其中，$f_k(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)(k=1,2,,\cdots,n)$在变量 t 的区间 $0\leqslant t<+\infty$中和变量$(x_1,\cdots,x_n)$空间的某区域 G 内是$(t,x_1,\cdots,x_n)$的连续函数。为方便起见，我们常把(6.6.1)写成向量形式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x)\tag{6.6.2}$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$f=(f_1(t_1,x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_n(t,x_1,\cdots,x_n))^{\mathrm{T}}$。如果当 $x=a$ 时

$$f(t,a)=0\qquad(0\leqslant t<+\infty)$$

即 $f_k(t,a_1,a_2,\cdots,a_n)\equiv 0\ (0\leqslant t<+\infty,k=1,2,\cdots,n)$，那末 $x=a$ 是方程组(6.6.2)的解，我们称 $x=a$ 是方程组(6.6.1)的平衡位置。当 f 与变量 t 无关，即 $f(t,x)=f(0,x)$时，称系统(6.6.2)是自治系统，自治系统的平衡位置 $x=a$ 也称为奇点。

在 § 6.4 讨论奇点附近相轨线性状时，曾指出：把奇点视为坐标原点是不会妨碍讨论的一般性。对于方程组(6.6.2)，假设 a 是它的平衡位置，作变量的平移

$$\bar{x}=x-a$$

那末方程组(6.6.2)变为

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t}=f(t,\bar{x}+a)\tag{6.6.3}$$

而 $\bar{x}=0$ 是方程组(6.6.3)的平衡位置，所以，假设方程组(6.6.2)的平衡位置 $x=0$ 不会妨碍讨论的一般性。

今后我们以 $x=\varphi(t;t_0,x_0)$ 表示方程组(6.6.2)的以 (t_0,x_0) 为初值的解，即设

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(t;t_0,x_0)}{\mathrm{d}t}=f(t;\varphi(t;t_0,x_0))$$

$$\varphi(t_0;t_0,x_0)=x_0$$

关于方程组(6.6.2)的平衡位置 $x=0$ 的稳定性，我们引用俄国数学家 A. M. Liapunov 的定义。

定义 1 如果对于 $t_0\geqslant 0$ 和任意给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\|x_0\|<\delta$ 时，方程组(6.6.2)的 $x=\varphi(t;t_0,x_0)$ 在区间 $t_0\leqslant t<+\infty$ 中存在，并且在区间 $t_0\leqslant t<+\infty$ 中成立不等式

$$\|\varphi(t;t_0,x_0)\|<\varepsilon \tag{6.6.4}$$

那末称方程组(6.6.2)的平衡位置 $x=0$ 是稳定的。

该定义表明，如果 $x=0$ 是稳定的，那末当初值 x_0 趋于 0 时，$\varphi(t;t_0,x_0)$ 在区间 $t_0\leqslant t<+\infty$ 中一致地趋于 0。

定义 2 如果存在正数 ε_0 和 t_0，对于任意 $\delta>0$，存在初值 x_0 和时刻 $t_1>t_0$，使得以 (t_0,x_0) 为初值的解 $x=\varphi(t;t_0,x_0)$ 满足

$$\|\varphi(t_0;t_0,x_0)\|=\|x_0\|<\delta$$

$$\|\varphi(t_1;t_0,x_0\|\geqslant\varepsilon_0$$

即不满足稳定性的定义，那末称 $x=0$ 是不稳定的。

定义 3 如果方程组(6.6.2)的平衡位置 $x=0$ 是稳定的，并且存在正数 $\sigma>0$，使得当 $\|x_0\|<\sigma$ 时方程组(6.6.2)以 (t_0,x_0) 为初值的解 $x=\varphi(t;t_0,x_0)$ 在区间 $t_0\leqslant t<+\infty$ 中存在，并且成立着

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi(t;t_0,x_0)=0 \tag{6.6.5}$$

那末称 $x=0$ 是渐近稳定的。

由上述定义看出，$x=0$ 的稳定性是指

$$\lim_{x_0\to 0}\varphi(t;t_0,x_0)=0 \tag{6.6.6}$$

在 $t_0\leqslant t<+\infty$ 中一致地成立。显然，我们不能由式(6.6.5)的成立推知式(6.6.6)成立，所以在渐近稳定性定义中必须是式(6.6.5)、(6.6.6)同时成立。

必须指出，在稳定性的讨论中，区间 $t_0\leqslant t<+\infty$ 是无界的。如果在有界闭区间 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+T$ 上讨论，由于 $x=0$ 是方程组(6.6.2)的解，f 满足解对初值的连续性定理的条件，那末存在 $\delta(t_0,T)>0$，使得当 $\|x_0\|<\delta$ 时 $x=\varphi(t;t_0,x_0)$ 在 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+T$ 上存在，并且

$$\lim_{x_0\to 0}\varphi(t;t_0,x_0)=0$$

在 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+T$ 一致地成立，所以当区间有界时，问题较为简单。因此，解的稳定性与解对初值的连续性是有本质区别的。

例 1 讨论方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x\end{cases}$$

的平衡位置的稳定性。

所给方程组仅有一个平衡位置 $x=y=0$。以 (t_0,x_0,y_0) 为初值的解是

$$x=x_0\cos(t-t_0)+y_0\sin(t-t_0)$$

$$y=-x_0\sin(t-t_0)+y_0\cos(t-t_0)$$

所以
$$x^2+y^2=x_0^2+y_0^2.$$

因此，对于 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，那末当 $x_0^2+y_0^2<\delta^2$ 时，

$$x^2(t)+y^2(t)<\varepsilon^2$$

所以 $x=y=0$ 是稳定的，但

$$\lim_{t\to+\infty}\{x^2(t)+y^2(t)\}=x_0^2+y_0^2\neq 0$$

所以平衡平置不是渐近稳定的。

例 2 讨论方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-1\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-y\end{cases}$$

的平衡位置的稳定性。

它的唯一的平衡位置是 $x=1,y=0$。作变换

$$\bar{x}=x-1,\bar{y}=y$$

则得

$$\begin{cases}\dfrac{d\bar{x}}{dt}=\bar{x}\\[2mm]\dfrac{d\bar{y}}{dt}=-\bar{y}\end{cases}$$

以 $(t_0,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ 为初值解是

$$\bar{x}=\bar{x}_0e^{(t-t_0)},\bar{y}=\bar{y}_0e^{-(t-t_0)}$$

它在 $-\infty<t<+\infty$ 内存在，但是对于 $\varepsilon_0=1$ 和 $\bar{x}_0\neq0,\bar{y}_0=0$，存在

$$t_1=t_0+\ln\frac{2}{|\bar{x}_0|}$$

使得
$$|\bar{x}(t_1)|=|\bar{x}_0|e^{t_1-t_0}=2>1$$

所以 $\bar{x}=\bar{y}=0$ 是不稳定的，从而 $x=1,y=0$ 是原方程组的不稳定平衡位置。

例 3 讨论无阻尼单摆的运动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$$

的零解 $\varphi=0$ 的稳定性。

引进相坐标

$$x=\varphi,y=\frac{d\varphi}{dt}$$

它就化为一阶方程组

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=y,\\\frac{dy}{dt}&=-\frac{g}{l}\sin x\end{aligned}\right\}\qquad(6.6.7)$$

这时 $x=y=0$ 是它的平衡位置，为讨论它的平衡位置的稳定性，寻求它的首次积分，由方程组得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{g}{ly}\sin x$$

即

$$2y\mathrm{d}y=-\frac{2g}{l}\sin x\mathrm{d}x$$

所以

$$y^2-y_0^2=\frac{2g}{l}(\cos x-\cos x_0)$$

$$=\frac{4g}{l}\left(\sin^2\frac{x_0}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)$$

即得

$$y^2+\frac{4g}{l}\sin^2\frac{x}{2}=y_0^2+\frac{4g}{l}\sin^2\frac{x_0}{2} \tag{6.6.8}$$

这是相轨线的方程，当 x_0, y_0 充分小时它是环绕(0,0)的闭曲线。

由于我们在 $\varphi=0$ 附近时讨论单摆的运动，可取 $|x|\leqslant\pi$，从而

$$\frac{2}{\pi}\left|\frac{x}{2}\right|\leqslant\left|\sin\frac{x}{2}\right|\leqslant\frac{|x|}{2}$$

把它应用到式(6.6.8)得

$$y^2(t)+\frac{4g}{l\pi^2}x^2(t)\leqslant y_0^2+\frac{g}{l}x_0^2$$

从而

$$x^2(t)+y^2(t)\leqslant\frac{1+\frac{g}{l}}{\min\left(1,\frac{4g}{l\pi^2}\right)}(x_0^2+y_0^2)$$

所以式(6.6.7)的平衡位置 $x=y=0$ 是稳定的，由式(6.6.8)知它不是渐近稳定的。

例 4 讨论常系数线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax \tag{6.6.9}$$

的平衡位置 $x=0$ 的稳定性。

在讨论常系数线性微分方程组时，可根据方阵 A 的特征值的情形，对方程组(6.6.9)的解进行估计，得到的估计式是讨论(6.6.9)的平衡位置 $x=0$ 稳定性的基础。

1. 如果方阵 A 的特征值都具有负的实部，那末存在 $r>0$，使得方程组(6.6.9)的每一解 $x(t)$ 满足不等式

$$\|x(t)\|\leqslant M\|x_0\|e^{-rt}\qquad(0\leqslant t<+\infty) \tag{6.6.10}$$

由此，对于 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon/M$，那末当 $0\leqslant t<+\infty$，$\|x_0\|<\delta$ 时，$\|x(t)\|<M\delta=\varepsilon$。所以 $x=0$ 是稳定的，并且由式(6.6.10)得

$$\lim_{t\to+\infty}\|x(t)\|=0$$

于是，当 A 的特征值都有负实部时，(6.6.9)的平衡位置 $x=0$ 是渐近稳定的。

2. 如果方阵 A 有一个特征值 λ_0，其实部为正，那末方程组(6.6.9)存在形状如下的解

$$x=che^{\lambda_0 t} \tag{6.6.11}$$

式中，h 是 A 相应于 λ_0 的特征向量，c 为任意常数，并且

$$x(0)=ch$$

因此，若取 $x_0=ch$，当 c 充分小时，$\|x_0\|$ 充分小，但是解(6.6.11)是无界的，所以 $x=0$ 是不稳定的。

3. 如果方阵 A 的特征值的实部都不是正的，并且实部等于 0 的特征值所对应的循环向量系数多项式都是零次的，那末存在 $M>0$，使得当 $0\leqslant t<+\infty$ 时

$$\|x(t)\| \leqslant M\|x(0)\|$$

所以方程组(6.6.9)的平衡位置 $x=0$ 是稳定的，但不是渐近稳定的。

4. 如果方阵 A 具有实部为 0 的特征值 λ_0，其相应的循环向量系数多项式 $p(t)$ 的次数大于 0，那末 $x=0$ 是不稳定的。这是因为(6.6.9)具有解

$$x = cp(t)e^{\lambda_0 t}$$

从而

$$\|x(t)\| = \|cp(t)\|$$

由此得到结论。

因此，方程组(6.6.9)的平衡位置 $x=0$ 是渐近稳定的充要条件为方阵 A 的特征值的实部都是负的。

现在讨论方程组(6.6.2)的解 $x=\psi(t)$ 的稳定性问题。设 $x=\psi(t)$ 在 $0\leqslant t<+\infty$ 中是微分方程组(6.6.2)的解，即

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = f(t,\psi(t)) \qquad (0\leqslant t<+\infty)$$

引进变换

$$\bar{x} = x - \psi(t)$$

那末得到方程组

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = f(t,\bar{x}+\psi(t)) - f(t,\psi(t)) = g(t,\bar{x}) \tag{6.6.12}$$

并且 $\bar{x}=0$ 是方程组(6.6.12)的平衡位置，如果(6.6.12)的平衡位置 $\bar{x}=0$ 是稳定的，那末称方程组(6.6.2)的解 $x=\psi(t)$ 是稳定的；如果 $\bar{x}=0$ 是不稳定的，就称 $x=\psi(t)$ 是不稳定的；如果 $\bar{x}=0$ 是渐近稳定的，就称 $x=\psi(t)$ 是渐近稳定的。换句话说，如果对于 $t_0\geqslant 0$ 和正数 ε，存在正数 δ，使得当 $\|x_0-\psi(t_0)\|<\delta$ 时，$\varphi(t;t_0,x_0)$ 在 $t_0\leqslant t<+\infty$ 中存在，并且成立着不等式

$$\|\varphi(t;t_0,x_0) - \psi(t)\| < \varepsilon \qquad (t_0\leqslant t<+\infty)$$

那末就说解 $x=\psi(t)$ 是稳定的，也可以用同样的方法写出关于 $x=\psi(t)$ 渐近稳定性的分析定义。

例 5 讨论微分方程

$$RC\frac{dx}{dt} + x = E\cos\omega t$$

的周期解的稳定性，式中 R、C、E 和 ω 是常数。它的周期解是

$$x = A\cos(\omega t+\beta)$$

式中

$$A = \frac{E}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}$$

$$\beta = -\operatorname{arctg}(RC\omega)$$

若置 $\bar{x}=x-A\cos(\omega t+\beta)$，那末

$$RC\frac{d\bar{x}}{dt} + \bar{x} = 0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{RC}\bar{x}$$

因此 $\bar{x}=0$ 是渐近稳定的，即系统的周期解

$$x=A\cos(\omega t+\beta)$$

是渐近稳定的。

§6.7 Liapunov 的直接方法

在讨论微分方程的解的稳定性时，Liapunov 直接方法占重要的地位。这个方法的特点是：不去求方程组的解的表达式，而是作出 Liapunov 函数（V 函数），利用方程本身来讨论解的稳定性。它对于那些难于求出解的表达式的非线性方程不论在理论上还是在应用上都是有效的。为了简单起见，我们只就自治方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x) \tag{6.7.1}$$

的平衡位置 $x=0$ 的稳定性问题讲述这一方法。假设方程组(6.7.1)的右端 $f(x)$ 的分量 $f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_n(x_1,\cdots,x_n)$ 在空间 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的某一含有坐标原点的区域 G 中是连续的，并且有连续的一阶偏导数，$f(0)=0$。

一、预备知识

假设函数 $V(x)=V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在原点 0 的某一邻域中是连续可微的，并且 $V(0)=0$。

如果存在一个正数 h，使得当 $\|x\|\leqslant h$ 时成立着不等式

$$V(x)\geqslant 0 \text{ 或 } \leqslant 0$$

就称 $V(x)$ 是常正的函数（或常负的函数），常正和常负的函数统为常号函数。

如果当 $0<\|x\|\leqslant h$ 时成立着

$$V(x)>0 \text{ 或 } <0$$

就称 $V(x)$ 是定正（或定负）函数，定正和定负函数统称为定号函数。

如果 $V(x)$ 在原点 0 的任一邻域中既可取到正值也可取到负值，就称 $V(x)$ 是变号函数。

下面的例子对于了解上述定义是有益的。

(1) $V(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 是定正的；

(2) $V(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_3^4$ 是定正的；

(3) $V(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$，当 $a>0,b^2-ac<0$ 时是定正的；当 $a<0,b^2-ac<0$ 时是定负的；当 $b^2-ac>0$ 时是变号的；

(4) $V(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ 是定正的；

(5) $V(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2$ 是常正，但不是定正的。

对于二次型

$$V(x)=\sum_{k,l=1}^{n}c_{kl}x_kx_l \qquad (c_{kl}=c_{lk})$$

代数学已证明，如果系数矩阵 $C=(c_{kl})_{n\times n}$ 的主子式都是正的，

$$c_{11}>0,\begin{vmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{vmatrix}>0,\cdots,\begin{vmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{vmatrix}>0$$

那末 $V(x)$ 是定正的。

如果 $V(x)$ 不是二次型，我们怎样判断它的定号性呢？

引理 1 设

$$V(x)=U(x)+W(x)$$

而 $U(x)$ 是定正的二次型，在原点 0 的邻域 $\|x\|\leqslant h$ 中成立着

$$|W(x)|\leqslant A\|x\|^{2+\delta} \tag{6.7.2}$$

式中 A 和 δ 是正的常数，那末 $V(x)$ 是定正的。

证明 因为 $U(x)$ 是定正的二次型，所以它在单位球面

$$\|x\|=1$$

上有正的最小值 m，从而

$$U(x)=U\left(\|x\|\frac{x}{\|x\|}\right)=\|x\|^2U\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\geqslant m\|x\|^2$$

由此，当 $\|x\|\leqslant h$ 时，

$$V(x)\geqslant m\|x\|^2-A\|x\|^{2+\delta}=m\|x\|^2\left(1-\frac{A}{m}\|x\|^\delta\right)$$

若置 $h_1=\left(\frac{m}{2A}\right)^{\frac{1}{\delta}}$，那末当 $\|x\|\leqslant\min(h,h_1)$ 时

$$V(x)\geqslant\frac{m}{2}\|x\|^2$$

所以，$V(x)$ 是定正函数。

同样可证，如果 $U(x)$ 的变号的二次函数，那末当 W 适合式(6.7.2)时，$V(x)=U(x)+W(x)$ 是变号函数，请读者自行证明。

但是，如果 $U(x)$ 是常号的二次型，我们不能由式(6.7.2)推知 $V=U+W$ 的常号性，例如

$$U(x,y)=(x+y)^2\geqslant 0$$

但
$$V(x,y)=(x^2+y)^2-x^3$$

和
$$V_1(x,y)=(x+y)^2+y^4$$

分别是变号函数和定正函数。

引理 2 如果函数 $V(x)$ 在球 $\|x\|\leqslant h$ 上是连续的，$V(0)=0$，那末对任意正数 $l>0$，存在 $\alpha>0$，使得当 $V(x)\geqslant l$ 时成立着 $\|x\|\geqslant\alpha$。

证明 因为 $V(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$V(0)=0$，所以对于 $l>0$，存在 $\alpha>0$，使得当 $\|x\|<\alpha$ 时 $|V(x)|<l$。因此，如果成立着 $V(x)\geqslant l$ 必导致 $\|x\|\geqslant\alpha$。

引理 3 如果函数 $V(x)$ 在球 $\|x\|\leqslant h$ 上是定正的，那末对于任一正数 $\alpha<h$，函数 $V(x)$ 在有界闭区域 $\alpha\leqslant\|x\|\leqslant h$ 上的最小值 m 大于 0。

下面讨论定正函数的几何意义(设 $n=2$)。

设当 $0<x^2+y^2\leqslant h$ 时，$V(x,y)>0$，那末当 $c>0$ 充分小时，

$$V(x,y)=c$$

所确定的曲线有一支是环绕坐标原点 O 的闭曲线，并且当 $c\to 0$ 时，这一族闭曲线收缩到坐标

原点 O。

事实上，设 $V(x,y)$ 在圆周 $x^2+y^2=h^2$ 上的最小值为 m，那末 $m>0$；如果 $0<c<m$，设 p 是圆周 $x^2+y^2=h^2$ 上的任一点，L 是任一连结 O、p 两点的连续曲线。由于 V 在坐标原点取值为 0，在 p 点的值大于等于 m，所以在 L 上必有点使 $V(x,y)=c$，这样 $V(x,y)=c$ 的确定的曲线必有一支是环绕坐标原点的闭曲线，又根据引理 2，曲线 $V(x,y)=c$ 必收缩于坐标原点，如图 5.15 所示。

再看变号函数的几何意义。

设 $V(x,y)$ 是变号函数，那末 $V(x,y)=0$ 确定的曲线是含有坐标原点 O 的，并且可能由几个分支组成。例如 $V(x,y)=x^2-y^2$，那末 $V(x,y)=0$ 是过原点 O 的两条直线，而 $V(x,y)=c$，即 $x^2-y^2=c$ 是以上述两条直线为渐近线的双曲线。对于一般的变号函数 $V(x,y)$，在原点 O 的邻域中，必有使 $V(x,y)>0$ 的区域，也有使 $V(x,y)<0$ 的区域，而 $V(x,y)=0$ 的曲线是它们的边界，如图 6.16 所示。

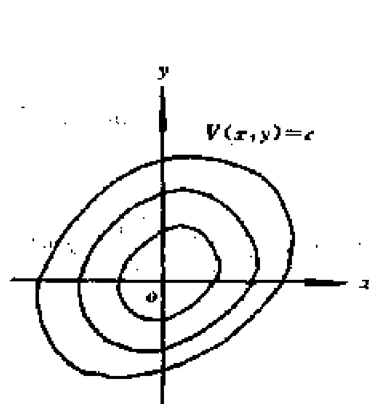


图 6.15

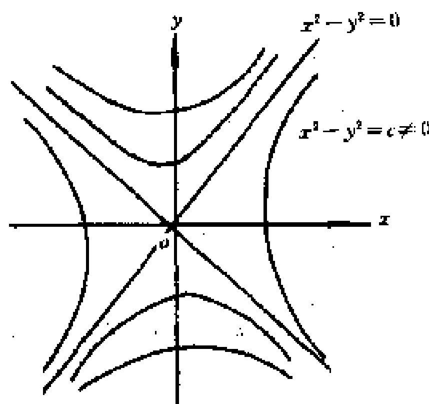


图 6.16

二、Liapunov 直接方法的基本定理

对于方程组(6.7.1)，在考察函数 $V(x)$ 的同时，还考察函数

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_k}f_k(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{6.7.3}$$

它在坐标原点的某一邻域中是连续的，并且当 $x=0$ 时它的值是 0，因此也可以讨论它的定号性、常号性或变号性。由于它是由 V 联系到方程组(6.7.1)得到的，并且具有下面的性质，所以我们记它为 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$。

设 $x=\varphi(t;0,x_0)$ 表示方程组(6.7.1)以 $(0,x_0)$ 为初值的解，即 $\varphi(0,x_0)=x_0$，那末当 x_0 固定时

$$V(\varphi(t;0,x_0))$$

是变量 t 的函数，并且

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\varphi(t;0,x_0))&\equiv\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V(\varphi(t;0,x_0))}{\partial x_k}\frac{\mathrm{d}\varphi_k(t;0,x_0)}{\mathrm{d}t}\\&\equiv\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V(\varphi(t;0,x_0))}{\partial x_k}f_k(\varphi(t;0,x_0))\end{aligned} \tag{6.7.4}$$

特别，当 $t=0$ 时，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\varphi(t;0,x_0))|_{t=0} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V(x_0)}{\partial x_k} f_k(x_0)$$

因此，导数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\varphi(t;0,x_0))$在$t=0$处的值就是函数(6.7.3)在点$x_0$处的值。因此，我们称函数(6.7.3)是函数$V(x)$按方程组(6.7.1)对时间$t$的全导数，并记为$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$。

定理1 如果对于方程组(6.7.1)，存在一个定正的函数$V(x)$，使得V按方程组(6.7.1)对时间t的全导数

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_k} f_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

是常负的，那末$x=0$是稳定的。

证明 在证明定理之前，先就$n=2$的情形进行如下的几何解释。所谓$x=0$是稳定的，就是对于$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得从圆$\|x\|<\delta$内的点x_0出发的轨线不能跑出圆$\|x\|<\varepsilon$外。取$c>0$充分小，使得由

$$V(x) = c$$

决定的闭曲线位在圆$\|x\|<\varepsilon$。再作一个圆$\|x\|<\delta$使得它位于$V=c$的闭曲线内部，对于x_0，若$\|x_0\|<\delta$，我们要证明从x_0出发的相轨线总在$\|x\|<\varepsilon$中，因为由(6.7.4)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\varphi(t;0,x_0)) \leqslant 0$$

从而当$t\geqslant 0$时

$$V(\varphi(t;0,x_0)) \leqslant V(\varphi(0;0,x_0)) = V(x_0)$$

所以$\varphi(t;0,x_0)$在$V=c$的内部，从而$\varphi(t;0,x_0)$位在圆$\|x\|<\varepsilon$中，如图5.17。

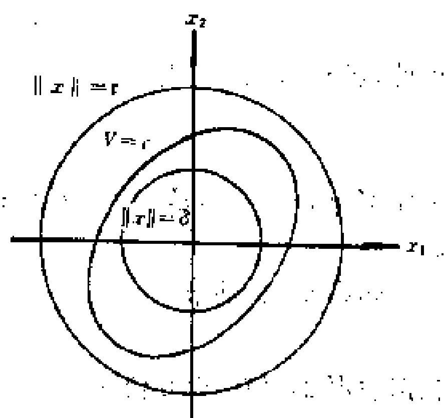


图6.17

现给出该定理的分析证明。

设$V(x)$和$\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}t}$在$\|x\|\leqslant h$上是定正的和常负的，对于正数$\varepsilon$，在有界闭区域$\varepsilon\leqslant\|x\|\leqslant h$上函数$V(x)$的最小值$m$是正的。

由于$V(0)=0$，且V是连续的，所以存在$\delta>0(\delta<\varepsilon)$，使得当$\|x\|<\delta$时

$$0\leqslant V(x) < m.$$

现在证明，当$\|x_0\|<\delta$时，方程组(6.7.1)的以(t_0,x_0)为初值的解$x=\varphi(t;t_0,x_0)$在区间$t_0\leqslant t<+\infty$中存在，并且成立着不等式

$$\|\varphi(t;t_0,x_0)\| < \varepsilon \quad (t_0\leqslant t<+\infty) \tag{6.7.5}$$

事实上，当$t=t_0$时，有

$$\|\varphi(t_0;t_0,x_0\| = \|x_0\| < \delta < \varepsilon$$

所以(6.7.5)当$t=t_0$时成立。如果$\varphi(t;t_0,x_0)$不是在$t_0\leqslant t<+\infty$中存在，或者式(6.7.5)不成立，那末必存在$t_1>t_0$使得当$t_0\leqslant t<t_1$时不等式(6.7.5)成立，而$t=t_1$时不成立，即

$$\|\varphi(t_1;t_0,x_0)\| = \varepsilon \tag{6.7.6}$$

由于当$t_0\leqslant t\leqslant t_1$时，$x=\varphi(t;t_0,x_0)$是方程组(6.7.1)的解，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\varphi(t;t_0,x_0)) \leqslant 0$$

从而

$$V(\varphi(t_1;t_0,x_0)) \leqslant V(\varphi(t_0;t_0,x_0)) = V(x_0) < m$$

根据 m 的定义得

$$\|\varphi(t_1;t_0,x_0)\| < \varepsilon$$

它与式(6.7.6)矛盾。因此,$x=\varphi(t;t_0,x_0)$在 $t_0\leqslant t<+\infty$中存在,且不等式(6.7.5)成立,即得证 $x=0$ 是稳定的。

定理 2 如果对于方程组(6.7.1)存在定正函数 $V(x)$,使得它按方程组(6.7.1)对时间 t 的全导数$\frac{dV}{dt}$是定负的,那末方程组(6.7.1)的零解是渐近稳定的。

证明 根据定理 1,方程组(6.7.1)的解 $x=0$ 是稳定的,需要证明的是:存在 $\sigma>0$,使得当 $\|x_0\|<\sigma$ 时,

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi(t;t_0,x_0) = 0 \tag{6.7.7}$$

设 V 和$-\frac{dV}{dt}$在 $\|x\|\leqslant h$ 上是定正的,根据定理 1,对于 h,存在 $\sigma>0$,使得当 $\|x_0\|<\sigma$ 时,$x=\varphi(t;t_0,x_0)$在 $t_0\leqslant t<+\infty$中存在,并且

$$\|\varphi(t;t_0,x_0)\| < h \qquad (t_0\leqslant t<+\infty)$$

因此,当 $t_0\leqslant t<+\infty$时

$$\frac{d}{dt}V(\varphi(t;t_0,x_0)) \leqslant 0$$

从而 $V(\varphi(t;t_0,x_0))$是 t 的单调不增函数,且 $V\geqslant 0$,所以当 $t\to+\infty$时 $V(\varphi(t;t_0,x_0))$有极限 $\alpha\geqslant 0$。

如果 $\alpha>0$,那末

$$V(\varphi(t;t_0,x_0)) \geqslant \alpha > 0$$

根据引理 2,存在 $a>0$ 使得

$$\|\varphi(t;t_0,x_0)\| \geqslant a$$

但$\frac{dV}{dt}$是定负的,所以根据引理 3 存在正数 m,使得

$$-\frac{d}{dt}V(\varphi(t;t_0,x_0)) \geqslant m$$

从而

$$0 \leqslant V((\varphi(t;t_0,x_0)) \leqslant V(x_0) - m(t-t_0)$$

上式右端当 $t\to+\infty$时趋于$-\infty$,这与 V 的定正性矛盾,所以 $\alpha>0$ 不成立,即 $\alpha=0$,因此

$$\lim_{t\to+\infty}V(\varphi(t;t_0,x_0)) = 0 \tag{6.7.8}$$

再证明(6.7.7)成立,否则存在 $\varepsilon_0>0$ 和 $t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots$, $t_k\to+\infty$,使 $\|\varphi(t_k;t_0,x_0)\|\geqslant\varepsilon_0>0$。由引理 3 得 $V(\varphi(t_k;t_0,x_0))\geqslant m_0>0$,它与式(6.7.8)矛盾。因此,等式(6.7.7)得证,即 $x=0$ 是渐近稳定的。

定理 3 如果对于方程组(6.7.1)存在一个函数 V,它按方程组(6.7.1)对 t 的全导数$\frac{dV}{dt}$是定正的,且在坐标原点的任一邻域内,函数 V 总能取到正值,那末方程组(6.7.1)的零解 $x=0$ 是不稳定的。

证明 设$\frac{dV}{dt}$在 $\|x\|\leqslant h$ 上是定正的。我们要证明,对任何 $\delta>0$,在 $\|x\|<\delta$ 内存在 x_0,使得 $x=\varphi(t;t_0,x_0)$不能总在球 $\|x\|<h$ 内。

事实上，取 x_0 满足 $\|x_0\|<\delta$ 且 $V(x_0)>0$，如果 $\varphi(t;t_0,x_0)$ 在 $\|x\|<h$ 内，由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\varphi(t;t_0,x_0))\geqslant 0$$

所以，当 $t_0\leqslant t<+\infty$ 时

$$V(\varphi(t;t_0,x_0))\geqslant V(x_0)>0$$

根据引理 2，存在 $\lambda>0$ 时，使得

$$h\geqslant\|\varphi(t;t_0,x_0)\|\geqslant\lambda>0$$

从而由引理 3，存在 $m>0$，使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\varphi(t;t_0,x_0))\geqslant m>0$$

因此，当 $t_0\leqslant t<+\infty$ 时

$$V(\varphi(t;t_0,x_0))\geqslant m(t-t_0)+V(x_0)$$

上式右端当 $t\to+\infty$ 时趋于 $+\infty$，这与 $\|\varphi(t;t_0,x_0)\|\leqslant h$ 矛盾，所以，$x=0$ 是不稳定的。

定理 4 如果对于方程组(6.7.1)，存在一个函数 V，使得当 $\|x\|\leqslant h$ 时

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\geqslant\lambda V$$

其中，λ 是正的常数，并且 V 在原点的任一邻域内总能取到正值，那末方程组(6.7.1)的零解 $x=0$ 是不稳定的。

证明 对任何 $\delta>0$，取 x_0 满足

$$\|x_0\|<\delta,V(x_0)>0$$

我们要证 $x=\varphi(t;t_0,x_0)$ 在 $t_0\leqslant t<+\infty$ 中不能总在球 $\|x\|<h$ 内，不然的话，由于 $\|\varphi(t;t_0,x_0)\|<h$，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\varphi(t;t_0,x_0))-\lambda V(\varphi(t;t_0,x_0))\geqslant 0$$

从而当 $t_0\leqslant t<+\infty$ 时

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{e^{-\lambda t}V(\varphi(t;t_0,x_0))\}\geqslant 0$$

因此

$$e^{-\lambda t}V(\varphi(t;t_0,x_0))-e^{-\lambda t_0}V(x_0)\geqslant 0$$

即

$$V(\varphi(t;t_0,x_0))\geqslant e^{\lambda(t-t_0)}V(x_0)$$

上式右端当 $t\to+\infty$ 时趋于 $+\infty$，它与 $\|\varphi(t;t_0,x_0)\|<h$ 相矛盾，所以 $x=0$ 是不稳定的。

例 1 讨论方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax+bx^2$$

的零解 $x=0$ 的稳定性。

取 $V(x)=x^2$，它是定正的，而

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=2x(ax+bx^2)=2ax^2+2bx^3$$

(1)当 $a<0$ 时，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 是定负的，$x=0$ 是渐近稳定的；

(2)当 $a>0$ 时，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 是定正的，$x=0$ 是不稳定的；

(3)当 $a=0,b\neq 0$,原来的 V 不能应用了,我们取

$$\overline{V}(x)=x$$

它是变号的,并且

$$\frac{\mathrm{d}\overline{V}}{\mathrm{d}t}=bx^2$$

它是定号的,因此 $x=0$ 是不稳定的。

例 2 讨论无阻尼的单摆运动方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{g}{l}\sin x\end{cases}$$

的零解 $x=y=0$ 的稳定性。

取

$$V(x,y)=y^2+\frac{4g}{l}\sin^2\frac{x}{2}$$

那末它是正定的,并且

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{4g}{l}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot y-2y\frac{g}{l}\sin x=0$$

所以零解是稳定的,但是 $V(x(t),y(t))=V(x_0,y_0)$,所以零解不是渐近稳定的。

定理 1 至定理 4 指出,如果具有其种性质的函数 V,就可以据此判断方程组(6.7.1)的零解是稳定的、渐近稳定的或不稳定的,但具体构造出 Liapunov 函数 V 是一个困难问题。反之,如果方程组(6.7.1)的零解具有某种稳定性,例如是渐近稳定的,是否存在满足定理 2 条件的 V 函数呢?这是所谓逆定理,该问题已经完整地解决了。我们这里就线性常系数微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax \tag{6.7.9}$$

来讨论这一问题。

假设 A 的特征值都具有负的实数部分,那末(6.7.9)的零解 $x=0$ 是渐近稳定的。现在要证明,存在二次型

$$V(x)=\langle Hx,x\rangle=\sum_{k,l=1}^{n}h_{kl}x_kx_l$$

这里 $H=(h_{kl})$是对称矩阵,使得 $V(x)$是定正的,而

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\langle HAx,x\rangle+\langle Hx,Ax\rangle=\langle(A^TH+HA)x,x\rangle$$

是定负的。

事实上,令

$$H=\int_0^{+\infty}e^{A^Ts}e^{As}\mathrm{d}s \tag{6.7.10}$$

那末 H 满足所要求的性质。

首先,因为 A 的特征值的实部都小于 0,所以 A^T 的特征值的实部都小于 0,并且存在常数 $M>0,\alpha>0$,使得

$$\|e^{As}\|\leqslant Me^{-\alpha s}\qquad(0\leqslant s<+\infty)$$
$$\|e^{A^Ts}\|\leqslant Me^{-\alpha s}\qquad(0\leqslant s<+\infty)$$

由此，(6.7.10)的右端的积分存在，并且

$$H^T = \int_0^{+\infty} (e^{A^Ts}e^{As})^T \mathrm{d}s = H$$

即 H 是对称矩阵，又对于 $x \neq 0$，有

$$\begin{aligned}(Hx,x) &= \int_0^{+\infty} < e^{A^Ts}e^{As}x, x > \mathrm{d}s \\ &= \int_0^{+\infty} < e^{As}x, e^{As}x > \mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} \| e^{As}x \|^2 \mathrm{d}s > 0\end{aligned}$$

所以，$V = <Hx,x>$是定正的。

其次，式(6.7.9)以$(0, x_0)$为初值的解是 $x = e^{At}x_0$，因此

$$\begin{aligned}V(e^{At}x_0) &= < He^{At}x_0, e^{At}x_0 > \\ &= \int_0^{+\infty} \| e^{As}e^{At}x_0 \|^2 \mathrm{d}s \\ &= \int_0^{+\infty} \| e^{A(s+t)}x_0 \|^2 \mathrm{d}s\end{aligned}$$

若令 $\tau = s + t$，那末由上式得

$$V(e^{At}x_0) = \int_t^{+\infty} \| e^{A\tau}x_0 \|^2 \mathrm{d}\tau$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(e^{At}x_0) = - \| e^{At}x_0 \|^2$$

特别当 $t = 0$ 时，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x_0) = - \| x_0 \|^2 \tag{6.7.11}$$

即$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$是定负的。

因此，当 A 的特征值的实部都小于 0，即方程组(6.7.1)的零解 $x = 0$ 渐近稳定时，存在 V 具有性质：

$$V(x) = < Hx, x > > 0 \qquad (x \neq 0)$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} < 0 \qquad (x \neq 0)$$

即存在正定的对称矩阵 H 满足

$$A^TH + HA = -I \tag{6.7.12}$$

这里 I 是 n 阶单位矩阵。

式(6.7.12)完全是一个代数问题，它应当有一个代数学的证明。

如果 A 是对角矩阵

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

那末式(6.7.12)成为

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

因此

$$2\lambda_1 h_{11} = -1, (\lambda_1 + \lambda_2)h_{12} = 0, \cdots, (\lambda_1 + \lambda_n)h_{1n} = 0$$

$$2\lambda_2 h_{22} = -1, \cdots, (\lambda_2 + \lambda_n)h_{2n} = 0, \cdots, 2\lambda_n h_{nn} = -1$$

从而

$$h_{kl} = \begin{cases} 0, & \text{当 } k \neq l \text{ 时,} \\ -\dfrac{1}{2\lambda_k} & \text{当 } k = l \text{ 时} \end{cases}$$

即

$$V(x) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{\lambda_k}$$

如果 $\lambda_k < 0 (k=1,2,\cdots,n)$，那么 $V(x)$ 是定正的，而

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

对于一般的矩阵 A，我们有下述 Liapunov 定理。

定理 5 如果矩阵 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 适合要求

$$\lambda_k + \lambda_l \neq 0 \qquad (k, l = 1, 2, \cdots, n)$$

那末，对任意 n 阶对称方阵 D，存在唯一的对称矩阵 H 满足关系

$$A^T H + HA = -D \tag{6.7.13}$$

证 根据线性代数的 Schur 定理，存在满秩矩阵 S，使得 $S^{-1}AS$ 呈三角形，即

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

以 S^T 左乘，S 右乘关系式(6.7.13)的两端，得到

$$S^T HS \cdot S^{-1}AS + (S^{-1}AS)^T S^T HS = -S^T DS$$

若记 $S^T HS = (g_{kl})$，$S^T DS = (c_{kl})$，那末上式成为

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{12} & g_{12} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{1n} & g_{2n} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{12} & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{12} & g_{12} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{1n} & g_{2n} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \tag{6.7.14}$$

把它展开就得关于 $g_{11},g_{12},\cdots,g_{1n},g_{22},\cdots,g_{2n},\cdots,g_{nn}$ 共 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个未知量的线性代数方程组

$$(\lambda_1+\lambda_1)g_{11}=-c_{11}$$
$$b_{12}g_{11}+(\lambda_1+\lambda_2)g_{12}=-c_{12}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$b_{1n}g_{11}+b_{2n}g_{12}+\cdots+b_{n-1,n}g_{n-1,n}+(\lambda_1+\lambda_n)g_{1n}=-c_{1n}$$
$$(b_{12}+b_{12})g_{12}+(\lambda_2+\lambda_2)g_{22}=-c_{22}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2b_{1n}g_{1n}+2b_{2n}g_{2n}+\cdots+2b_{n-1,n}g_{n-1,n}+(\lambda_n+\lambda_n)g_{nn}=-c_{nn}$$

它的系数行列式 $\prod_{k=1}^{n}\prod_{l=k}^{n}(\lambda_k+\lambda_l)$ 不为零，所以由上式可唯一地确定 g_{kl}，即由式(6.7.14)可唯一地决定 G。由于 $H=(S^T)^{-1}GS^{-1}$，所以对任何 n 阶对称矩阵 D，存在对称矩阵 $H=(h_{kl})$ 满足关系式(6.7.13)。根据线性代数方程组的理论知，作为 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个未知量 h_{kl} 的方程组(6.7.13)的系数行列式不为 0，从而存在唯一对称矩阵 H 满足关系式(6.7.13)。

当 A 和 D 都是实矩阵时，由式(6.7.13)得

$$\overline{H}A+A^T\overline{H}=-D$$

所以 $\overline{H}=H$，即 H 是实对称矩阵。

特别，当 A 的特征值都具有负实部时，定理的条件成立，所以存在对称矩阵 H 满足关系式

$$HA+A^TH=-I \tag{6.7.15}$$

剩下来应证明 H 是正定矩阵。首先，若存在 x_0 使得

$$<Hx_0,x_0><0$$

那末根据定理 3，方程组(6.7.9)的零解是不稳定的，它与 A 的特征值都具负实部相矛盾。因此 $H\geqslant 0$。其次，若存在 $x_0\neq 0$ 使得 $<Hx_0,x_0>=0$，那末由 $H\geqslant 0$ 知

$$<H(x_0+\mu x),x_0+\mu x>\geqslant 0$$

对任何 x 及实数 μ 成立，从而由 $<Hx_0,x_0>=0$ 得

$$2\mu<Hx_0,x>+\mu^2<Hx,x>\geqslant 0$$

对任意实数 μ 成立，由上式得 $<Hx_0,x>=0$，特别当 $x=Hx_0$ 时得 $<Hx_0,Hx_0>=0$，即 $Hx_0=0$。再由式(6.7.15)得

$$x_0^THAx_0+x_0^TA^THx_0=-x_0^Tx_0=-\|x_0\|^2<0$$

但上式左端因 $Hx_0=0$ 而等于 0，得到矛盾。因此，当 A 的特征值都具负实部时，满足式(6.7.15)的对称矩阵 H 必是正定的。反之，若 H 适合式(6.7.15)，就可对方程组(6.7.9)的解进行估计。

事实上，假设 H 是正定的，那末存在常数 $m>0,M>0$，使得

$$m<x,x>\leqslant<Hx,x>\leqslant M<x,x>$$

即

$$m\|x\|^2\leqslant<Hx,x>\leqslant M\|x\|^2$$

由于 $\frac{dV}{dt}=-\|x\|^2\leqslant-\frac{1}{M}<Hx,x>=-\frac{1}{M}V$，即

$$\frac{d}{dt}V(e^{At}x_0)\leqslant-\frac{1}{M}V(e^{At}x_0)$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{V(\mathrm{e}^{At}x_0)e^{\frac{t}{M}}\} \leqslant 0$$

从而当 $0\leqslant t<+\infty$时，

$$V(\mathrm{e}^{At}x_0)e^{\frac{t}{M}} - V(x_0) \leqslant 0$$

即

$$V(e^{At}x_0) \leqslant V(x_0)e^{-\frac{t}{M}} \quad (0 \leqslant t < +\infty)$$

于是

$$m\| e^{At}x_0 \|^2 \leqslant < He^{At}x_0, e^{At}x_0 >$$

$$\leqslant < Hx_0, x_0 > e^{-\frac{t}{M}} \leqslant M\| x_0 \|^2 e^{-\frac{t}{M}}$$

即当 $0\leqslant t<+\infty$时

$$\| \varphi(t;x_0) \| = \| e^{At}x_0 \| \leqslant \sqrt{\frac{M}{m}} \| x_0 \| e^{-\frac{t}{2M}}$$

因此，A 的特征值都具有负实部。

§6.8 一次近似理论

在非线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x) \qquad (f(0) = 0) \tag{6.8.1}$$

的零解 $x=0$ 的稳定性讨论中，Liapunov 直接方法是有效的，但是求 V 函数是十分困难的问题。因此，人们往往采用一次近似方法进行讨论。

假设 f 在坐标原点 0 的某一邻域内有连续的二阶偏导数，那末

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + g(x) \tag{6.8.2}$$

其中 $g_k(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_k(\theta_k x)}{\partial x_i \partial x_j}x_i x_j$，而 $0<\theta_k<1$，显然

$$\| g(x) \| = O(\| x \|^2)$$

我们称线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax \tag{6.8.3}$$

是方程组(6.8.2)的一次近似方程。能否由方程组(6.8.3)的零解的稳定性讨论非线性方程组(6.8.2)的零解的稳定性呢？一次近似理论就是回答这一问题的。

定理 1 如果线性方程组(6.8.3)的零解 $x=0$ 是渐近稳定的，那末(6.8.2)的零解也是渐近稳定的。

证明 由于(6.8.3)零解是渐近稳定的，所以 A 的特征值都具有负实部，根据§6.7 的定理 5，存在定正的函数

$$V(x) = < Hx, x >$$

而 V 按方程组(6.8.3)对 t 的全导数

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(6.8.3)} = < (A^T H + HA)x, x > = -\| x \|^2$$

现考虑 V 按方程组(6.8.2)对时间 t 的全导数

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(6.8.2)}=-\sum_{k=1}^{n}x_k^2+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_k}g_k(x)$$

由于$\frac{\partial V}{\partial x_k}$是 x 的线性函数，$g_k(x)=O(\|x\|^2)$，所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_k}g_k(x)=O(\|x\|^3)$$

再根据§6.7的引理1得到$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(6.8.2)}$是定负的，所以方程组（6.8.2）的零解是渐近稳定的。

定理2 如果线性方程组(6.8.3)的系数矩阵 A 的特征值至少有一个实部大于0，那末方程组(6.8.2)的零解是不稳定的。

证明 我们仅就 A 的特征值都不具有零实部的情形进行证明。设 A 有 r 个实部大于0的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$；$n-r$ 个实部小于0的特征值 $\lambda_{r+1},\lambda_{r+2},\cdots,\lambda_n$，在这里我们把 l 重特征值算为 l 个特征值。

根据线性代数的理论，存在实的满秩矩阵 S 使得

$$S^{-1}AS=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{bmatrix}$$

其中，A_1 是 r 阶方阵，特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$；$A_2$ 是 $n-r$ 阶方阵，特征值为 $\lambda_{r+1},\cdots,\lambda_n$。

对系统式(6.8.2)进行线性变换

$$x=Sy$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=S^{-1}ASy+S^{-1}g(Sy)$$

即

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y^1}{\mathrm{d}t}&=A_1y^1+h_1(y^1,y^2)\\ \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}t}&=A_2y^2+h_2(y^1,y^2)\end{aligned}\right\}\tag{6.8.4}$$

其中，y^1,y^2 分别为 r 维和 $n-r$ 维向量，而

$$y=\begin{bmatrix}y^1\\ y^2\end{bmatrix},h(y)=\begin{bmatrix}h_1(y^1,y^2)\\ h_2(y^1,y^2)\end{bmatrix}=O(\|y\|^2)$$

对于方阵$-A_1$，它的特征值$-\lambda_1,-\lambda_2,\cdots,-\lambda_r$ 的实部全是负的，所以根据§6.7的定理5，存在正定的 r 阶对称方阵 H_1，满足关系

$$-A_1^TH_1+H_1(-A_1)=-I_1$$

式中，I_1 是 r 阶单位阵，即

$$A_1^TH_1+H_1A_1=I_1\tag{6.8.5}$$

同样，存在 $n-r$ 阶正定的对称方阵 H_2，满足关系

$$A_2^TH_2+H_2A_2=-I_2\tag{6.8.6}$$

式中 I_2 是 $n-r$ 阶单位阵。

令

$$V(y)=\langle H_1y^1,y^1\rangle-\langle H_2y^2,y^2\rangle$$

它在 y 的坐标原点的任一邻域内可取到正值。而它按方程组(6.8.4)对 t 的全导数

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= \langle H_1(A_1y^1 + h_1(y^1,y^2)),y^1\rangle + \langle H_1y^1,A_1y^1 + h_1(y^1,y^2)\rangle \\
&\quad - \langle H_2(A_2y^2 + h_2(y^1,y^2)),y^2\rangle - \langle H_2y^2,A_2y^2 + h_2(y^1,y^2)\rangle \\
&= \langle (A_1^TH_1 + H_1A_1)y^1,y^1\rangle - \langle (A_2^TH_2 + H_2A_2)y^2,y^2\rangle \\
&\quad + \langle H_1y^1,h_1(y^1,y^2)\rangle - \langle H_2y^2,h_2(y^1,y^2)\rangle
\end{aligned}
$$

根据等式(6.8.5)和(6.8.6),由上式得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V(y)}{\mathrm{d}t} &= \langle y^1,y^1\rangle + \langle y^2,y^2\rangle + O(\|y\|^3) \\
&= \|y\|^2 + O(\|y\|^3)
\end{aligned}
$$

根据§6.7 定理 5 和$\frac{\mathrm{d}V(y)}{\mathrm{d}t}$是定正的,因此,方程组(6.8.4)的零解是不稳定的,从而,方程组(6.8.2)的零解 $x=0$ 是不稳定的。

例 1 讨论具有阻尼的单摆运动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

的解 $\varphi=0$ 和 $\varphi=\pi$ 的稳定性。

令 $x=\varphi, y=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$,得到

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= y, \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -\frac{g}{l}\sin x - by
\end{aligned}\right\} \tag{6.8.7}$$

它在(0,0)附近的一次近似方程是

$$\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y \\
\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{g}{l}x - by
\end{cases}$$

而系数矩阵的特征方程是

$$\lambda^2 + b\lambda + \frac{g}{l} = 0$$

所以特征值具有负实部,从而方程组(6.8.7)的零解是渐近稳定的。

为考察方程组(6.8.7)的平衡位置 $x=\pi, y=0$ 的稳定性,引进变换

$$\bar{x} = x - \pi, \bar{y} = y$$

得到

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t} &= \bar{y} \\
\frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}t} &= \frac{g}{l}\sin\bar{x} - b\bar{y}
\end{aligned}\right\} \tag{6.8.8}$$

它的一次近似的特征方程是

$$\lambda^2 + b\lambda - \frac{g}{l} = 0$$

有一个正实根,一个负实根,所以方程组(6.8.8)的零解是不稳定的,即方程组(6.8.7)的平衡位置 $x=\pi, y=0$ 是不稳定的。

例 2 讨论方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2x + y - z + x^2 \\
\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - y + xy \\
\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = x + y - z + z^2
\end{cases}
$$

的零解 $x=y=z=0$ 的稳定性。

该方程组一次近似的特征方程是

$$
\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0 \qquad (6.8.9)
$$

首先，当 $\lambda \geqslant 0$ 时，$\Delta(\lambda) \geqslant 3 > 0$，所以式(6.8.9)没有非负的实根。

其次，如果 $\lambda = \alpha + i\beta(\beta \neq 0)$ 是式(6.8.9)的复根，那末

$$
\alpha^3 - 3\alpha\beta^3 + 4(\alpha^2 - \beta^2) + 5\alpha + 3 = 0 \qquad (6.8.10)
$$

$$
3\alpha^2\beta - \beta^3 + 8\alpha\beta + 5\beta = 0 \qquad (6.8.11)
$$

由于 $\beta \neq 0$，从式(6.8.11)得

$$
\beta^2 = 3\alpha^2 + 8\alpha + 5
$$

代入式(6.8.10)得

$$
-8\alpha^3 - 32\alpha^2 - 42\alpha - 17 = 0
$$

当 $\alpha \geqslant 0$ 时，上式不可能成立，所以 $\alpha < 0$。

这就是说，(6.8.9)的根都在左半平面，因此，方程组的零解是渐近稳定的。

关于判断多项式的根都在左半平面的关系问题，是一个重要问题。Routh 和 Hurwitz 给出了解决该问题的充分必要条件。利用例 2 的步骤可以证明，实系数三次多项式

$$
a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \qquad (a_0 > 0)
$$

的根全在左半平面的充分必要条件是

$$
a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1a_2 > a_0a_3
$$

例 3 讨论方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x - y + z + xyz \\
\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - 2y + 2z + z^3 \\
\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = x + 2y + z + xz
\end{cases}
$$

的零解的稳定性。

该方程组的一次近似方程的特征方程是

$$
\Delta(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 5\lambda - 9 = 0
$$

因为 $\Delta(0) = -9 < 0, \Delta(3) = 21 > 0$，所以上式必有正根，从而方程组的零解是不稳定的。

习 题 六

1. 将三阶方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^3x}{dt^3}=f(t,x,\dot{x},\ddot{x}),\\ x(t_0)=\eta_0,\dot{x}(t_0)=\eta_1,\ddot{x}(t_0)=\eta_2\end{cases}$$

化为等价的一阶方程组，并证明它们等价性。

2. 证明：如果两方程组

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x,\frac{dx}{dt}=B(t)x$$

有相同的基本解矩阵，则 $A(t)\equiv B(t)$。这里 $A(t)$ 和 $B(t)$ 是两个 n 阶连续矩阵，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$y=(y_1,y_2,\cdots y_n)^T$。

3. 设 $x=x_1(t)$，$x=x_2(t)$ 是 $\frac{d^2x}{dt^2}+x=0$ 之满足初始条件

$$x_1(0)=0,\dot{x}_1(0)=1$$

$$x_2(0)=1,\dot{x}_2(0)=0$$

的两个解，试不具体求出 $x_1(t)$，$x_2(t)$ 而直接证明

(1) $\dot{x}_1=x_2$，$\dot{x}_2=-x_1(t)$；

(2) $x_1^2(t)+x_2^2(t)=1$；

(3) $x_2(t)$ 有零点。

4. 设 $A(t)$ 为矩阵，$f_i(t)$ 是向量，$x=\varphi_i(t)$ 是 $\frac{dx}{dt}=A(t)x+f_i(t)$ 的解 $(i=1,2,\cdots m)$。证明 $x=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(t)$ 是 $\frac{dx}{dt}=A(t)x+\sum_{i=1}^{m}f_i(t)$ 的解。

5. 如果 A 为任意 $n\times n$ 的常数矩阵，而 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征根，则 $e^{\lambda_1},e^{\lambda_2},\cdots,e^{\lambda_n}$ 是 e^A 的全部特征值。

6. 利用特征根法求一阶线性常系数齐次微分方程组的通解，其中 A 为

(1) $A=\begin{bmatrix}1&0\\-2&2\end{bmatrix}$，(2) $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\0&0&-2\\0&0&2\end{bmatrix}$

7. 求下列初值问题的解

$$\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}2&-1&1\\1&0&1\\1&-2&-3\end{bmatrix}x,x(0)=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

8. 用常数变易法求方程的通解

$$\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}e^t\\t\end{bmatrix}$$

9. 判定下列系数的奇点的类型，并绘出奇点附近的相图。

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=x+2y\end{cases}$　(2) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x\\ \dfrac{dy}{dt}=-y\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=x-3y\end{cases}$　(4) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-2x-5y+3\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+2y\end{cases}$

10. 设函数 $F(x)$ 二阶连续可微，$F(0)=0$，$F(0)<0$，试研究系统 $\frac{dx}{dt}=y-F(x)$，$\frac{dy}{dt}=-x$ 的奇点类型。

11. 引入变量 $y=\frac{dx}{dt}$，将方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+cx=0$ 化为方程组，就常数 b,c 的各种情况，讨论该系统的奇点的类型(设 $c\neq 0$)。

12. 试证明下列系统不存在极限环

(1) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2xy+x^3\\ \frac{dy}{dt}=-x^2+y-y^2+y^3\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y\\ \frac{dy}{dt}=-x-y+x^2+y^2\end{cases}$

13. 对于方程组

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-y+x(x^2+y^2)\sin\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{dy}{dt}=x+y(x^2+y^2)\sin\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}},x^2+y^2\neq 0\end{cases}$$

设当 $x=y=0$ 时右端为零，则

(1)验证 $x=\frac{1}{2}\cos t$，$y=\frac{1}{2}\sin t$ 是它的解；

(2)证明极限环 $x^2+y^2=\frac{1}{4}$ 是稳定的。

14. 证明下列系统存在极限环(周期解)。

(1) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+3y-x(x^2+9y^2)\\ \frac{dy}{dt}=-x+2y-y(x^2+9y^2)\end{cases}$

(2) $\frac{d^2x}{dt^2}+(x^4-1)\frac{dx}{dt}+x^3=0$

15. 研究下列系统的零解的稳定性

(1) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x-y+x^2-y^2\\ \frac{dy}{dt}=x+y-xy^2\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-x-y+z+xyz\\ \frac{dy}{dt}=x-2y+2z+z^2\\ \frac{dz}{dt}=x+2y+z+xz^3\end{cases}$

16. 利用 Liapunov 第二方法研究系统零解的稳定性。

(1) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-y+ax^3-y^5\\ \frac{dy}{dt}=x+ay^3+xy^4\end{cases}$

(2) $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathrm{sgn}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)+x=0$

17. 设$\frac{dx}{dt}=f(x)+\beta y,\frac{dy}{dt}=\nu x+\delta y$，其中 $f(x)$连续，$f(0)=0$。如果当 $x\neq 0$ 时，$(\delta f(x)-\nu x)x>0,xf(x)+\delta x^2<0$，则该系统零解是渐近稳定的。

18. 设 n 和 m 是常数，$n\geqslant m>0$，方程$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-mx+e^{nt}x^2$ 的一次近似方程的零解是渐近稳定的。试通过直接求解，验证方程本身的零解却是不稳定的。

19. 试证明方程$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{1+t}x+bx^2$ 的一次近似方程的零解是渐近稳定的，但方程本身的零解是不稳定的，其中常数 $b\neq 0$。

20. 试证明方程$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{x}{1+t}-x^3$ 的一次近似方程的零解是不稳定的，但方程本身的零解是渐近稳定的。

21. 研究下列的零解的稳定性。

(1) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-x\cos^2t+y(1+\sin t\cos t)\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x(\sin t\cos t-1)-y\sin^2t\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{x}{t+1}-10y\end{cases}$

22. 证明系统

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\alpha_1}{k_1}x(k_1-x-\alpha y)\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\alpha_2}{k_2}y(k_2-\beta x-y)\end{cases}$$

的正常值在第一象限是全局稳定的。其中参数 $\alpha,\beta,k_1,k_2,\alpha_1,\alpha_2$ 都是正常数，且 $k_1-\alpha k_2>0,k_2-\beta k_1>0$。

第七章 非线性系统的常用摄动方法

非线性问题一般难以获得精确的解析解，所以人们不得不设法去求某种近似解、数值解或两者的组合，近似方法中最主要的是摄动(渐近)方法。

摄动方法是近百年来由许多数学家、力学家及物理学家共同建立和发展起来的具有广泛应用的一个重要方法。近二三十年它的发展尤为迅速，现在已被公认为数学、理论物理、力学、化学、生物学及各种工程技术科学中研究非线性微分方程的基本方法之一，也是应用数学的重要学科之一。

本章从具体例子出发，介绍常用的几种求非线性微分方程渐近解的奇异摄动方法。

§7.1 基本概念

摄动方法就是将问题的解用一个摄动展开式的前面几项(一般是前两项)来表示，尽管这种摄动展开式可能发散，或是无严格的数学证明，但作为解的一个定性的或在某种范围内一定程度上的定量表示，在工程技术的实际应用中还是很方便的。摄动方法大致分为两类：一类展开式是根据参数(小的或大的)引出的，这个参数可以是自然地出现在原方程中的，也可以是为了方便而人为地引进的，这种展开式称为参数摄动；另一类展开式是根据坐标(小的或大的坐标)引出的，称为坐标摄动。

参数摄动的实质是：在微分方程 $L(u,x,\varepsilon)=0$ 和边界条件 $B(u,\varepsilon)=0$ 中，如果存在一个 $\varepsilon=\varepsilon_0$(可调整尺度使 $\varepsilon_0=0$)易于求出精确解，那么对于小量 ε，可寻找一个以 ε 为幂所表示的解

$$u(x,\varepsilon)=u_0(x)+\varepsilon u_1(x)+\varepsilon^2u_2(x)+\cdots \tag{7.1.1}$$

其中，u_n 与 ε 无关，$u_0(x)$ 是 $\varepsilon=0$ 时问题的解，将展开式代入原方程和边界条件，按小参数 ε 展开，令 ε 的每一次幂前面的系数为零，给出 u_n 的比较简便的方程组，并可以逐个求解。

坐标摄动的实质是：在微分方程 $L(u,x)=0$ 和边界条件 $B(u)=0$ 中(其中 x 是一个标量)，假定 $x\to x_0$(x_0 可调整为 0 或∞)时，$u(x)$ 取已知形式为 u_0，当 x 在 x_0 附近时，要确定偏差 $u-u_0$，当 $x_0=0$，这个偏差可表为 x 的幂的项；当 $x_0\to\infty$时，则可表为 x^{-1}的幂的项。

为了叙述方便起见，下面先引进一些必要的定义和术语。

定义 1 当 $\varepsilon\to0$ 时，$f(\varepsilon)=O[g(\varepsilon)]$，意思是指若存在一个与 ε 无关的正数 A 和一个 $\varepsilon_0>0$，使得

$$|f(\varepsilon)|\leqslant A|g(\varepsilon)|,\forall\ \varepsilon<\varepsilon_0$$

或为

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left|\frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}\right|<+\infty$$

例如，当 $\varepsilon\to0$ 时，$\sin\varepsilon=O(\varepsilon)$，$\cos\varepsilon=O(1)$，$\sinh\varepsilon=O(\varepsilon)$，$\cosh\varepsilon=O(1)$

如果 f 是 ε 和另一个量 x 的函数，而 $g(x,\varepsilon)$ 是一个标准函数，如能写成当 $\varepsilon\to0$ 时，

$$f(x,\varepsilon)=O[g(x,\varepsilon)]$$

如果存在一个与 ε 无关的正数 A 和一个 $\varepsilon_0>0$，使得对于所有的 $|\varepsilon|\leqslant|\varepsilon_0|$，下式成立：

$$|f(x,\varepsilon)|<A|g(x,\varepsilon)|$$

当 A 与 ε_0 和 x 无关时，则关系式 $f(x,\varepsilon)=O[g(x,\varepsilon)]$ 称为一致成立。例如：

$\sin(x+\varepsilon)=O(1)=O[\sin x]$，当 $\varepsilon\to 0$ 时是一致的，而 $e^{-x\varepsilon}-1=O(\varepsilon)$，当 $\varepsilon\to 0$ 时是非一致的。$\sqrt{x+\varepsilon}-\sqrt{x}=O(\varepsilon)$，当 $\varepsilon\to 0$ 时是非一致的。

定义 2 当 $\varepsilon\to 0$ 时，$f(\varepsilon)=o[g(\varepsilon)]$。意思是指若对每一个与 ε 无关的正数 δ，存在一个 ε_0，使得

$$|f(\varepsilon)|\leqslant\delta|g(\varepsilon)|,\forall\ \varepsilon\leqslant\varepsilon_0$$

或

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}\right|=0$$

同样若 $f(x,\varepsilon)=o[g(x,\varepsilon)]$，当 $\varepsilon\to 0$ 时，δ 与 ε_0 和 x 无关，则称为一致成立。

例如 $\sin\varepsilon=o(1)$，$\sin\varepsilon^2=o(\varepsilon)$，$\cos\varepsilon=o(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$。

$\sin(x+\varepsilon)=o(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$，当 $\varepsilon\to 0$ 时是一致的。

$e^{-x\varepsilon}-1=o(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$，当 $\varepsilon\to 0$ 时是非一致的。

$\sqrt{x+\varepsilon}-\sqrt{x}=o(\varepsilon^{\frac{3}{4}})$，当 $\varepsilon\to 0$ 时是非一致的。

如上所述，O 和 o 表示函数的量级（或量阶），称为量级的符号或阶符。$f(\varepsilon)=O(g(\varepsilon))$ 表示 $f(\varepsilon)$ 与 $g(\varepsilon)$ 同量级；$f(\varepsilon)=o(g(\varepsilon))$ 表示 $f(\varepsilon)$ 比 $g(\varepsilon)$ 高一个微量级。

定义 3 若给出一个级数 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{a_m}{x^m}$，其中 a_m 与 x 无关，则称级数为渐近级数，记为当 $|x|\to\infty$ 时，$y\sim\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{a_m}{x^m}$，当且仅当

$$|x|\to+\infty\text{ 时},y=\sum_{m=0}^{n}\frac{a_m}{x^m}+o(|x|^{-n})$$

或为　当 $|x|\to+\infty$ 时，

$$y=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{a_m}{x_m}+O(|x|^{-n})$$

若我们不需要利用一个幂级数表示某个函数，可以利用一般的函数列 $\delta_n(\varepsilon)$ 代之，只要

$$\text{当 }\varepsilon\to 0\text{ 时},\delta_n(\varepsilon)=o[\delta_{n-1}(\varepsilon)]$$

这样的序列称为渐近序列。例如，ε^n，$(\log\varepsilon)^{-n}$，$(\sin\varepsilon)^n$ 都是渐近序列。

定义 4 （利用渐近序列来定义渐近展开式）　给定 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_m\delta_m(\varepsilon)$，其 a_m 与 ε 无关，而 $\delta_m(\varepsilon)$ 是一渐近序列，我们称此展开式为一渐近展开式，记为

$$\text{当 }\varepsilon\to 0\text{ 时},y\sim\sum_{m=0}^{\infty}a_m\delta_m(\varepsilon)$$

当且仅当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$y=\sum_{m=0}^{n-1}a_m\delta_m(\varepsilon)+O[\delta_n(\varepsilon)]$$

显然，渐近级数是渐近展开式的一种特殊情形。

在参数摄动中，当 $\varepsilon\to 0$ 时，有展开式

$$f(x,\varepsilon)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(x)\delta_m(\varepsilon)$$

其中系数 a_m 仅为 x 的函数，则称此展开式为一致的，当

$$f(x,\varepsilon)=\sum_{m=0}^{N-1}a_m(x)\delta_m(\varepsilon)+R_N(x,\varepsilon)$$

$$R_N(x,\varepsilon)=O[\delta_N(\varepsilon)],\forall\ x$$

否则称为非一致有效展开式(通常称之为奇摄动展开)。例如

$$\varepsilon\to 0,\sin(x+\varepsilon)=\sin x+\varepsilon\cos x-\frac{\varepsilon^2}{2!}\sin x-\frac{\varepsilon^3}{3!}\cos x+\frac{\varepsilon^4}{4!}\sin x$$

$$+\frac{\varepsilon^5}{5!}\cos x-\frac{\varepsilon^6}{6!}\sin x-\frac{\varepsilon^7}{7!}\cos x-\cdots$$

是一致有效展开式。

$$f(x,\varepsilon)=\sqrt{x+\varepsilon}=\sqrt{x}\left(1+\frac{\varepsilon}{6x}-\frac{\varepsilon^2}{8x^2}+\frac{\varepsilon^3}{16x^3}-\cdots\right)$$

上式除第一项外,在 $x=0$ 处均为奇的,而且后项比前项更奇,因此展开式是非一致有效的,它在 $x=0$ 附近失效。

按参数的渐近展开式不是一致有效的,它的失效范围称为非一致区域,有时也称为边界层。

对形如

$$f(x,\varepsilon)\sim\sum_{m=0}^{\infty}\delta_m(\varepsilon)f_m(x)$$

的直接展开式,其中 $\delta_m(\varepsilon)$ 是参数 ε 的一个渐近序列,在非一致区域的范围内失效,其原因在于:无限域、小参数与最高阶导数相乘,偏微分方程类型的改变和奇点的存在。

在无限域的情形,非一致表现为存在长期项(或称永年项),如 $x^n\cos x$, $x^n\sin x$,它使 $f_m(x)/f_{m-1}(x)$ 当 $x\to\infty$ 时成为无界。在小参数与最高阶导数相乘时,摄动展开式不能满足所有的边界和初始条件,因而展开式在边界层和初始层失效。当摄动方程的类型与原来的方程不同时,就可能产生非一致性。非精确解的一部分奇性出现在展开式的某处时,一般说来,在后继项中奇性会变得更为明显。

还有一种情形,就是存在转向点的情况。考察方程

$$\ddot{y}+\lambda^2(1-x^2)y=0$$

对大的 λ 解的渐近展开式:当 $|x|<1$ 时,其解是振动的;当 $|x|>1$ 时,其解则表现为指数性的。

取展开式

$$y=e^{\lambda\varphi(x,\lambda)}$$

其中,$\varphi=\varphi_0(x)+\lambda^{-1}\varphi_1(x)+\cdots$ 代入原方程,令 λ 的同次幂的系数相等,得到

$$\varphi_0'^2=-(1-x^2)$$

$$2\varphi_0'\varphi_1'+\varphi_0''=0$$

这些方程的解是:

$$\varphi_0=\begin{cases}\pm i\int^x\sqrt{1-\tau^2}\,d\tau,(|x|<1)\\ \pm\int^x\sqrt{\tau^2-1}\,d\tau,(|x|>1)\end{cases}$$

$$\varphi_1=-\frac{1}{2}\ln\varphi_0'+\text{常数}$$

因此,当 $|x|<1$ 时

$$y = \frac{1}{(1-x^2)^{1/4}}\left[a_1\cos\left(\lambda\int^x \sqrt{1-\tau^2}\,d\tau\right) + b_1\sin\left(\lambda\int^x \sqrt{1-\tau^2}\,d\tau\right)\right]$$

当 $|x|>1$ 时

$$y = \frac{1}{(x^2-1)^{1/4}}\left[a_2\exp\left(\lambda\int^x \sqrt{\tau^2-1}\,d\tau\right) + b_2\exp\left(-\lambda\int^x \sqrt{\tau^2-1}\,d\tau\right)\right]$$

其中，a_i 和 b_i 是常数。此展开式称为 Liouville—Green 或 WKB 近似式。在 $x=\pm1$ 处，这些展开式是奇性的，点 $x=\pm1$ 称为转向点，这是由于其解用初等函数表示，解的形态从振动性变为指数性所致。

显然，不一致有效渐近展开式变为一致有效渐近展开式需要各种技巧，这些技巧称为摄动技术，它们包括：

利用自变量的近似恒等变换确定最佳坐标的方法称为伸缩坐标法。

利用解对两个不同的坐标（尺度）x 与 $\frac{x}{\varepsilon}$ 的不同渐近展开式，再利用匹配方法组合这些展开式，从而得到一致有效的展开式，这种方法称为匹配渐近展开方法。

利用不同的尺度得到两个展开式来表示方程的渐近解，这意味着独立变量的数目增加，因而将原来的常微分方程转换为一个偏微分方程，这种方法称为多重尺度方法。

利用常数变易法的作法，对对应变量引进近似恒等变换，得到解的一致有效展开式，这种方法称为平均方法。

§7.2 伸缩（应变）坐标法

Lindstedt 等人在研究方程

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon f(u,\dot{u}) \qquad (\varepsilon \ll 1)$$

时，由于非线性使系统的频率从线性的 ω_0 变为 $\omega(\varepsilon)$，故引进新变量 $\tau=\omega t$，并把 ω 和 u 按 ε 的幂展开为

$$u = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) + \cdots$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots$$

然后选取参数 $\omega_i(i\geqslant1)$，使长期项不出现。Poincaré 证明了用这种技巧得到的展开式是渐近的。这个技巧称为伸缩参数方法，参数的选定因问题（如频率、波数、波速、特征值或能级等等）而异。事实上，我们把参数展开式看作一个近似恒等变换。

如果函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n,\varepsilon)$ 按 ε 的幂展开时产生非一致性，那么我们不仅要展开因变量 u，还要展开那个显示非一致性的自变量，例如 x_1，因此 u 和 x_1 都用新的自变量按 ε 的幂展开

$$u = \sum_{m=0}^{N-1}\varepsilon^m u_m(s,x_2,x_3,\cdots,x_n) + O(\varepsilon^N)$$

$$x_1 = s + \sum_{m=1}^{N}\varepsilon^m \zeta_m(s,x_2,x_3,\cdots,x_n) + O(\varepsilon^{N+1})$$

上面第二个展开式可以看作一个从 x_1 到 s 的近似恒等变换，其中函数 ζ_m 称为伸缩函数，它的确定应使得 u 的展开式一致有效。换言之，对有关 x_1 全部值 $u_m/u_{m-1}<\infty$，或者使高阶近似不比前一阶近似更奇异。因为这里伸缩的是坐标而不是参数，故称为伸缩坐标方法。如果取 $\zeta_m=\omega_m s$（ω_m 为常数），就变成前述的伸缩参数的技巧（Lindstedt-Poincaré 技巧）了。

Lighthill 技巧是把上述有限项级数变为无穷级数

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m u_m(s, x_2, x_3, \cdots, x_n)$$

$$x_1 = s + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \zeta_m(s, x_2, x_3, \cdots, x_n)$$

用$\frac{u_m}{u_{m-1}}$和$\frac{\zeta_m}{\zeta_{m-1}}$有界来控制。

Kuo(郭永怀)将这个技巧加以变形而应用于粘性流体，正因为这个缘故，钱学森 1956 年把它命名 PLK(Poincaré－Lighthill－Kuo)方法。

为了对如下问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = F(x, u, \varepsilon) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

确定一致有效的展开式，可使用 Temple 技巧：引用一个新的自变量 s，且设

$$u = u(s, \varepsilon), x = x(s, \varepsilon)$$

用两个新的等价方程代替原来的方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = U(x, u, s, \varepsilon), \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = X(x, u, s, \varepsilon)$$

使得 U 和 X 对于 ε 是解析的，然后再确定关于 u 和 x 的直接摄动展开式。

伸缩坐标法对一个或两个方向的行波的双曲型微分方程来说是成功的，对抛物型方程亦有成功的例子，但对椭圆型方程来说都是失败的。这种方法对小参数乘以最高阶导数之类的奇摄动问题是失败的。它对弱非线性振子的周期轨道能给出一致有效的展开式，但对振幅是变化(如极限环等)的情况，这个方法是不能用的。总之，在自变量的某些变化范围内，因变量发生剧烈变化时，在这些区域内直接展开一般会失败，自变量的近似恒等变换(伸缩坐标)也不能对应这种突变，因而解决这一问题的办法，可采用下节的匹配技巧。

例 1　考虑 Duffing 方程的初值问题

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0, (0 \leqslant t < +\infty) \\ &u(0) = 1, \dot{u}(0) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.2.1}$$

首先对 Duffing 方程直接展开。令

$$u(t, \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \cdots \tag{7.2.2}$$

将式(7.2.2)代入方程(7.2.1)，整理并比较 ε 各次幂的系数，得

ε^0：

$$\ddot{u}_0 + u_0 = 0, u_0(0) = 1, \dot{u}_0(0) = 0$$

解得

$$u_0 = \cos t$$

ε^1：

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -u_0^3 = -\cos^3 t, u_1(0) = 0, \dot{u}_1(0) = 0$$

解得

$$u_1 = -\frac{3}{8} t \sin t + \frac{1}{32}(\cos 3t - \cos t)$$

所以

$$u(t, \varepsilon) = \cos t + \varepsilon\left[-\frac{3}{8} t \sin t + \frac{1}{32}(\cos 3t - \cos t)\right] + O(\varepsilon^2) \tag{7.2.3}$$

在式(7.2.3)中有长期项 $t\sin t$，因而展开式(7.2.3)在 $t \to +\infty$ 时不一致有效。为此，必须消除

长期项。

其次利用L—P法消除长期项。作变换

$$t=\tau(1+\varepsilon a_1+\varepsilon^2 a_2+\cdots)$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{du}{d\tau}(1+\varepsilon a_1+\varepsilon^2 a_2+\cdots)^{-1}$$

$$\frac{du}{dt}=(1-\varepsilon a_1)\frac{du}{d\tau}+O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{d^2u}{d\tau^2}(1+\varepsilon a_1+\varepsilon^2 a_2+\cdots)^{-2}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}=(1-2a_1\varepsilon)\frac{d^2u}{d\tau^2}+O(\varepsilon^2)$$

于是

ε^0:
$$\ddot{u}_0+u_0=0, u(0)=1, \dot{u}_0(0)=0 \tag{7.2.4}$$

解得

$$u_0=\cos\tau$$

ε^1:
$$\ddot{u}_1+u_1=2a_1\ddot{u}_0-u_0^3, u_1(0)=0, \dot{u}_1(0)=0 \tag{7.2.5}$$

或者

$$\ddot{u}_1+u_1=-2a_1\cos\tau-\cos^3\tau$$

$$\ddot{u}_1+u_1=-\left(2a_1+\frac{3}{4}\right)\cos\tau-\frac{1}{4}\cos 3\tau$$

现在的非齐次项为

$$h=-\left(2a_1+\frac{3}{4}\right)\cos\tau-\frac{1}{4}\cos 3\tau$$

有齐次解

$$f=-\cos\tau$$

为使$(h,f)=0$,应该有 $2a_1+\frac{3}{4}=0$,于是得

$$a_1=-\frac{1}{8}$$

方程(7.2.5)化为

$$\ddot{u}_1+u_1=-\frac{1}{4}\cos 3\tau, u_1(0)=0, \dot{u}_1(0)=0$$

解得

$$u_1=\frac{1}{32}(\cos 3\tau-\cos\tau)$$

根据变换式

$$t=\tau+\varepsilon a_1\tau+O(\varepsilon^2)=\tau\left(1-\frac{3}{8}\varepsilon\right)+O(\varepsilon^2)$$

$$\tau=\left[1+\frac{3}{8}\varepsilon+O(\varepsilon^2)\right]t-\left[1+\frac{3}{8}\varepsilon+O(\varepsilon^2)\right]O(\varepsilon^2)$$

$$=\left(1+\frac{3}{8}\varepsilon\right)t+O(\varepsilon^2)$$

最后可得

$$u = \cos\left(1+\frac{3}{8}\varepsilon\right)t + \frac{\varepsilon}{32}\left[\cos 3\left(1+\frac{3}{8}\varepsilon\right)t - \cos\left(1+\frac{3}{8}\varepsilon\right)t\right] + O(\varepsilon^2)$$

例 2 考虑 Mathieu 方程

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (\delta + 2\varepsilon\cos 2t)u = 0 \tag{7.2.6}$$

及其过渡曲线。

首先对方程式(7.2.6)直接展开。设 ε 是小量，令

$$u(t,\varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \cdots \tag{7.2.7}$$

于是 ε^0: $\qquad \ddot{u}_0 + \delta u_0 = 0$

ε^1: $\qquad \ddot{u}_1 + \delta u_1 = -2u_0\cos 2t$

ε^2: $\qquad \ddot{u}_2 + \delta u_2 = -2u_1\cos 2t$

……………………

从上式可以解得

$$u_0 = a\cos(\omega t+\theta), \delta = \omega^2$$

$$\ddot{u}_1 + \omega^2 u_1 = -2a\cos(\omega t+\theta)\cos 2t = -a\cos[(\omega+2)t+\theta] - a\cos[(\omega-2)t+\theta]$$

$$u_1 = \frac{a\cos[(\omega+2)t+\theta]}{4(1+\omega)} + \frac{a\cos[(\omega-2)t+\theta]}{4(1-\omega)}$$

$$\ddot{u}_2 + \omega^2 u_2 = -\frac{a}{2(1+\omega)}\cos[(\omega+2)t+\theta]\cos 2t - \frac{a}{2(1-\omega)}\cos[(\omega-2)t+\theta]\cos 2t$$

或者

$$\ddot{u}_2 + \omega^2 u_2 = -\frac{a}{4(1+\omega)}\cos((\omega+4)t+\theta) - \frac{a}{4(1-\varepsilon)}\cos((\omega-4)t+\theta)$$
$$-\left[\frac{a}{4(1-\omega)} + \frac{a}{4(1-\omega)}\right]\cos(\omega t+\theta)$$

于是

$$u_2 = -\frac{a}{4\omega(1-\omega^2)}t\sin(\omega t+\theta) + \frac{a\cos[(\omega+4)t+\theta]}{32(1+\omega)(2+\omega)}$$
$$+\frac{a\cos[(\omega-4)t+\theta]}{32(1-\omega)(2-\omega)}$$

所以

$$u = a\cos(\omega t+\theta) + \frac{1}{4}\varepsilon a\left\{\frac{\cos[(\omega+2)t+\theta]}{1+\omega} + \frac{\cos[(\omega-2)t+\theta]}{1-\omega}\right\}$$
$$+\frac{1}{32}\varepsilon^2 a\left\{-\frac{8t\sin(\omega t+\theta)}{\omega(1-\omega^2)} + \frac{\cos[(\omega+4)t+\theta]}{(1+\omega)(2+\omega)} + \frac{\cos[(\omega-4)t+\theta]}{(1-\omega)(2-\omega)}\right\} + \cdots$$

从上式中可以看出，当 $\varepsilon=0$ 时有周期解 $u=a\cos(\omega t+\theta)$；当 $\varepsilon\neq 0$ 时，从第三项开始出现长期项，$\omega=0,1,2$ 时解出现奇异性，进一步作下去将发现，$\omega=n(n=0,1,2\cdots)$时会有奇异性，直接展开式无效，对应的 δ 值为

$$\delta = 0,1,4,9\cdots,n^2$$

现在利用 L－P 法消除长期项。消除长期项和存在周期解的条件是一致的，所以用 L－P 方法消除长期项便可以同时得到 Mathieu 方程的近似过渡曲线和曲线上的解。

根据 L－P 方法，不仅要把 $u(t,\varepsilon)$展开成式(7.2.7)，还要把参数 δ 展开，让 δ 在 n^2 附近变化，我们取

$$\delta = n^2 + \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2 + \cdots \tag{7.2.8}$$

把式(7.2.7)和(7.2.8)代入方程式(7.2.6)，得

$$\ddot{u}_0 + \varepsilon\ddot{u}_1 + \varepsilon^2\ddot{u}_2 + \cdots + (n^2 + \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2 + \cdots)(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots)$$
$$+ 2\varepsilon\cos 2t(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots) = 0$$

于是 ε^0：
$$\ddot{u}_0 + n^2 u_0 = 0 \tag{7.2.9}$$

ε^1：
$$\ddot{u}_1 + n^2 u_1 = -\delta_1 u_0 - 2u_0\cos 2t \tag{7.2.10}$$

ε^2：
$$\ddot{u}_2 + n^2 u_2 = -\delta_1 u_1 - \delta_2 u_0 - 2u_1\cos 2t \tag{7.2.11}$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

从方程(7.2.9)可以解得

$$u_0 = A\cos nt + B\sin nt$$

A 和 B 是由初始条件确定的积分常数。当 n 为偶数时，u_0 的周期是 π；当 n 为奇数时，u_0 的周期是 2π。我们可以对 $n=0,1,2,\cdots$ 等分别加以讨论。

1. 当 $n=0$ 时，零级近似解

$$u_0 = A$$

于是

$$\ddot{u}_1 = -\delta_1 A - 2A\cos 2t$$

为消除 u_1 中的长期项，取 $\delta_1=0$，于是

$$\ddot{u}_1 = -2A\cos 2t$$

$$u_1 = \frac{1}{2}A\cos 2t$$

于是方程(7.2.11)变成

$$\ddot{u}_2 = -\delta_2 A - A\cos 2t\cos 2t$$

或者

$$\ddot{u}_2 = -\delta_2 A - \frac{A}{2} - \frac{A}{2}\cos 4t$$

同理，为了使 u_2 为周期函数，必须取

$$\delta_2 A + \frac{A}{2} = 0$$

当 $A\neq 0$ 时，一定有

$$\delta_2 = -\frac{1}{2}$$

所以，u 的两项展开式和近似过渡曲线为

$$u = A + \frac{1}{2}\varepsilon A\cos 2t + \cdots$$

$$\delta = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \cdots$$

2. 当 $n=1$ 时，零级近似解

$$u_0 = A\cos t + B\sin t \tag{7.2.12}$$

把式(7.2.12)代入方程(7.2.10)并取 $n=1$，得

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\delta_1(A\cos t + B\sin t) - 2(A\cos t + B\sin t)\cos 2t$$

或者

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -(\delta_1 + 1)A\cos t - (\delta_1 - 1)B\sin t - A\cos 3t - B\sin 3t$$

为消除 u_1 中的长期项，要求

$$(\delta_1 + 1)A = 0$$
$$(\delta_1 - 1)B = 0$$

于是

$$\ddot{u}_1 + u_1 = - A\cos 3t - B\sin 3t$$

第一种情况

$$\delta_1 = - 1, B = 0$$
$$\ddot{u}_1 + u_1 = - A\cos 3t$$

解得

$$u_1 = \frac{1}{8}A\cos 3t$$

$$\ddot{u}_2 + u_2 = -\frac{1}{8}A\cos 3t - \delta_2 A\cos t - \frac{1}{4}A\cos 3t\cos 2t$$

或者

$$\ddot{u}_2 + u_2 = - \left(\delta_2 + \frac{1}{8}\right)A\cos t + \frac{1}{8}\cos 3t - \frac{1}{8}A\cos 5t$$

为消除 u_2 中的长期项，必须取

$$\delta_2 = - \frac{1}{8}$$

于是得到 u 的两项展开式和近似过渡曲线为

$$u = A\cos t + \frac{1}{8}\varepsilon A\cos 3t + \cdots$$

$$\delta = 1 - \varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \cdots \tag{7.2.13}$$

式(7.2.13)确定一根过渡曲线，从 $\delta = 1$ 出发把稳定区和不稳定区分开，沿此过渡曲线 u 有周期为 2π 的周期解。

第二种情况

$$\delta_1 = 1, A = 0$$

于是

$$\ddot{u}_1 + u_1 = - B\sin 3t$$

解得

$$u_1 = \frac{1}{8}B\sin 3t$$

$$\ddot{u}_2 + u_2 = -\frac{1}{8}B\sin 3t - \delta_2 B\sin\tau - \frac{1}{4}B\sin 3t\cos 2t$$

或者

$$\ddot{u}_2 + u_2 = -\left(\delta_2 + \frac{1}{8}\right)B\sin\tau - \frac{1}{8}B\sin 3t - \frac{1}{8}B\sin 5t$$

为消除 u_2 中的长期项，必须取

$$\delta_2 = - \frac{1}{8}$$

重复前述作法便可以得到 u 的两项展开式和近似过渡曲线为

$$u = B\sin\tau + \frac{1}{8}\varepsilon B\sin 3t + \cdots$$

$$\delta = 1 + \epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2 + \cdots$$

上式又确定一根以 $\delta=1$ 出发的过渡曲线，把稳定区和不稳区分开，在曲线上有周期为 2π 的周期解。

3. 当 $n=2$ 时，零级近似解

$$u_0 = A\cos 2t + B\sin 2t \tag{7.2.14}$$

把式(7.2.14)代入方程(7.2.10)并取 $n=2$，得

$$\ddot{u}_1 + 4u_1 = \delta_1(A\cos 2t + B\sin 2t) - 2(A\cos 2t + B\sin 2t)\cos 2t$$

或者

$$\ddot{u}_1 + 4u_1 = -\delta_1 A\cos 2t - \delta_1 B\sin 2t - A - A\cos 4t - B\sin 4t$$

为消除 u_1 中的长期项，必须取

$$\delta_1 = 0$$

于是以上方程化为

$$\ddot{u}_1 + 4u_1 = -A - A\cos 4t - B\sin 4t$$

解得

$$u_1 = -\frac{1}{4}A + \frac{1}{12}A\cos 4t + \frac{1}{12}B\sin 4t \tag{7.2.15}$$

把式(7.2.15)代入式(7.2.11)并取 $n=2$，得到

$$\begin{aligned}\ddot{u}_2 + 4u_2 = &-\delta_2(A\cos 2t + B\sin 2t)\\ &- 2\left(-\frac{1}{4}A + \frac{1}{12}A\cos 4t + \frac{1}{12}B\sin 4t\right)\cos 2t\end{aligned}$$

或者

$$\ddot{u}_2 + 4u_2 = -\left(\delta_2 - \frac{5}{12}\right)A\cos 2t - \left(\delta_2 + \frac{1}{12}\right)B\sin 2t + \text{NST} \tag{7.2.16}$$

式中，NST 代表不产生长期项之项。为了在 u_2 中消除长期项，必须取

$$\left(\delta_2 - \frac{5}{12}\right)A = 0, \left(\delta_2 + \frac{1}{12}\right)B = 0$$

于是可以分两种情况来讨论。

第一种情况

$$\delta_2 = \frac{5}{12}, B = 0$$

仿照以前的作法，可以得到 u 的两项展开式和近似过渡曲线为

$$\begin{aligned}u &= A\cos 2t - \frac{1}{4}\epsilon A\left(1 - \frac{1}{3}\cos 4t\right) + \cdots\\ \delta &= 4 + \frac{5}{12}\epsilon^2 + \cdots\end{aligned} \tag{7.2.17}$$

第二种情况

$$\delta_2 = -\frac{1}{12}, A = 0$$

类似地可得

$$u = B\sin 2t + \frac{1}{12}\epsilon B\sin 4t + \cdots \tag{7.2.18}$$

$$\delta = 4 - \frac{1}{12}\varepsilon^2 + \cdots$$

式(7.2.17)和式(7.2.18)确定两根从 $\delta=4$ 出发的过渡曲线，把稳定区和不稳定区分开，在曲线上有周期为 π 的周期解。

§7.3 匹配渐近展开和复合渐近展开法

匹配技巧是利用原来的变量求直接展开式(称外部展开式)，利用放大尺度来描述剧烈变化区域的展开式(称内部展开式)，使变量与区域相匹配，故称为匹配渐近展开法。

为了使读者对此方法有直观的印象，我们先介绍一个 Prandtl 技巧。考虑简单的边值问题：

$$\begin{cases}\varepsilon\ddot{y} + \dot{y} + y = 0 & (7.3.1)\\ y(0) = \alpha, y(1) = \beta & (7.3.2)\end{cases}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，式(7.3.1)化简为

$$\dot{y} + y = 0 \tag{7.3.3}$$

这是一个一阶方程，不能满足两个边界条件式(7.3.2)，必须丢弃其中的一个。假设丢弃边界条件 $y(0)=\alpha$，此时，当 $\varepsilon\to 0$，且对固定的 $x\neq 0$

$$y \to \beta e^{1-x} \tag{7.3.4}$$

它是简化方程式(7.3.3)满足 $y(1)=\beta$ 的解，记为 y^o，称为外部解。对于小的 ε，简化方程的解除了在端点 $x=0$ 处的一个小区间之外接近于精确解。在该小区间里，精确解很快地回到边界条件 $y(0)=\alpha$，这个小区间(经过它 y 很快地变化)，流体力学中称为边界层，固体力学中称为附面层，电动力学中称为趋肤层。

为了确定在边界层内有效的展开式，采用伸展变换来放大这边界层

$$\zeta = \frac{x}{\varepsilon} \tag{7.3.5}$$

此时式(7.3.1)变为

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} + \frac{dy}{d\zeta} + \varepsilon y = 0 \tag{7.3.6}$$

对固定的 ζ，当 $\varepsilon\to 0$ 时，它简化为

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} + \frac{dy}{d\zeta} = 0 \tag{7.3.7}$$

它的通解是

$$y = A + Be^{-\zeta} \tag{7.3.8}$$

其中，A 和 B 是常数，因为这个解在边界层内有效，在原点有效，故必满足边界条件 $y|_{x=0}=\alpha$，因为 $\zeta=0$ 对应于 $x=0$，故 $y|_{\zeta=0}=\alpha$，所以 $B=\alpha-A$，式(7.3.8)变为

$$y = A + (\alpha - A)e^{-\zeta} \tag{7.3.9}$$

它有一个任意常数 A，这个解记为 y^i，称为内部解或内部展开式。

如何确定常数 A 呢？利用匹配原理

$$\lim_{x\to 0} y^o(x,\varepsilon) = \lim_{\zeta\to\infty} y^i(x,\varepsilon)$$

即

$$\beta e = A$$

它等价于使外部解的内部极限 $(y^o)^i$ 等于内部解的外部极限 $(y^i)^o$，因此有

$$y^i = \beta e + (\alpha - \beta e)e^{-\zeta}$$

为了计算 y 作为所有 x 的函数，将 x 增加到使两个解可以相交的某一个小值时，必须从一个解转换到另一个解，这个转换不是方便的，我们要从这些解得出单一的一致有效的解，称为复合解，记作 y^c，按 Erdelyi(1961)它是

$$y^c = y^o + y^i - (y^o)^i = y^o + y^i - (y^i)^o$$

因为

$$((y^o)^i)^o = (y^o)^i = (y^i)^o = ((y^o)^i)^i$$

所以

$$(y^c)^o = y^o + (y^i)^o - (y^o)^i = y^o$$

$$(y^c)^i = (y^o)^i + y^i - (y^o)^i = y^i$$

因而复合解在外部区域同外部解是一样好的近似；它在内部区域同内部解是同样好的近似，这表明复合解在包括内部区域与外部区域之间的间隙在内的 x 的整个区间上是一个一致的近似。匹配的成功可能是由于出现了使外部解和内部解都有效的重叠区域，所以在两个区域间没有间隙。这里复合解为

$$y^c = \beta x^{1-\varepsilon} + (\alpha - \beta e)e^{-x/\varepsilon} + O(\varepsilon)$$

这里介绍的技巧是由 Prandtl 于 1905 年在解决经过物体的高速粘性流的问题时得出的，故称为 Prandtl 技巧，这个小区域称为 Prandtl 边界层。这个方法后来被许多学者扩充和推广了，有高阶近似和改进的匹配方法等。

在此顺便提出复合展开方法。从上面得到的复合展开式

$$y(x,\varepsilon) = y^o(x,\varepsilon) + y^i(\zeta,\varepsilon) - (y^o)^i = y^o + y^i - (y^i)^o \tag{7.3.10}$$

出发，其中，y 是因变量；ε 是小参数；x 是外部变量；ζ 是内部变量。这个复合展开式可看成是两项即 $F(x,\varepsilon)=y^o$ 与 $G(\zeta,\varepsilon)=y^i-(y^o)^i$ 之和

$$y(x,\varepsilon) = F(x,\varepsilon) + G(\zeta,\varepsilon)$$

1956 年，Bromberg 等人不是先求外部和内部展开作匹配，然后构成复合展开，而是直接假设解具有上述的形式处处有效，所以它满足全部边界条件，取它的外部极限，给出

$$y^o(x,\varepsilon) = F + G^o$$

它必定满足用内部变量表示原来的微分方程。类似地，$y^i=F^i+G$ 必定满足用内部变量表示的原来的微分方程。为了确定一个近似解，F 和 G 用 ε 展开，对于各阶近似推出方程和边界条件。

应该注意，前面如果丢掉边界条件 $y(1)=\beta$，则使用伸展变换

$$\zeta = (1-x)\varepsilon^{-\lambda}, (\lambda > 0)$$

丢掉边界条件 $y(0)=\alpha$，可使用伸展变换

$$\zeta = x\varepsilon^{\lambda}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，依赖于 λ 的值，分 $\lambda>1$，$\lambda<1$，$\lambda=1$ 三种不同的极限形式进行讨论，然后决定取舍。

现在，我们应用匹配渐近展开法研究一类相场方程的渐近解。

设物质占有一定的空间区域 $\Omega=\Omega_0+\Omega_1$，在 Ω_0 中物质处于固态，在 Ω_1 中物质处于液态，且 $\Omega_0 \supset \Omega_1$ 其交界面为 Γ。于是单元系物质相变数学模型的典型形式即相场方程为

$$u_t + \frac{l}{2}\varphi_t = K\Delta u \tag{7.3.11}$$

$$\tau\xi^2\varphi_t = \xi^2\Delta\varphi + \frac{1}{2}(\varphi - \varphi^3) + 2u \tag{7.3.12}$$

式中，l 为每单位质量的熔解热；K 为扩散系数；τ 为驰豫时间；小参数 ξ 为区域 Γ 的宽度尺寸；$u(x,t)=T(x,t)-T_m$ 为约化温度；$T(x,t)$表示物体内部的温度分布；T_m 为物质的熔解温度；$\varphi(x,t)$为相场函数，可以认为是由-1(固态)到$+1$(液态)的一个光滑函数，且 $\varphi(x,t)|_\Gamma\equiv 0$。本段仅考虑二维空间的情形即 $\Omega\subset R^2$。

定义 r 为点 x 到 Γ 的距离，并规定在 Ω_1 内，r 为正；在 Ω_0 内，r 为负。于是

$$\Gamma(t,\xi)=\{r(x,t,\xi)=0\} \tag{7.3.13}$$

为便于讨论，规定 $\Gamma_\delta(t,\xi)=\{r<\delta\}$，当且仅当 $\xi\to 0$ 时，$\delta\to 0$，$\Gamma_\delta(t,\xi)$是在 Ω 中的内层区域，并还规定 $D_\delta=\overline{\Omega\backslash\Gamma_\delta}$为外层区域。

在远离 $\Gamma(t,\xi)$的区域，把 u 和 φ 展开为关于 ξ 的形式幂级数，即

$$u(x,t,\xi)=\sum\xi^n u_n(x,t) \tag{7.3.14}$$

$$\varphi(x,t,\xi)=\sum\xi^n\varphi_n(x,t) \tag{7.3.15}$$

且设

$$u^{(N)}=\sum_{n=1}^{N}\xi^n u_n(x,t) \tag{7.3.16}$$

$$\varphi^{(N)}=\sum_{n=1}^{N}\xi^n\varphi_n(x,t) \tag{7.3.17}$$

并假定

$$|u-u^{(N)}|=O(\xi^{N-1}) \tag{7.3.18}$$

$$|\varphi-\varphi^{(N)}|=O(\xi^{N+1}) \tag{7.3.19}$$

对于 $x\in\mathscr{D}_{\delta(N,\xi)}$和任意时间 t，式(7.3.18)和(7.3.19)一致地成立，同时，对于 u 和 $u^{(N)}$以及 φ 和 φ^N直到某阶导数，同样的近似关系也成立。u_n 和 φ_n 是外函数。

在 Γ 的邻域，引入局部 Ener 坐标$(r(x,t,\xi),s(x,t,\xi)$，其中 s 表示点 x 沿曲线 Γ 的弧长，$x\in\Gamma$，并引入伸长变量

$$\rho=\frac{r(x,t,\xi)}{\xi}$$

因此在这个邻域中，$u=U(\rho,s,t,\xi)$，$\varphi=\Phi(\rho,s,t,\xi)$。同样能把 U 和 Φ 展开为关于 ξ 的形式上级数，即

$$U(\rho,s,t,\xi)=\sum\xi^n U_n(\rho,s,t) \tag{7.3.20}$$

$$\Phi(\rho,s,t,\xi)=\sum\xi^n\Phi_n(\rho,s,t) \tag{7.3.21}$$

且设

$$U^{(N)}=\sum_{n=1}^{N}\xi^n U_n(\rho,s,t) \tag{7.3.22}$$

$$\Phi^{(N)}=\sum_{n=1}^{N}\xi^n U_n(\rho,s,t) \tag{7.3.23}$$

并假定

$$|U-U^{(N)}|=O(\xi^{N+1}) \tag{7.3.24}$$

$$|\Phi-\Phi^{(N)}|=O(\xi^{N+1}) \tag{7.3.25}$$

同时，U 和 $U^{(N)}$以及 Φ 和 $\Phi^{(N)}$的各阶导数相应的的近似关系也成立。为精确起见，假定存在一

个函数 $K(N,\xi)$，并且当 $\xi\to0$ 时，$K(N,\xi)\to\infty$，使得对于 $\rho<K(N,\xi)$，式(7.3.24)和式(7.3.25)一致地成立。U 和 Φ 是内函数。

函数 $V(s,t,\xi)$ 表示在 s 处沿正 r 方向相交曲面的法向速度 $-\frac{\partial r}{\partial t}(s,t,\xi)=-r_t(s,t,\xi)$。假设 Γ 一致光滑地依赖于 t 和 ξ，由此得出，V 和 r 能够由关于 ξ 截断幂级数对于 (s,t) 一致地逼近。

在中间区域即

$$\Lambda:\varepsilon^{-1}\delta(\varepsilon,N)\leqslant\rho\leqslant K(\varepsilon,N) \tag{7.3.26}$$

式中，取 $\delta=\varepsilon^{\alpha},K=\varepsilon^{-\beta},\beta>1-\alpha,\alpha,\beta$ 为正且 $\beta<\frac{1}{3}$ 时，外函数 u_i、φ_i 和内函数 U_i、Φ_i 间有下列匹配关系：当 $\rho\to\pm\infty$ 时

$$\left.\begin{aligned}&U_0(\pm\infty,s,t)=u_0(0\pm,s,t)\\&\Phi_0(\pm\infty,s,t)=\varphi_0(0\pm,s,t)\end{aligned}\right\} \tag{7.3.27}$$

$$\left.\begin{aligned}&U_1(\rho,s,t)=u_1(0\pm,s,t)+\rho\partial_r u_0(0\pm,s,t)+O(1)\\&\Phi_1(\rho,s,t)=\varphi_1(0\pm,s,t)+\rho\partial_r\varphi_0(0\pm,s,t)+O(1)\end{aligned}\right\} \tag{7.3.28}$$

$$\left.\begin{aligned}&U_2(\rho,s,t)=u_2+\rho\partial_r u_1+\frac{1}{2}\rho^2\partial_{rr}u_0+O(1)\\&\Phi_2(\rho,s,t)=\varphi_2+\rho\partial_r\varphi_1+\frac{1}{2}\rho^2\partial_{rr}\varphi_0+O(1)\end{aligned}\right\} \tag{7.3.29}$$

式中，$\partial_r u_0(0\pm,s,t)=\partial_r u_0(\Gamma\pm,t)$；$\partial_{rr}u_0(0\pm,s,t)=\partial_{rr}u_0(\Gamma\pm,t)$ 等等。

相场方程(7.3.11)和(7.3.12)，再加上初边值条件

$$u(x,t)=u_a(x,t),x\in\partial\Omega,t>0 \tag{7.3.30}$$

$$u(x,t)=0,x\in\Gamma,t>0 \tag{7.3.31}$$

$$u(x,0)=u(x),x\in\Omega \tag{7.3.32}$$

$$\varphi(x,t)=\begin{cases}1 & x\in\partial\Omega_1\\-1 & x\in\partial\Omega_u\\0 & x\in\Gamma\end{cases}\quad t>0 \tag{7.3.33}$$

$$\varphi(x,0)=u(x),x\in\Omega \tag{7.3.34}$$

构成相场方程的混合问题，本段运用匹配渐近法，讨论系统在非平衡状态下，弱耦合和一般耦合情形下相场方程的匹配展开解。

一、弱耦合的情形

考虑弱耦合的情形，相场方程(7.3.12)变为

$$\tau\xi^2\varphi_t=\xi^2\Delta\varphi+\frac{1}{2}(1-\varphi^2)\varphi+2\xi u \tag{7.3.35}$$

因此，相场方程混合问题由式(7.3.11)、式(7.3.35)和式(7.3.30)～式(7.3.34)构成。下面讨论这一问题的匹配展开近似解。

1. 外展开

将式(7.3.14)和式(7.3.15)代入式(7.3.11)和式(7.3.35)，比较 ξ 的系数，从而得到外展开序列

$O(1)$：

$$\partial_t u_0+\frac{1}{2}l\partial_t\varphi_0=K\Delta u_0 \tag{7.3.36}$$

$$\varphi_0-\varphi_0^3=0 \tag{7.3.37}$$

$O(\xi)$：
$$\partial_t u_1 + \frac{1}{2} l \partial_t \varphi_1 = K\Delta u_1 \tag{7.3.38}$$
$$\frac{1}{2}(1-3\varphi_0^2)\varphi_1 + 2u_0 = 0 \tag{7.3.39}$$
等等。

由式(7.3.37)得
$$\varphi_0(x,t) = \pm 1 \tag{7.3.40}$$
当 $x\in\Omega_1$ 时，φ_0 取正；当 $x\in\Omega_0$ 时，φ_0 取负。由式(7.3.36)得
$$\partial_t u_0 = K\Delta u_0 \tag{7.3.41}$$
由式(7.3.39)，得
$$\varphi_1 = 2u_0 \tag{7.3.42}$$
于是
$$\partial_t u_1 = K\Delta u_1 - l\partial_t \varphi_0 \tag{7.3.43}$$

2. 内展开

根据张量分析可知，对于局部正交坐标系(r,s)，Δ 算子和 u,φ 对于 t 的导数应变为
$$\Delta u = |\nabla r|^2 \partial_{rr} u + \Delta_r \partial_r u + \partial_s u \Delta s + \partial_{ss} u |\nabla s|^2$$
$\partial_t u$ 变成为 $\partial_t u + r_t \partial_r u + s_t \partial_s u$，$\Delta\varphi$ 和 $\partial_t\varphi$ 也有类似关系，式中 $|\nabla r|=1$，$\Delta r = k$，k 是 Γ 的曲率。于是式(7.3.11)和(7.3.35)变为
$$K\partial_{\rho\rho}U + \xi\left(-r_t\partial_\rho U - \frac{l}{2}\partial_\rho \Phi r_t + K\Delta r \partial_\rho U\right)$$
$$-\xi^2\left(\partial_t U + \partial_s U s_t + \frac{l}{2}\partial_t\Phi + \frac{l}{2}\partial_s\Phi s_t + K(\partial_{ss}U|\nabla_s|^2 + \partial_s U\Delta s)\right) = 0 \tag{7.3.44}$$
$$\partial_{\rho\rho}\Phi + \frac{l}{2}(1-\Phi^2)\Phi + \xi(2U - \tau r_t\partial_\rho\Phi + \partial_\rho\Phi\Delta r)$$
$$+\xi^2(\partial_{ss}\Phi|\Delta s|^2 + \partial_s\Phi\Delta s - \tau\partial_t\Phi - \tau\partial_s\Phi s_t) = 0 \tag{7.3.45}$$
将式(7.3.21)和(7.3.22)代入式(7.3.44)和式(7.3.45)，比较 ξ 系数，可得

$O(1)$：
$$K\partial_{\rho\rho}U_0 = 0 \tag{7.3.46}$$
$$\partial_{\rho\rho}\Phi_0 + \frac{l}{2}(1-\Phi_0^2)\Phi_0 = 0 \tag{7.3.47}$$
$O(\xi)$：
$$K\partial_{\rho\rho}U_1 = r_{0t}\partial_\rho U_0 + \frac{l}{2}r_{0t}\partial_\rho\Phi_0 - K\Delta r_0\partial_\rho U_0 \tag{7.3.48}$$
$$\partial_{\rho\rho}\Phi_1 + \frac{l}{2}(1-3\Phi_0^2)\Phi_1 = -2U_0 + \tau r_{0t}\partial_\rho\Phi_0 - \Delta r_0\partial_\rho\Phi_0 \tag{7.3.49}$$
等等。

由式(7.3.46)可知，U_0 应是 ρ 的一次函数，由于文献[27]已经证明，相场方程混合问题存在唯一的整体有界解以及边界条件 $U|_{\rho=0}=0$，因此
$$U_0 \equiv 0 \tag{7.3.50}$$
根据匹配条件式(7.3.27)得
$$u_0|_{\Gamma\pm} = U_0(\pm\infty) = 0 \tag{7.3.51}$$
于是，由式(7.3.36)、(7.3.30)、(7.3.32)和式(7.3.51)构成混合问题，即
$$\begin{cases} \partial_t u_0 = K\Delta u_0 \\ u(x,t) = \begin{cases} u_\partial(x,t), & x\in\partial\Omega \\ 0 & x\in\Gamma \end{cases} \\ u(x,t) = u(x) \end{cases}$$

根据数理方程可知，只要 $u(x)$ 连续且有界，$u_0(x,t)$ 有界并适当光滑，混合问题的解是唯一存在的，并且 $u_0\in C^\infty$。

由匹配条件式(7.3.27)和(7.3.40)，得

$$\Phi_0(\pm\infty)=\varphi_0|_{\Gamma+}=\pm 1,\Phi_0(0)=0$$

因此式(7.3.47)有传播速度为零的行波解 $\Phi_0=\Phi_0(\rho,s,t)$。

由式(7.3.48)，得

$$\partial_{\rho\rho}U_1=\frac{l}{2K}r_{t0}\Phi_{\rho0},r_{t0}=\partial_t r_0,\Phi_{\rho0}=\partial_\rho\Phi_0 \tag{7.3.52}$$

式(7.3.52)对 ρ 积分，得

$$\partial_\rho U_1=\frac{l}{2K}r_{t0}\Phi_0+c_1(s,t) \tag{7.3.53}$$

应用匹配条件式(7.3.53)，并对 ρ 求导，得

$$\partial_\rho U_1=\partial_r u_0(\pm 0,s,t)$$

于是

$$\partial_r u_0|_{\Gamma\pm}=\pm\frac{l}{2K}r_{t0}+c_1(s,t) \tag{7.3.54}$$

对式(7.3.54)分别取＋或－得两式，然后相减，于是

$$[\partial_r u]_\Gamma=\frac{lr_{t0}}{K} \tag{7.3.55}$$

括号表示 u 横过 Γ 时的跃度值，从式(7.3.55)可求出 r_{t0} 从而可决定 $c_1(s,t)$。

积分式(7.3.53)，得

$$U_1(\rho,s,t)=-\frac{l}{2K}V_0\Psi(\rho)+c_1(s,t)\rho+c_2(s,t) \tag{7.3.56}$$

其中，$\Psi(\rho)=\int_0^\rho\Phi_0(z)\mathrm{d}z,V_0=-r_{t0}$。由于(7.3.31)便得 $c_2(s,t)\equiv 0$，因此，式(7.3.56)可写为

$$U_1(\rho,s,t)=-\frac{l}{2K}V_0\Psi(\rho)+c_1(s,t)\rho \tag{7.3.57}$$

同时

$$U_1(\rho,s,t)=\frac{1}{2K}V\int_0^\rho(\mathrm{sgn}z'-\Phi_0(z'))\mathrm{d}z'-\frac{l}{2K}V_0|\rho|+c_1(s,t)\rho \tag{7.3.58}$$

应用匹配条件式(7.3.28)，得

$$u_1|_{\Gamma\pm}=\frac{l}{2K}\int_0^{\pm\infty}(\mathrm{sgn}z-\Phi_0(z))\mathrm{d}z \tag{7.3.59}$$

于是，由式(7.3.38)、(7.3.30)、(7.3.32)和式(7.3.59)构成非齐次热传导方程混合问题，即

$$\begin{cases}\partial_t u=K\Delta u_1+l\partial_t u_0\\ u_1=\begin{cases}0,x\in\partial\Omega\\ u_1|_{\Gamma\pm}\end{cases}\\ u_1(x,0)=0\end{cases}$$

同样，只要 $\partial_t u_0$ 和 $u_1|_{\Gamma\pm}$ 有界并适当光滑，此一问题的解是唯一存在的，并且 $u_1\in C^\infty$。

由式(7.3.49)，得

$$\partial_{\rho\rho}\Phi_1+\frac{1}{2}(1-3\Phi_0^2)\Phi_1=-\tau V_0\partial_\rho\Phi_0-K_0\partial_\rho\Phi_0 \tag{7.3.60}$$

应用匹配条件式(7.3.28)以及式(7.3.37)和式(7.1.39)，得

$$\Phi_1(\pm\infty) = \varphi_1(\Gamma\pm, s, t) = 0, \Phi_1(0) = 0$$

根据线性微分方程边值问题理论可知，只要 $\partial_\rho\Phi_0$ 连续，式(7.3.60)的边值问题的解就唯一存在。

二、一般耦合的情形

在一般耦合的情形，相场方程混合问题由式(7.3.11)、(7.3.12)和式(7.3.30)～(7.3.34)构成。

1. 外展开

将式(7.3.14)和(7.3.15)代入式(7.3.11)和(7.3.12)，比较 ξ 的系数，可得

$O(1)$：

$$\partial_t u_0 + \frac{1}{2} l \partial_t \varphi_0 = K\Delta u_0 \tag{7.3.61}$$

$$\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_0^3) + 2u_0 = 0 \tag{7.3.62}$$

$O(\xi)$：

$$\partial_t u_1 + \frac{1}{2} l \partial_t \varphi_1 = K\Delta u_1 \tag{7.3.63}$$

$$\frac{1}{2}(1 - 3\varphi_0^2)\varphi_1 + 2u_1 = 0 \tag{7.3.64}$$

等等。

由式(7.3.62)，得

$$\varphi_0 = h_\pm(u_0) \tag{7.3.65}$$

式中，对于内层($r>0$)的液态区域，$h(u_0)$取正；对于外层($r<0$)的固态区域，$h(u_0)$取负。

把式(7.3.65)代入式(7.3.61)，得

$$\partial_t\left[u_0 + \frac{l}{2} h_\pm(u_0)\right] = K\Delta u_0 \tag{7.3.66}$$

由式(7.3.64)，解得

$$\varphi_1 = \frac{4u_1}{3\varphi_0^2 - 1} \tag{7.3.67}$$

将式(7.3.67)代入式(7.3.63)，得

$$\partial_t\left[u_1 + \frac{2lu_1}{3\varphi_0^2 - 1}\right] = K\Delta u_1$$

即

$$\partial_t u_1 = \frac{K(3\varphi_0^2 - 1)}{3\varphi_0^2 + 2l - 1}\Delta u_1 + \frac{12 l \varphi_0 \partial_t \varphi_0}{(3\varphi_0^2 - 1)(3\varphi_0^2 + 2l - 1)} u_1 \tag{7.3.68}$$

2. 内展开

用 ρ, s 和 t 表示方程(7.3.11)和(7.3.12)，方程变为

$$K\partial_{\rho\rho}U + \xi\left(-r_t\partial_\rho U - \frac{1}{2}r_t\partial_\rho\Phi + K\Delta r\partial_\rho U\right)$$
$$-\xi^2\left(\partial_t U + \partial_s U s_t + \frac{l}{2}\partial_t\Phi + \frac{l}{2}\partial_s\Phi s_t - K(\partial_s U|\nabla s|^2 + \partial_s U\Delta s)\right) = 0 \tag{7.3.69}$$

$$\partial_{\rho\rho}\Phi + \frac{1}{2}(1 - \Phi^2)\Phi + 2U + \xi(-\tau r_t\partial_\rho\Phi + \partial_\rho\Phi\Delta r)$$
$$+\xi^2(\partial_{s}\Phi|\nabla s|^2 + \partial_s\Phi\Delta s - \tau\partial_t\Phi - \tau\partial_s\Phi s_t) = 0 \tag{7.3.70}$$

将式(7.3.21)和(7.3.22)代入式(7.3.69)和(7.3.70)，比较ξ的系数，可得

$O(1)$：

$$K\partial_{\rho\rho}U_0=0 \tag{7.3.71}$$

$$\partial_{\rho\rho}\Phi_0+\frac{1}{2}(1-\Phi_0^2)\Phi_0+2U_0=0 \tag{7.3.72}$$

$O(\xi)$：

$$K\partial_{\rho\rho}U_1=r_{0t}\partial_\rho U_0+\frac{l}{2}r_{0t}\partial_\rho\Phi_0-K\Delta r_0\partial_\rho U_0 \tag{7.3.73}$$

$$\partial_{\rho\rho}\Phi_1+\frac{1}{2}(1-3\Phi_0^2)\Phi_1=-2U_1+\tau r_0\partial_\rho\Phi-\Delta r_0\partial_\rho\Phi_0 \tag{7.3.74}$$

等等。

由于考虑到解的有界性和边界条件，从式(7.3.71)可得

$$U_0\equiv 0 \tag{7.3.75}$$

根据匹配条件式(7.3.27)，得

$$u_0|_{\Gamma_\pm}=0 \tag{7.3.76}$$

同时，由式(7.3.62)，得

$$\varphi_0|_{\Gamma_\pm}=\pm 1$$

于是，由式(7.3.66)、(7.3.30)、(7.3.33)和(7.3.76)构成拟线性抛物型方程的混合问题即

$$\begin{cases}\partial_t\left[u_0+\dfrac{l}{2}h_\pm(u_0)\right]=K\Delta u_0\\ u_0(x,t)=\begin{cases}u_b(x,t), & x\in\partial\Omega\\ 0 & x\in\Gamma_\pm\end{cases}\\ u_0(x,0)=u(x), & x\in\Gamma_\pm\end{cases}$$

文献[29]中第五章已经证明，在一定条件下，这一问题的整体解是唯一存在的，因而$u_0=u_0(x,t)$，从而由式(7.3.65)也可确定$\varphi_0=\varphi_0(x,t)$。

将式(7.3.75)代入式(7.3.72)，得

$$\partial_{\rho\rho}\Phi_0+\frac{1}{2}(\Phi_0-\Phi_0^3)=0 \tag{7.3.77}$$

应用匹配条件式(7.3.27)、(7.3.76)和(7.3.37)，得

$$\Phi_0(\pm\infty)=\varphi_0|_{\Gamma_\pm}=\pm 1 \tag{7.3.78}$$

$$\Phi_0(0)=0 \tag{7.3.79}$$

因此式(7.3.77)具有速度为零的行波解$\Phi_0=\Phi_0(\rho,s,t)$。

由式(7.3.73)和(7.3.75)，得

$$\partial_{\rho\rho}U_1=\frac{l}{2K}r_{t0}\partial_\rho\Phi_0 \tag{7.3.80}$$

积分式(7.3.80)，得

$$\partial_\rho U_1=\frac{l}{2K}r_{t0}\Phi_0+c_1(s,t) \tag{7.3.81}$$

应用匹配条件式(7.3.28)和(7.3.78)，并令$\rho\to\infty$，得

$$[\partial_n u]_\Gamma=-\frac{l}{K}V_0 \tag{7.3.82}$$

式中，$V_0=-r_{t0}$于是，由式(7.3.82)可决定r_{t0}，$c_1(s,t)$可以求出，因此，由式(7.3.66)、(7.3.76)、(7.3.81)和式(7.3.30)、(7.3.32)能够唯一解出$u_0(x,t)$、$r_0(x,t)$和$\varphi_0(x,t)$。

积分式(7.3.81)，得

$$U_1(\rho,s,t) = -\frac{l}{2K}V_0\Psi(\rho) + c_1(s,t)\rho + c_2(s,t) \tag{7.3.83}$$

其中，$\Psi(\rho) = \int_0^\rho \Phi_0(z)\mathrm{d}z$。由于式(7.3.31)使得 $c_2(s,t)\equiv 0$，因此，式(7.3.81)式可写为

$$U_1(\rho,s,t) = \frac{l}{2K}V_0\int_0^\rho(\mathrm{sgn}z - \Phi_0(z))\mathrm{d}z - \frac{l}{2K}V_0|\rho| + c_1(s,t)\rho \tag{7.3.84}$$

于是

$$u_1|_{\Gamma\pm} = \frac{l}{2K}V_0\int_0^{\pm\infty}(\mathrm{sgn}z - \Phi(z))\mathrm{d}z \tag{7.3.85}$$

因此，由式(7.3.78)和(7.3.85)构成了抛物型方程混合问题，即

$$\begin{cases} \partial_t u_1 = \dfrac{K(3\varphi_0^2 - 1)}{3\varphi_0^2 + 2l - 1}\Delta u_1 + \dfrac{12l\varphi_0\partial_t\varphi_0}{(3\varphi_0^2 - 1)(3\varphi_0^2 + 2l - 1)}u_1 \\ u_1 = \begin{cases} 0, x \in \partial\Omega \\ u_1|_{\Gamma\pm} \end{cases} \\ u_1(x,0) = 0 \end{cases}$$

文献[29]中第四章已经指出，在一定条件下，这一问题的解是唯一存在的，因而 $u_1 = u_1(x,t)$ 从而由式(7.3.67)也可确定 $\varphi_1 = \varphi_1(x,t)$。

由式(7.3.74)，得

$$\partial_{\rho\rho}\Phi_1 + \frac{1}{2}(1 - 3\Phi_0^2)\Phi_1 = -2U_1 - \tau V_0\partial_\rho\Phi_0 - k_0\partial_\rho\Phi_0 \tag{7.3.86}$$

由式(7.3.33)和匹配关系式(7.3.28)，可得

$$\Phi_1(\pm\infty,s,t) = \varphi(\Gamma \pm 1,s,t)$$

$$\Phi_1(0) = 0$$

因此，式(7.3.86)的边值问题的解是唯一存在的，即 $\Phi_1 = \Phi_1(\rho,s,t)$。

从以上讨论与计算中，我们得到了在弱耦合和一般耦合情形下，0一阶和1一阶的函数 u、φ、U 和 Φ 以及0一阶的 r，当然这一过程还可以继续进行下去，以求得更高阶的 u、φ、U 和 Φ，但其计算是相当复杂和困难的，这里不再赘述。

§7.4 参数变易及平均法

参数变易法原是当对应的齐次方程的通解已知时，求非齐次线性方程解的一种方法，它也可推广用来求非齐次项同时是自变量和因变量的函数这类问题的解，而且关于因变量的依赖性可以是非线性的。平均法是利用参数变易的思想，一般用来求周期解，下面介绍几种平均法。

一、Van der Pol 技巧

考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u = \varepsilon(1 - u^2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \varepsilon k\lambda\cos\lambda t \tag{7.4.1}$$

的周期解，其中 ε 是小参数；λ 是激励频率；ω_0 是固有频率，λ 与 ω_0 相差一个 ε 阶的小量。假定式(7.4.1)的解有如下的形式

$$u(t) = a_1(t)\cos\lambda t + a_2(t)\sin\lambda t \tag{7.4.2}$$

其中，$a_1(t)$ 和 $a_2(t)$ 设为时间的慢变函数，即

$$\frac{\mathrm{d}a_i}{\mathrm{d}t}=O(\varepsilon),\frac{\mathrm{d}^2a_i}{\mathrm{d}t^2}=O(\varepsilon^2) \tag{7.4.3}$$

对式(7.4.2)求导两次，得

$$\begin{aligned}\ddot{u}= & -\lambda^2a_1\cos\lambda t-\lambda^2a_2\sin\lambda t-2\dot{a}_1\lambda\sin\lambda t \\ & +2\dot{a}_2\lambda\cos\lambda t+\ddot{a}_1\cos\lambda t+\ddot{a}_2\sin\lambda t\end{aligned} \tag{7.4.4}$$

把式(7.4.2)和(7.4.4)代入式(7.4.1)，注意到式(7.4.3)，不计 ε 的高阶项，使等式两边 $\cos\lambda t$ 和 $\sin\lambda t$ 的系数相等，得到

$$2\dot{a}_1+\frac{\lambda^2-\omega_0^2}{\lambda}a_2-\varepsilon a_1(1-\rho)=0 \tag{7.4.5}$$

$$2\dot{a}_2-\frac{\lambda^2-\omega_0^2}{\lambda}a_1-\varepsilon a_2(1-\rho)=\varepsilon k \tag{7.4.6}$$

式中

$$\rho=\frac{a^2}{4}=\frac{a_1^2+a_2^2}{4} \tag{7.4.7}$$

为了分析式(7.4.1)的周期解，注意它们对应于式(7.4.5)和(7.4.6)的驻定解，即它们对应于方程

$$2\sigma a_{20}-a_{10}(1-\rho_0)=0 \tag{7.4.8}$$

$$-2\sigma a_{10}-a_{20}(1-\rho_0)=k \tag{7.4.9}$$

的解，这里 σ 是失调因子(detuning factor)，由下式给出

$$\sigma=\frac{\lambda-\omega_0}{\varepsilon} \tag{7.4.10}$$

在式(7.4.5)和(7.4.6)中的 $O(\varepsilon^2)$ 阶的项已被忽略，把式(7.4.8)和(7.4.9)平方再相加，借助于式(7.4.7)得到频率响应方程

$$\rho_0[4\sigma^2+(1-\rho_0)^2]=\frac{k^2}{4} \tag{7.4.11}$$

二、Krylov--Bogoliubov 技巧

对一般的弱非线性二阶方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2u=\varepsilon f\left(u,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) \tag{7.4.12}$$

当 $\varepsilon=0$ 时，式(7.4.12)的解可写作

$$u=a\cos(\omega_0t+\theta) \tag{7.4.13}$$

其中，a 和 θ 是常数.对小的不为 0 的 ε，为求式(7.4.12)的近似解，1947 年，Krylov、Bogoliubov 仍假设解由式(7.4.13)给出，但 a 和 θ 是依赖于时间变化的，且满足条件

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-a\omega_0\sin\varphi,\varphi=\omega_0t+\theta \tag{7.4.14}$$

将式(7.4.13)对 t 求导数，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-a\omega_0\sin\varphi+\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\cos\varphi-a\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin\varphi$$

由于式(7.4.14)，有

$$\frac{da}{dt}\cos\varphi - a\frac{d\theta}{dt}\sin\varphi = 0 \tag{7.4.15}$$

将式(7.4.14)对 t 求导数,得

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -a\omega_0^2\cos\varphi - \omega_0\frac{da}{dt}\sin\varphi - a\omega_0\frac{d\theta}{dt}\cos\varphi$$

将此式代入式(7.4.12),再利用式(7.4.13)得到

$$\omega_0\frac{da}{dt}\sin\varphi + a\omega_0\frac{d\theta}{dt}\cos\varphi = -\varepsilon f[a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi] \tag{7.4.16}$$

由式(7.4.15)和(7.4.16)解出$\frac{da}{dt}$和$\frac{d\theta}{dt}$,得到

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0}\sin\varphi f[a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi] \tag{7.4.17}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\varepsilon}{a\omega_0}\cos\varphi f[a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi] \tag{7.4.18}$$

这样,原来关于 u 的二阶微分方程(7.4.12)就被关于振幅 a 和相位 θ 的两个一阶微分方程(7.4.17)与(7.4.18)所代替了。

为了求解方程(7.4.17)和(7.4.18),注意到这些方程右边关于变量 φ 是周期的,因为 ε 是小量,a 和 θ 是时间的慢变函数,所以在时间区间 $T=2\pi/\omega_0$ 内它们的变化是很小的。把这些方程右边的 a 和 θ 当作常数,在区间$[t,t+T]$上求式(7.4.17)和(7.4.18)的平均值,我们得到

$$\begin{cases}\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\omega_0}f_1(a) & (7.4.19)\\ \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2a\omega_0}g_1(a) & (7.4.20)\end{cases}$$

式中

$$\begin{aligned}f_1(a) &= \frac{2}{T}\int_0^T \sin\varphi f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi)dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\varphi f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi)d\varphi\end{aligned} \tag{7.4.21}$$

$$\begin{aligned}g_1(a) &= \frac{2}{T}\int_0^T \cos\varphi f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi)dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\varphi f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi)d\varphi\end{aligned} \tag{7.4.22}$$

注意 f_1 和 g_1 就是 f 的 Fourier 级数展开式的两个系数。

此方法可以推广,例如把式(7.4.13)和(7.4.14)当作从 u 和$\frac{du}{dt}$到 a 和 φ 的变换,即

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega_0}\sin\varphi f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi)\\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_0 - \frac{\varepsilon}{a\omega_0}\cos\varphi f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi)\end{aligned}\right\} \tag{7.4.23}$$

这里变量 φ 称为快速旋转相位,不像上述那样将方程积分,而是定义一个从(a,φ)到$(\bar{a},\bar{\varphi})$的近似恒等变换:

$$\left.\begin{aligned}a &= \bar{a} - \varepsilon a_1(\bar{a},\bar{\varphi}) + \varepsilon^2 a_2(\bar{a},\bar{\varphi}) + \cdots\\ \varphi &= \bar{\varphi} + \varepsilon\varphi_1(\bar{a},\bar{\varphi}) + \varepsilon^2\varphi_2(\bar{a},\bar{\varphi}) + \cdots\end{aligned}\right\} \tag{7.4.24}$$

它关于$\bar{\varphi}$以 2π 为周期,方程(7.4.23)变成

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\bar{a}}{\mathrm{d}t} &= \varepsilon A_1(\bar{a}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{a}) + \cdots \\ \frac{\mathrm{d}\bar{\varphi}}{\mathrm{d}t} &= \omega_0 + \varepsilon B_1(\bar{a}) + \varepsilon^2 B_2(\bar{a}) + \cdots\end{aligned}\right\} \tag{7.4.25}$$

A_i 和 B_i 不依赖于$\bar{\varphi}$。将式(7.4.24)和(7.4.25)代入式(7.4.23)展开得 ε 的同次幂的系数相等，得到下列方程组：

$$\left.\begin{aligned}\omega_0 \frac{\partial a_n}{\partial \bar{\varphi}} + A_n &= F_n(\bar{a},\bar{\varphi}) \\ \omega_0 \frac{\partial \varphi_n}{\partial \bar{\varphi}} + B_n &= G_n(\bar{a},\bar{\varphi})\end{aligned}\right\} \tag{7.4.26}$$

其中，右边是式(7.4.24)和(7.4.25)中低阶项的已知函数，一般地，F_n 和 G_n 含有短周期项(用上标 s 记之)和长周期项(用上标 l 记之)，我们选取 A_n 和 B_n 等于长周期项，即

$$A_n = F_n^l, B_n = G_n^l \tag{7.4.27}$$

这样

$$\omega_0 \frac{\partial a_n}{\partial \bar{\varphi}} = F_n^s, \omega_0 \frac{\partial \varphi_n}{\partial \bar{\varphi}} = G_n^s \tag{7.4.28}$$

从这里可逐次解出 a_n 和 b_n。

Strüble 技巧是渐近解，表示为

$$u = a\cos(\omega_0 t - \theta) + \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^N u_n(t) + O(\varepsilon^{N-1}) \tag{7.4.29}$$

其中，a 和 θ 是时间的慢变函数。若式(7.4.29)中取 $u_n=0$，就简化成 Krylov－Bogoliubov 技巧。

三、Krylov－Bogoliubov－Mitropolski 技巧

假设渐近解展开的形式是

$$u = a\cos\psi + \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^n u_n(\alpha,\psi) + O(\varepsilon^{N+1}) \tag{7.4.30}$$

其中，每个 u_n 都是 ψ 的以 2π 为周期的周期函数。假定 α 和 ψ 是依赖于时间而变化的，按照

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_{n=1}^{N} \varepsilon^n A_n(\alpha) + O(\varepsilon^{N+1}) & (7.4.31)\\ \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \omega_0 + \sum\limits_{n=1}^{N} \varepsilon^n \psi_n(\alpha) + O(\varepsilon^{N+1}) & (7.4.32)\end{cases}$$

上面的函数 u_n、A_n 和 ψ_n 选得使式(7.4.30)～(7.4.32)满足微分方程 $\ddot{u}+\omega_0^2 u=\varepsilon f(u,\dot{u})$。为了唯一地确定 A_n 和 ψ_n，我们要求没有一个 u_n 含有 $\cos\psi$，求导按下列各式进行

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\psi}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial}{\partial\alpha} + 2\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\psi} + \left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\psi^2} + \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial}{\partial\psi}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\sum_{n=1}^{N}\varepsilon^n\frac{\mathrm{d}A_n}{\mathrm{d}\alpha} = \varepsilon^2 A_1\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}\alpha} + O(\varepsilon^3)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\sum_{n=1}^{N}\varepsilon^n\frac{\mathrm{d}\psi_n}{\mathrm{d}\alpha} = \varepsilon^2 A_1\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}\alpha} + O(\varepsilon^3)$$

§7.5 多重尺度法(MMS:method of multiple scales)

一、导数展开法

首先看线性阻尼振动的例子

$$\ddot{x} - x = -2\varepsilon\dot{x} \tag{7.5.1}$$

它有精确解

$$x = a e^{-\varepsilon t}\cos(\sqrt{1-\varepsilon^2}t + \varphi) \tag{7.5.2}$$

此解除依赖于 ε 外,还依赖于 $t,\varepsilon t,\varepsilon^2 t,\cdots$。因为若保持 t 固定对小量 ε 展开,指数及余弦因子由下面的式子给出

$$\exp(-\varepsilon t) = 1 - \varepsilon t + \frac{1}{2}\varepsilon^2 t^2 + \cdots \tag{7.5.3}$$

$$\cos(\sqrt{1-\varepsilon^2}t + \varphi) = \cos(t+\varphi) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 t\sin(t+\varphi) + \cdots \tag{7.5.4}$$

显然,$\exp(-\varepsilon t)$仅当乘积 εt 是小量时,可用有限项近似。由于 ε 是小量,意味着 $t=O(1)$。当 t 大到 ε^{-1}时,εt 不再是小量了,截断的展开式就会失败,但截断级数到 t 的某一值之前是符合要求的。当 t 大至 $O(\varepsilon^{-1})$时,εt 应当作为单变量 $T_1=O(1)$来考虑;当 t 大至 $O(\varepsilon^{-2})$时,$\varepsilon^2 t$ 应当作为一个单变量 $T_2=O(1)$来考虑,……。为了决定在 $O(\varepsilon^{-M})$之前的所有时刻 t 都有效的截断展开式(其中 M 是一正整数),我们必须决定 x 依赖于 $M+1$ 个不同的时间尺度 $T_0,T_1,\cdots,T_M$,其中

$$T_m = \varepsilon^m t \tag{7.5.5}$$

时间尺度 T_1 比 T_0 更慢,T_2 比 T_1 更慢,一般地,T_n 比 T_{n-1}更慢。因此,我们假定

$$\begin{aligned} x(t,\varepsilon) &= \hat{X}(T_0,T_1,\cdots,T_M,\varepsilon) \\ &= \sum_{m=0}^{M-1}\varepsilon^m x_m(T_0,T_1,\cdots,T_M) + O(\varepsilon T_M) \end{aligned} \tag{7.5.6}$$

其中,$O(\varepsilon T_M)$是截断误差,此展开式关于时间直到 $O(\varepsilon^{-M})$之前都是有效的。在这些时刻之外,必须利用其它的时间尺度以保持展开式一致有效。方程(7.5.5)和(7.5.6)说明,原方程若是常微分方程,已转变为偏微分方程;若原方程是偏微分方程,则增加了自变量的个数。利用链法则,对时间 t 的导数按下式转换

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2} + \varepsilon^3\frac{\partial}{\partial T_3} + \cdots \tag{7.5.7}$$

方程(7.5.5)~(7.5.7)阐述了多重尺度方法的一种类型—多变量型。Sturrock 和 Nayfeh 称这个方法为导数展开法。

将式(7.5.6)、(7.5.7)代入式(7.5.1),并令 ε 的同次幂的系数相等,得到确定 $x_0,x_1,\cdots,x_M$ 的方程组。这些方程组的解包含时间尺度 $T_1,T_2,\cdots,T_M$ 的任意函数,为了确定这些函数,需要补充一些附加条件,如式(7.5.6)对时间大到 ε^{-M}量级时有效的话,$\varepsilon^m x_m$ 应该是 $\varepsilon^{m-1}x_{m-1}$ 的小量修正。我们要求对所有的 $T_0,T_1,\cdots,T_M$,有

$$\frac{x_m}{x_{m-1}} < \infty$$

此条件等价于消除长期项。

二、两个变量的展开法

当我们观察精确解时，发觉 t 出现于组合 εt 或 $\sqrt{1-\varepsilon^2}t$ 之中，为了对大的时刻确定一个有效的展开式，引进两个时间尺度

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \varepsilon t\\ \eta &= \sqrt{1-\varepsilon^2}t = \left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2-\frac{1}{8}\varepsilon^4+\cdots\right)t\end{aligned}\right\} \tag{7.5.8}$$

1963 年 Cole 和 Kevorkian 假定

$$X(t,\varepsilon) = \tilde{X}(\xi,\eta;\varepsilon) = \sum_{m=0}^{M-1}\varepsilon^m x_m(\xi;\eta) + O(\varepsilon^M)$$

式中

$$\begin{cases}\xi = \varepsilon t & (7.5.9)\\ \eta = (1+\varepsilon^2\omega_2+\varepsilon^3\omega_3+\cdots+\varepsilon^M\omega_M)t & (7.5.10)\end{cases}$$

ω_n 为常数。在这种情况下，ξ 比 η 更慢，时间导数转换为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi} + (1+\varepsilon^2\omega_2+\varepsilon^3\omega_3+\cdots+\varepsilon^M\omega_M)\frac{\partial}{\partial\eta} \tag{7.5.11}$$

三、非线性尺度法

利用渐近序列 $\delta_n(\varepsilon)$ 代替 ε 的幂级数，可将多变量型推广为

$$T_n = \delta_n(\varepsilon)t,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \sum_{n=0}^{M}\delta_n(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial T_n} \tag{7.5.12}$$

还可进一步推广为

$$\left.\begin{aligned}T_n &= \delta_n(\varepsilon)g_n[\mu_n(\varepsilon)t]\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} &= \sum_{n=0}^{M}\delta_n(\varepsilon)\mu_n(\varepsilon)g'_n[\mu_n(\varepsilon)t]\frac{\partial}{\partial T_n}\end{aligned}\right\} \tag{7.5.13}$$

其中，$\mu_n(\varepsilon)$ 是另一个渐近序列。式(7.5.13)对线性或非线性时间尺度同样都适用。

类似地，两个变量展开法也可以推广如下

$$\xi = \mu(\varepsilon)t,\ \eta = \sum_{n=0}^{M}\delta_n(\varepsilon)g_n(\mu(\varepsilon)t) \tag{7.5.14}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \mu(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\xi} + \left\{\sum_{n=0}^{M}\delta_n(\varepsilon)\mu(\varepsilon)g'_n[\mu(\varepsilon)t]\right\}\frac{\partial}{\partial\eta} \tag{7.5.15}$$

多重尺度方法非常流行，已广泛应用于物理、工程技术和应用数学的各类问题之中。对于前面叙述过的方法不能很好地应用的问题，都可以使用多重尺度法，当然，确定不同尺度的方程时可能是困难的。

例 1 利用导数展开法求解 Van der pol 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + u = \varepsilon(1-u^2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},\ 0<\varepsilon\ll 1 \tag{7.5.16}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\varepsilon(u^2-1)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u=0$$

其中 $\varepsilon(u^2-1)$ 相当于一个变阻尼系数，当 $|u|>1$ 时，$u^2-1>0$，为正阻尼；当 $|u|<1$ 时，$u^2-1<0$，为负阻尼。

设解为

$$u = \sum_{n=0}^{2} \varepsilon^n u_n(T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^3) \tag{7.5.17}$$

并且

$$T_i = \varepsilon^i t, i = 0, 1, 2 \tag{7.5.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2}$$

$$= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2, D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}, n = 0, 1, 2 \tag{7.5.19}$$

把式(7.5.17)和(7.5.19)代入方程(7.5.16)，比较 ε 各次幂的系数，得到

$$\varepsilon^0: \quad D_0^2 u_0 + u_0 = 0 \tag{7.5.20}$$

$$\varepsilon^1: \quad D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 + (1 - u_0^2) D_0 u_0 \tag{7.5.21}$$

$$\varepsilon^2: \quad D_0^2 u_2 + u_2 = -2D_0 D_1 u_1 - D_1^2 u_0 - 2D_0 D_2 u_0 + (1 - u_0^2) D_0 u_1$$

$$+ (1 - u_0^2) D_1 u_0 - 2u_0 u_1 D_0 u_0 \tag{7.5.22}$$

方程(7.5.20)的通解为

$$u_0 = A(T_1, T_2) \mathrm{e}^{iT_0} + \overline{A}(T_1, T_2) \mathrm{e}^{-iT_0} \tag{7.5.23}$$

将 u_0 代入方程(7.5.21)，得到

$$D_1 u_1 + u_1 = -i(2D_1 A + A^2 \overline{A} - A) \mathrm{e}^{iT_0} - iA^3 \mathrm{e}^{3iT_0} + CC$$

要消除长期项，$\mathrm{e}^{\pm iT_0}$的系数必须为零，即

$$2D_1 A = A - A^2 \overline{A} \tag{7.5.24}$$

于是

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -iA^3 \mathrm{e}^{3iT_0} + i\overline{A}^3 \mathrm{e}^{-3iT_0}$$

通解为

$$u_1 = B(T_1, T_2) \mathrm{e}^{iT_0} + \frac{1}{8} iA^3 \mathrm{e}^{3iT_0} + CC \tag{7.5.25}$$

由方程(7.5.24)，得

$$2 \frac{\partial A}{\partial T_1} = A - A^2 \overline{A}$$

可以设

$$A(T_1, T_2) = \frac{1}{2} a(T_1, T_2) \mathrm{e}^{i\Phi(T_1, T_2)} \tag{7.5.26}$$

式中，$a(T_1, T_2)$是实函数。把 $A(T_1, T_2)$代入方程(7.5.24)，得

$$2\left[\frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial T_1} \mathrm{e}^{i\Phi} + \frac{1}{2} a i \mathrm{e}^{i\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial T_1}\right] = \frac{1}{2} a \mathrm{e}^{i\Phi}$$

$$- \frac{1}{4} a^2 \mathrm{e}^{2i\Phi} \times \frac{1}{2} a \mathrm{e}^{-i\Phi}$$

于是

$$\frac{\partial a}{\partial T_1} + ai \frac{\partial \Phi}{\partial T_1} = \frac{1}{2} a - \frac{1}{8} a^3$$

分离实部和虚部，我们有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T_1} = 0, \ \frac{\partial a}{\partial T_1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4} a^2\right) a \tag{7.5.27}$$

解得

$$\Phi = \Phi(T_2),\ a^2 = \frac{4}{1 + c(T_2)e^{-T_1}} \tag{7.5.28}$$

把式(7.5.26)代入式(7.5.23),得到

$$u_0 = \frac{1}{2}ae^{i(T_0+\Phi)} + \frac{1}{2}ae^{-i(T_0+\Phi)} = a\cos(T_0 + \Phi) \tag{7.5.29}$$

$$u = a\cos(T_0 + \Phi) + O(\varepsilon)$$

如果给定初始条件

$$u(0)=a_0,\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0$$

则

$$\Phi=0,a=a_0$$

于是

$$u=a\cos t+O(\varepsilon)$$

在式(7.5.27)中,令 $a=a_0$,则可以解出 c

$$c=\frac{4}{a_0^2}-1$$

于是

$$a^2=\frac{4}{1+\left(\frac{4}{a_0^2}-1\right)e^{-\varepsilon t}} \tag{7.5.30}$$

这就是第一次近似,u 在形式上仍是简谐振动 $u=a\cos t$,但对振幅 a 作了修正,a 不再是常数。如果要算到第二次近似,B、Φ 和 c 就不是常数,而是 T_1 和 T_2 的函数。为了定出这三个函数,我们把 u_0 和 u_1 的表达式(7.5.23)和(7.5.25)代入方程(7.5.22),得到

$$D_0^2u_2 + u_2 = Q(T_1,T_2)e^{iT_0} + \overline{Q}(T_1,T_2)e^{-iT_0} + \mathrm{NST}$$

其中,NST 为不产生长期项的项,而

$$\begin{aligned} Q = &- 2iD_1B + i(1 - 2A\overline{A})B - iA^2\overline{B} - 2iD_2A - D_1^2A \\ &+ (1 - 2A\overline{A})D_1A - A^2D_1\overline{A} + \frac{1}{8}A^3\overline{A}^2 \end{aligned} \tag{7.5.31}$$

要消除长期项,就要令 $Q=0$。

设

$$B = \frac{1}{2}ibe^{i\Phi} \tag{7.5.32}$$

其中,b 是一个实函数,Φ 和式(7.5.26)中的 Φ 相同。把式(7.5.26)和(7.5.32)中的 A 和 B 代入式(7.5.31),令 $Q=0$,分离实部和虚部,可以得出

$$\begin{aligned} &\frac{\partial a}{\partial T_2} = 0 \text{ 或者 } a = a(T_1) \\ &2\frac{\partial b}{\partial T_1} - \left(1 - \frac{1}{4}a^2\right)b = - 2a\frac{\partial \Phi}{\partial T_2} + \frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}T_1^2} - \left(1 - \frac{3}{4}a^2\right)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}T_1} - \frac{1}{128}a^5 \end{aligned} \tag{7.5.33}$$

把式(7.5.27)代入方程(7.5.33),得

$$2\frac{\partial b}{\partial T_1} - \frac{2}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}T_1}b = - 2a\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}T_2} + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{7}{16}a^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}T_1}$$

因此

$$\mathrm{d}\left(\frac{b}{a}\right) = - \left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}T_2} + \frac{1}{16}\right)\mathrm{d}T_1 + \left(\frac{7}{32}a - \frac{1}{8a}\right)\mathrm{d}a$$

积分得

$$b = -a\left(\frac{d\Phi}{dT_2} - \frac{1}{16}\right)T_1 + \frac{7}{64}a^3 - \frac{1}{8}a\ln a + ab_0(T_2) \tag{7.5.34}$$

把式(7.5.32)和(7.5.34)代入式(7.5.25)，得

$$u_1 = \frac{1}{2}i\left[-a\left(\frac{d\Phi}{dT_2} + \frac{1}{16}\right)T_1 + \frac{7}{64}a^3 - \frac{1}{8}a\ln a + ab_0(T_2)\right]e^{i(\Phi+T_0)} + \frac{1}{64}ia^3e^{3i(\Phi+T_0)} + CC \tag{7.5.35}$$

为了使$\frac{u_1}{u_0}<\infty$(对所有 T_1 都成立)，必须使

$$\frac{d\Phi}{dT_2} + \frac{1}{16} = 0 \tag{7.5.36}$$

解得

$$\Phi = -\frac{1}{16}T_2 + \Phi_0 \tag{7.5.37}$$

其中 Φ_0 是一个常数。把式(7.5.37)代入式(7.5.29)，得到

$$u_0 = a\cos\left(T_0 - \frac{1}{16}T_2 + \Phi_0\right) = a\cos\left[\left(1 - \frac{1}{16}\varepsilon^2\right)t + \Phi_0\right]$$

把式(7.5.32)、(7.5.34)代入式(7.5.25)，得

$$u_1 = \frac{1}{2}i\left(\frac{7}{64}a^3 - \frac{1}{8}a\ln a + ab_0\right)e^{i(\Phi+T_0)} + \frac{1}{64}ia^3e^{3i(\Phi-T_0)} + CC$$
$$= -\left(\frac{7}{64}a^3 - \frac{1}{8}a\ln a + ab_0\right)\sin(\Phi + T_0) - \frac{1}{32}a^3\sin3(\Phi + T_0)$$

所以 u 的两项近似展开式为

$$u = u_0 + \varepsilon_1 u_1 + O(\varepsilon^2) = a\cos\left[\left(1 - \frac{1}{16}\varepsilon^3\right)t + \Phi_0\right] - \varepsilon\left\{\left(\frac{7}{64}a^3 - \frac{1}{8}a\ln a + ab_0\right)\sin\left[\left(1 - \frac{1}{16}\varepsilon^2\right)t + \Phi_0\right] + \frac{1}{32}a^3\sin3\left[\left(1 - \frac{1}{16}\varepsilon^2\right)t + \Phi_0\right]\right\} + O(\varepsilon^2) \tag{7.5.38}$$

其中，a 由式(7.5.30)确定。在 $O(\varepsilon^2)$误差范围内 b_0 作为常数考虑，因为 $b_0=b_0(T_2)$，不计及 ε^3 时，可只取其常数部分。利用

$$\cos x\cos\mu - \sin x\sin\mu \approx \cos x - \mu\sin x$$
$$\sin x\cos\mu + \cos x\sin\mu \approx \sin x + \mu\cos x$$

式(7.5.38)可以写成

$$u = a\cos(t - \theta) - \frac{1}{32}\varepsilon a^3\sin3(t - \theta) + O(\varepsilon^2)$$

其中

$$\begin{cases}\theta = \frac{1}{16}\varepsilon^2 t + \frac{1}{8}\varepsilon\ln a - \frac{7}{64}\varepsilon a^2 + \theta_0 \\ \theta_0 = -\Phi_0 - \varepsilon b_0 = \text{const}\end{cases}$$

例 2 Duffing 方程的初值问题

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0, (0 < t < +\infty) \\ &u(0) = 0, \dot{u}(0) = a\end{aligned}\right\} \tag{7.5.39}$$

设

$$u(t,\epsilon) = u_0(\xi,\eta) + \epsilon u_1(\xi,\eta) + \epsilon^2 u_2(\xi,\eta) + \cdots \tag{7.5.40}$$

$$\xi = \epsilon t \tag{7.5.41}$$

$$\eta = (1 + \epsilon^2\omega_2 + \epsilon^3\omega_3 + \cdots)t \tag{7.5.42}$$

在式(7.5.42)中没有 $\epsilon\omega_1$,这一项,因为 ϵt 已含在 ξ 中了。将式(7.5.40)、(7.5.41)和(7.5.42)代入方程(7.5.39),比较 ϵ 的各次幂的系数得

$$\epsilon^0: \quad \left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_0}{\partial\eta^2} + u_0 = 0 \\ &u_0(0,0) = 0, \left.\frac{\partial u_0}{\partial\eta}\right|_{\epsilon=0,\eta=0} = a \end{aligned}\right\} \tag{7.5.43}$$

$$\epsilon^1: \quad \left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_1}{\partial\eta^2} + u_1 = -2\frac{\partial^2 u_0}{\partial\xi\partial\eta} - u_0^3 \\ &u_1(0,0) = 0, \frac{\partial u_0(0,0)}{\partial\xi} + \frac{\partial u_1(0,0)}{\partial\eta} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.5.44}$$

$$\epsilon^2: \quad \left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_2}{\partial\eta^2} + u_2 = -2\omega_2\frac{\partial^2 u_0}{\partial\eta^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial\xi^2} - 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi\partial\eta} - 3u_0^2 u_1 \\ &u_2(0,0) = 0, \frac{\partial u_1(0,0)}{\partial\xi} + \frac{\partial u_2(0,0)}{\partial\eta} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.5.45}$$

方程(7.5.43)的解为

$$u_0 = A_0(\xi)\cos\eta + B_0(\xi)\sin\eta$$

$$A_0(0) = 0, B_0(0) = a$$

于是,式(7.5.44)化为

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial\eta^2} + u_1 = 2\left[\frac{dA_0}{d\xi} - \frac{3}{8}B_0(A_0^2 + B_0^2)\right]\sin\eta - 2\left[\frac{dB_0}{d\xi} + \frac{3}{8}A_0(A_0^2 + B_0^2)\right]\cos\eta$$

$$-\frac{1}{4}B_0(3A_0^2 - B_0^2)\sin 3\eta - \frac{1}{4}A_0(A_0^2 - 3B_0^2)\cos 3\eta \tag{7.5.46}$$

为消去长期项,令

$$\begin{cases} \dfrac{dA_0}{d\xi} - \dfrac{3}{8}B_0(A_0^2 + B_0^2) = 0 \\ \dfrac{dB_0}{d\xi} + \dfrac{3}{8}A_0(A_0^2 + B_0^2) = 0 \end{cases}$$

从而得到

$$\frac{d}{d\xi}(A_0^2 + B_0^2) = 0$$

解得

$$A_0^2 + B_0^2 = a^2$$

于是

$$\frac{dA_0}{d\xi} - \frac{3}{8}a^2 B_0 = 0$$

$$\frac{dB_0}{d\xi} + \frac{3}{8}a^2 A_0 = 0$$

$$\frac{d^2 A_0}{d\xi^2} + \left(\frac{3}{8}a^2\right)^2 A_0 = 0$$

$$\frac{d^2 B_0}{d\xi^2} + \left(\frac{3}{8}a^2\right)^2 B_0 = 0$$

解得 $A_0=a\sin\frac{3}{8}a^2\xi, B_0=a\cos\frac{3}{8}a^2\xi$

所以

$$
\begin{aligned}
u_0 &= a\left(\sin\frac{3}{8}a^2\xi\cos\eta+\cos\frac{3}{8}a^2\xi\sin\eta\right)=a\sin\left(\eta+\frac{3}{8}a^2\xi\right) \\
&\approx a\sin\left[\left(1+\frac{3}{8}a^2\varepsilon\right)t\right] \qquad (7.5.47)
\end{aligned}
$$

下面我们再回到方程(7.5.46)，此时可简化为

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial\eta^2}+u_1=-\frac{A_0}{4}(A_0^2-3B_0^2)\cos3\eta-\frac{B_0}{4}(3A_0^2-B_0^2)\sin3\eta$$

解得

$$u_1=A_1(\xi)\cos\eta+B_1(\xi)\sin\eta+\frac{A_0}{32}(A_0^2-3B_0^2)\cos3\eta+\frac{B_0}{32}(3A_0^2-B_0^2)\sin3\eta \qquad (7.5.48)$$

或者

$$u_1=A_1(\xi)\cos\eta+B_1(\xi)\sin\eta-\frac{a^3}{32}\sin3\left(\eta+\frac{3}{8}a^2\xi\right) \qquad (7.5.49)$$

记 $\theta=\eta+\frac{3}{8}a^2\xi$，则式(7.5.49)可改写成

$$u_1=\widetilde{A}_1(\xi)\cos\theta+\widetilde{B}_1(\xi)\sin\theta-\frac{a^3}{32}\sin3\theta \qquad (7.5.50)$$

把式(7.5.47)、(7.5.50)代入方程(7.5.45)，得到

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial\eta^2}+u_2=\left(2\frac{d\widetilde{A}_1}{d\xi}-\frac{3}{2}\widetilde{B}_1a^2+2\omega_2a+\frac{15}{128}a^5\right)\sin\theta-2\frac{d\widetilde{B}_1}{d\xi}\cos\theta+\text{NST}$$

式中，NST 是不会产生长期项的项。为了消除长期项，令

$$\frac{d\widetilde{B}_1}{d\xi}=0$$

$$\frac{d\widetilde{A}_1}{d\xi}=-\omega_2a+\frac{3}{4}\widetilde{B}_1a^2-\frac{15}{256}a^5$$

由初始条件得

$$\widetilde{A}_1(0)=0, \widetilde{B}_1(0)=-\frac{9}{32}a^3$$

因而解得

$$\widetilde{B}_1(\xi)=\text{常数}=-\frac{9}{32}a^3$$

取

$$\omega_2=\frac{3}{4}\widetilde{B}_1a-\frac{15}{256}a^4=-\frac{69}{256}a^4$$

从而可得

$$\widetilde{A}_1(\xi)=\text{常数}=\widetilde{A}_1(0)=0$$

代入式(7.5.50)可得

$$u_1=-\frac{9}{32}a^3\sin\left(\eta+\frac{3}{8}a^2\xi\right)-\frac{a^3}{32}\sin3\left(\eta+\frac{3}{8}a^2\xi\right)$$

因此 $u_\varepsilon(\xi,\eta)$ 的两项展开式为

$$u_\epsilon(\xi,\eta) = a\sin\left(\eta + \frac{3}{8}a^2\xi\right) - \frac{9\epsilon}{32}a^3\sin\left(\eta + \frac{3}{8}a^2\xi\right)$$
$$- \frac{a^3}{32}\epsilon\sin 3\left(\eta + \frac{3}{8}a^2\xi\right) + O(\epsilon^2)$$

其中

$$\eta = \left(1 - \frac{69}{256}a^4\epsilon^2\right)t, \xi = \epsilon t$$

所以

$$u(t,\epsilon) = a\left(1 - \frac{9}{32}a^2\epsilon\right)\sin\left[\left(1 + \frac{3a^2}{8}\epsilon - \frac{69a^4}{256}\epsilon^2\right)t\right]$$
$$- \frac{a^3}{32}\epsilon\sin\left[3\left(1 + \frac{3a^2}{8}\epsilon - \frac{69}{256}a^4\epsilon^2\right)t\right] + O(\epsilon^2)$$

当 $a=1$ 时，有

$$u(t,\epsilon) \sim \left(1 - \frac{9}{32}\epsilon\right)\sin\left[\left(1 + \frac{3}{8}\epsilon - \frac{69}{256}\epsilon^2\right)t\right]$$
$$- \frac{1}{32}\epsilon\sin\left[3\left(1 + \frac{3}{8}\epsilon - \frac{69}{256}\epsilon^2\right)t\right]$$

习 题 七

1. 确定下列问题对于小参数 ϵ 的首阶一致有效展开式：

(1)$\ddot{u}+u+\epsilon u|u|=0$；

(2)$\ddot{u}+u+\epsilon(\sin\dot{u}+2\mu_1\dot{u})=0$；

(3)$\ddot{u}+u+\epsilon(2\mu_1\dot{u}+\mu_2\dot{u}_1|\dot{u}_1|)=0$.

2. 设 Mathieu 方程为

$$\ddot{u} + (\delta + 2\epsilon\cos 2t)u = 0$$

当 $\delta\approx 0$ 或 $\delta\approx 4$ 时，求此方程的两项一致有效展开式。

3. 已知方程

$$\ddot{u} + \frac{\delta u}{1 + \epsilon\cos 2t} = 0$$

求在接近 $\delta=0,1$ 或 4 时对于过渡曲线的两项展开式。

4. 考察边值问题

$$\begin{cases}\epsilon\ddot{y} + \dot{y} = 1 \\ y(0) = \alpha, y(1) = \beta\end{cases}$$

(1)求边值问题的精确解；

(2)利用渐近匹配展开法，求首阶一致有效展开式，并同精确解比较你的答案。

5. 考察边值问题

$$\begin{cases}\epsilon\dddot{y} - \dot{y} + y = 0 \\ y(0) = \alpha, \dot{y}(0) = \beta, y(1) = r\end{cases}$$

(1)求它的精确并利用它证明在每一端点一般总存在边界层；

(2)求它的两项一致有效展式并把你的答案同精确解比较。

6. 考察方程

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon \dot{u}^2 u, \varepsilon \ll 1$$

(1)求两项直接展开式并讨论它的一致收敛性；

(2)通过利用重正化方法，使这展开式是一致有效的；

(3)利用 Lindstedt-Poincaré 技巧，求首阶一致有效展开式；

(4)利用多重尺度法，求首阶一致有效展开式；

(5)利用平均法，求首阶一致有效展开式。

7. 考察单摆运动方程

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

(1)对小 θ 展开并保持到立方项；

(2)对于小而有限的 θ，求它的首阶一致有效展开式。

8. 考察方程

$$\left(1 + \frac{u^2}{1-u^2}\right)\ddot{u} + \frac{u\dot{u}^2}{(1-u^2)^2} + \omega_0^2 u + \frac{g}{l}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = 0$$

(1)对于小 u 展开并保持到立方项；

(2)对小而有限 u，求它的首阶一致有效展开式。

第八章　微分动力系统基础

19 世纪末，Poincaré 等人从经典力学和常微分方程定性理论的研究中，提出了动力系统的概念，而微分动力系统的现代研究，始于本世纪 60 年代初 Peixote 等人的工作。由于微分几何和微分拓扑的发展，在 Smale 等人的倡导和推动下，这一学科的基本理论的研究取得了重大进展，自 70 年代以来，微分动力系统的研究更广泛地向各应用领域发展。在经济学、气象预报、数值计算、统计力学、系统控制、流体力学、振动理论、化学反应、生理过程、生态和人口问题等众多领域的研究中，微分动力系统理论展示了广泛的应用前景。这一学科之所以受到普遍重视，不仅因为其丰富而深刻的理论，而且特别是由于它的广泛而有成效的应用。本章作为微分流形的应用，对微分动力系统的基本概念和重要性质作一简要的介绍，进而研究从一切可能的初始状态出发的系统状态的各种演化行为、它们的相互关系和稳定性。

§8.1　非自治系统和自治系统

考察微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x) \tag{8.1.1}$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$f(t,x)=(f_1(t,x),f_2(t,x),\cdots,f_n(t,x))^T$。设 $f(t,x)$ 在某一区域 $R\times D\subset R^{n+1}$ 上连续且满足解的存在唯一性条件。于是过任一点 $(t_0,x_0)\in R\times D$，方程组(8.1.1)都存在唯一的满足初始条件 $x|_{t=t_0}=x_0$ 的解

$$x=\varphi(t;t_0,x_0),t\in R \tag{8.1.2}$$

方程组(8.1.1)在 R^{n+1} 空间中确定一个向量场，而式(8.1.2)在 R^{n+1} 空间中表示经过点 (t_0,x_0) 的积分曲线。一般说来，我们可以理解方程组(8.1.1)代表某一力学系统的运动方程，其中 t 看作是时间，而 x 可视为关于质点的坐标和速度，或者它是这些量的某一向量函数。此时，方程组(8.1.1)的每一特解就对应于一个特定的运动。在这种解释之下，我们称方程组(8.1.1)是一个动力系统。由于方程组(8.1.1)的右端依赖于 t，这种动力系统也称为非自治系统或非定常系统，称 R^n 空间为相空间，称解 $\varphi(t;t_0,x_0)$，$t\in R$ 为一运动，称 R^n 空间中的点集合

$$\gamma=\{x\in R^n|x=\varphi(t;t_0,x_0),t\in R\}$$

$$\gamma^+=\{x\in R^n|x=\varphi(t;t_0,x_0),t\in R,t\geqslant t_0\}$$

$$\gamma^-=\{x\in R^n|x=\varphi(t;t_0,x_0),t\in R,t\leqslant t_0\}$$

分别为对应于这种运动或解 $\varphi(t;t_0,x_0)$ 的轨线，正半轨线和负半轨线。显然，R^n 空间的轨线就是 R^{n+1} 空间中的积分曲线在相空间 R^n 中的投影。

一、相　轨　线

现在考察另一种重要的情形就是方程组(8.1.1)的右端不含 t 的情况，即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x) \tag{8.1.3}$$

我们称这种动力系统为自治系统或定常系统。自治系统与非自治系统就其轨线族而论，存在着原则上差异。可以指出，自治系统的解所具有的几个重要特性是非自治系统的解所没有的。

设函数 $f(x)$ 在某一区域 $D\subset R^n$ 上连续且满足唯一性条件，因此方程组(8.1.3)存在着唯一的解。

性质1 设 $x=\varphi(t), t\in(\alpha,\beta)$ 是方程组(8.1.3)的解，则对$\forall\ t_0\in(\alpha,\beta)$，$x=\varphi(t-t_0), t\in(\alpha+t_0,\beta+t_0)$ 也是方程组(8.1.3)的解，且这个解所对应的轨线互相重合。

证明 令 $t=\tau+t_0$，于是(8.1.3)化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=f(x) \tag{8.1.4}$$

(8.1.4)与(8.1.3)的形式一致。因为 $x=\varphi(t), t\in(\alpha,\beta)$ 是方程组(8.1.4)的解，故 $x=\varphi(\tau), \tau\in(\alpha,\beta)$ 是方程组(8.1.4)的解，因而 $x=\varphi(t-t_0), t\in(\alpha+t_0,\beta+t_0)$ 也是方程组(8.1.4)的解。对 $x=\varphi(t)$ 和 $x=\varphi(t-t_0)$ 所不同的是 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 时经过 $\varphi(0)\overset{\triangle}{=}x_0$，而 $\varphi(t-t_0)$ 在 $t=t_0$ 时经过 x_0。因此两者在相空间的轨线重合。对于积分曲线来说，将 $x=\varphi(t), t\in(\alpha,\beta)$ 所对应的积分曲线沿 t 轴平移 t_0 就得到 $x=\varphi(t-t_0), t\in(\alpha+t_0,\beta+t_0)$ 所对应的积分曲线。可以类似地讨论 $t_0<0$ 的情形。

性质2 对于相空间的每一点 x_0，方程组(8.1.3)有且仅有一条轨线经过。这一性质称为轨线的唯一性。

证明 设过 $(x_0,t_0)\in D\times R$ 的解为

$$x=\varphi(t;t_0,x_0) \tag{8.1.5}$$

则对任一 t_1，方程组(8.1.3)当 $t=t_1$ 时，$x=x_0$ 的解为

$$x=x(t;t_1,x_0) \tag{8.1.6}$$

将(8.1.5)作时间的平移，得

$$x=\varphi(t-t_1+t_0;t_0,x_0) \tag{8.1.7}$$

根据性质1可知，式(8.1.7)也是方程组(8.1.3)的解，于是式(8.1.5)和式(8.1.7)所对应的轨线重合。又由于(8.1.7)，$x|_{t=t_1}=\varphi(t-t_1+t_0;t_0,x_0)|_{t=t_1}=\varphi(t_0;t_0,x_0)=x_0$ 而由式(8.1.6)有 $x|_{t=t_1}=x(t_1;t_1,x_0)=x_0$。根据解的唯一性，得

$$\varphi(t-t_1+t_0;t_0,x_0)=x(t;t_1,x_0)$$

因此式(8.1.5)和式(8.1.6)所对应的轨线重合。证毕。

必须指出，由性质2可知，轨线与轨线不会相交，同一轨线也不会自身相交，因此自治系统的两个不同解所对应的轨线或者不相交，或者完全重合。

性质3 对于任何 $x_0\in D$，都有

$$\varphi(t_2,\varphi(t_1,x_0))=\varphi(t_2+t_1,x_0)$$

证明 根据性质1，$\varphi(t,\varphi(t_1,x_0))$ 和 $\varphi(t+t_1,x_0)$ 都是方程组(8.1.3)的解。又由于 $t=0$ 时，这两个解都等于 $\varphi(t_1,x_0)$，故由解的唯一性，有恒等式

$$\varphi(t,\varphi(t_1,x_0))=\varphi(t+t_1,x_0)$$

特别有

$$\varphi(t_2,\varphi(t_1,x_0))=\varphi(t_1+t_2,x_0)$$

证毕。

假设方程组(8.1.3)的有解都在 $(-\infty,\infty)$ 上有定义，并对每个 $t\in(-\infty,+\infty)$，把 $\varphi(t,x_0)$ 看作为 $D\to D$ 的一个映射：$x_0\mapsto\varphi(t,x_0)$。现在考虑所有这样的映射构成的集合，并对此集

合中任意两个元素 $\varphi(t_1,x_0)$，$\varphi(t_2,x_0)$，定义它们的和为

$$\varphi(t_2,\varphi(t_1,x_0)) \stackrel{\triangle}{=} \varphi(t_1+t_2,x_0)$$

显然，$\varphi(t_1+t_2,x_0)$仍是此集合的一个元素。同时，在这种点映射的集合中，定义的加法运算是满足结合律的，其次存在零元素 $\varphi(0,x_0)$。因为对任一元素 $\varphi(t,x_0)$有

$$\varphi(t,\varphi(0,x_0)) = \varphi(t,x_0)$$

此外，对任一元素 $\varphi(t,x_0)$总存在它的逆元素 $\varphi(t,x_0)$，因为

$$\varphi(-t,\varphi(t,x_0)) = \varphi(0,x_0)$$

因此，所有点映射 $\varphi(t,x_0)$，$t\in R$ 集合构成一个群，此群称为变换群。有了变换群的概念之后，动力系统的理论就有了向抽象空间和微分流形上拓广的可能性。

二、常点与奇点，周期解与闭轨

对于方程组(8.1.3)，如果 $x_0\in D\subset R^n$ 且 $f(x_0)\neq 0$，则称点 x_0 为方程组(8.1.3)的常点。在常点附近轨线弧的分布，从拓扑学的观点来看，和一组平行直线一样。如果 $x_0\in\subset R^n$ 且 $f(x_0)=0$，则称 x_0 为方程组(8.1.3)的一个奇点。显然，若 x_0 是方程组(8.1.3)的一个奇点，则 $x=x_0$ 必为方程组(8.1.3)的一个解，则称此解为平衡解或定常解。这时，对应于此解的轨线就是由一点 x_0 构成的。而对应于此解的积分曲线就是(t,x)空间中的一平行于 t 轴的直线。

关于奇点，有以下两个简单性质。

定理 1 若 x_0 是方程组(8.1.3)的一个奇点，则任何异于 x_0 的轨线都不可能在有限时间达到或趋向点 x_0。

证明 用反证法证明，假设定理的结论不真，则必存在一个非平衡解 $x=\varphi(t)$，$t,\tau\in R$，使当 $t\to\tau$ 时，$\varphi(t)\to x_0$ 根据 $\varphi(t)$的饱和性，τ 必为(α,β)的一个内点，从而 $\varphi(\tau)=x_0$。因此，过 x_0 就有两条轨线，与性质 2 矛盾。定理得证。

推论 若方程组(8.1.3)的一个解 $\varphi(t)$，$t\in(\alpha,\beta)$在 $t\to\beta_-$(或 $t\to\alpha_+$)趋向于奇点 x_0，则必有 $\beta=+\infty(\alpha=-\infty)$。

定理 2 如果 $x_0\in D\subset R^n$ 的任意小的邻域内，有时间长度为任意大的轨线弧，则 x_0 必为奇点。

证明 假设 x_0 不是奇点，则可找到 t^*，使 $\varphi(t^*,x_0)\neq x_0$。又设 $\mathrm{d}(\varphi(t^*,x_0),x_0)=\rho>0$，根据解对初值的连续性，可求得 $\delta>0\left(\delta<\dfrac{\rho}{3}\right)$，使当 $\mathrm{d}(x,x_0)<\delta$ 时，有

$$\mathrm{d}(\varphi(t^*,x_0),\varphi(t^*,x)) < \frac{\rho}{3}$$

因此，由点 x_0 的 δ—邻域内出发的时间长度大于或等于 t^* 的任一轨线弧都有位于这个邻域之外的点。与定理假设矛盾。定理得证。

如果一条轨线当 $t\to-\infty$和 $t\to-\infty$时趋于同一个奇点，则称此轨线为同宿轨线；如果一条轨线当 $t\to+\infty$和 $t\to-\infty$时，趋于不同的奇点，则称此轨线为异宿轨线。

如果 $x=\varphi(t)$，$t\in R$ 是方程组(8.1.3)的一个解，而函数 $\varphi(t)$是周期函数即存在 $T\in R$，使对任意 t 有

$$\varphi(t-T) = \varphi(t)$$

则称 $x=\varphi(t)$为方程组(8.1.3)的一个周期解，称 T 为它的周期；不是平衡解的周期解所对应的轨线称为闭轨。

§8.2 连续动力系统的基本概念

动力系统理论研究随时间演化的系统的全局(大范围)定性行为。系统的状态在状态空间(相空间)中按照一定的规律演化,这个规律性往往可以用诸如微分方程、差分方程等去描述。动力系统可以分为两大类:连续的和离散的。本节介绍连续动力系统(即流)的概念。

考虑定义在区域 $D\subseteq R^n$ 上的自治系统

$$\dot{x}=f(x),x\in D,t\in R \tag{8.2.1}$$

即给定在 D 上的向量场 $f(x)$。设 $f(x)$ 在 D 上连续,且满足解的唯一性条件,又设每个解的存在区间都是 $(-\infty,+\infty)$。令自治系统(8.2.1)满足初始条件 $x(0)=x_0$ 的解为 $x=\varphi(t,x_0),t\in R,x_0\in D$。

如果把 x_0 换成变量 x,便得到一个依赖于 t 和 x 的函数 $\varphi(t,x)$,即得到映射 $\varphi:R\times D\to D$。若固定 x 而令 t 变化,$\varphi(t,x)$ 给出的相空间中系统(8.2.1)过点 x 的一条轨线;若 t 和 x 都变化,$\varphi(t,x)$ 便给出系统(8.2.1)过不同初值点 x 的轨线族。同时,$\varphi(t,x)$ 具有以下的性质:

(1) $\varphi(o,x)=x,\forall\ x\in D$;

(2) $\varphi(s,\varphi(t,x))=\varphi(s+t,x),\forall\ s,t\in R,x\in D$。

记 $\varphi_t(x)\equiv\varphi(t,x)$,于是对任何给定的 t,都可以得到一个映射 $\varphi_t:D\to D$,它有以下的性质:

(1′) $\varphi_0=I$;

(2′) $\varphi_s\varphi_t=\varphi_{s+t},\forall\ s,t\in R$。

我们称映射 $\{\varphi_t|t\in R\}$ 为系统(8.2.1)的流。

流 $\{\varphi_t|t\in R\}$ 是一个单参数变换群,参数 t 的取值范围是实数加群 $(R,+)$。事实上,在集合 $\{\varphi_t\}$ 中取映射的复合运算为"加法"运算,由性质(2′)知道,$\{\varphi_t\}$ 对这个加法是封闭的,且加法结合律成立。性质(1′)表明 φ_0 可作为单位元素。此外,由性质(1′)和(2′)有

$$\varphi_{-t}\varphi_t=\varphi_t\varphi_{-t}=\varphi_0,\forall\ t\in R$$

故每个 φ_t 都有逆元素 $\varphi_t^{-1}=\varphi_{-t}$。顺便指出,流也是一个交换群,这是因为由性质(2′)有

$$\varphi_s\varphi_t=\varphi_{s+t}=\varphi_{t+s}=\varphi_t\varphi_s\quad\forall\ s,t\in R$$

作为一个特殊例子,考虑线性自治系统

$$\dot{x}=Ax,x\in R^n$$

这个系统的流为

$$\varphi(t,x)=\varphi_t(x)=e^{At}x \tag{8.2.2}$$

即 $\varphi_t=e^{At}$。不过,对一般的非线性自治系统(8.2.1),通常不可能给出 φ_t 的解析表达式。

基于上述研究结果的启发,我们可以抛开微分方程,直接用映射去建立抽象的动力系统概念。

定义 1 设开集 $D\subseteq R^n$,$\varphi:R\times D\to D$ 是 C^0 映射(C^r 映射,$r\geqslant1$),且满足性质 1 和 2,记 $\varphi_t(x)\equiv\varphi(t,x)$,则对给定的 $t\in R$,$\varphi_t:D\to D$ 是一个 C^0 映射(C^r 映射),且满足(1′)和(2′)。我们称 φ 或 $\{\varphi_t|t\in R\}$ 为 D 上的 C^0 动力系统(C^r 动力系统)或 C^0 流(C^r 流)。

必须指出,在上述定义中,对给定的 t,φ_t 都有逆映射 $\varphi_t^{-1}=\varphi_{-t}$,后者也是 $C^0(C^r)$ 的,因此 φ_t 是一个同胚(C^r 微分同胚)。

接着我们讨论流和向量场的关系。首先,如果 $f(x)$ 是 D 上的 $C^0(C^r)$ 向量场,则 $\varphi(t,x)$ 对 (t,x) 是连续(r 阶连续可微)的,即 $f(x)$ 生成 $C^0(C^r)$ 流。其次,每个 $C^r(r\geqslant1)$ 流 φ 都对应一个

C^r 向量场，即对应一个以 $\varphi(t,x)$ 为解的自治系统。事实上，若取向量场

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}\varphi_t(x)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi_{\Delta t}(x)-\varphi_0(x)}{\Delta t}$$

则 $f(x)$ 是一个 C^r 向量函数，它给出一个自治系统

$$\dot{x}=f(x) \tag{8.2.3}$$

把 $\varphi_t(x)$ 分别代入上式两端，对左端有

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_t(x)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi_{t+\Delta t}(x)-\varphi_t(x)}{\Delta t}$$

对右端有

$$\begin{aligned}f(\varphi_t(x))&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi_{\Delta t}(\varphi_t(x))-\varphi_0(\varphi_t(x))}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi_{t+\Delta t}(x)-\varphi_t(x)}{\Delta t}\end{aligned}$$

故 $\varphi_t(x)$ 是这个自治系统的解。此外，它满足初始条件 $\varphi_t(x)|_{t=0}=x_0$。

对于固定的 $x\in D\subseteq R^n$，集合 $\{\varphi_t(x)|t\in R\}$ 称为流 φ_t 过点 x 的轨线。我们还可以给出流的一些相应概念。

定义 2 如果点 $p\in D$ 以任何 $t\in R$ 满足 $\varphi_t(p)=p$，则称 p 为流 φ_t 的平衡点（不动点）。对于流 φ_t 所对应的向量场 $f(x)$，显然有 $f(p)=0$，因此 p 也称为该向量场 $f(x)$ 的零点（奇点）。

定义 3 如果点 $q\in D$ 对某个 $T>0$ 满足 $\varphi_T(q)=q$，则称 q 为流 φ_t 的周期点。这种 T 值中的最小者称为最小正周期（今后都简称为周期）。流 φ_t 过周期点 q 的轨线称为流 φ_t 的闭轨（周期轨线）。

显然，在过周期点 q 的轨线上的任何一点都是周期点，且有同样的周期 T。事实上，对任何 $s\in R$ 取 $\bar{q}=\varphi_s(q)$，则

$$\begin{aligned}\varphi_T(\bar{q})&=\varphi_T(\varphi_s(q))=\varphi_{T+s}(q)=\varphi_{s+T}(q)\\&=\varphi_s(\varphi_T(q))=\varphi_s(q)=\bar{q}\end{aligned}$$

定义 4 如果点集 F 具有性质：

$$\varphi_t(x)\in F,\forall\ x\in F,t\in R \tag{8.2.4}$$

则称 F 为流 φ_t 的不变集。

显然，流 φ_t 的每条轨线都是它的一个不变集。下面介绍的非游荡集和极限集是更一般形式的不变集。此外，在以后各节中介绍的稳定流形、不稳定流形和中心流形也都是不变集。对不变集性质的研究是动力系统全局分析的一个重要内容。

我们已经看到，平衡点和闭轨在动力系统研究中是重要的，因为它们对应不变的或周期地重复的运动状态。它们都可以作为更广泛的回归运动的特例。回归运动是指那些能无限次地回复到初始状态附近的运动。为此引进非游荡点和非游荡集的概念去研究动力系统的长期性态。

定义 5 设对点 $p\in D$ 的任何邻域 U 和任意大的 $T>0$，存在 $t>T$，使得 $U\cap\varphi_t(U)\neq\varnothing$，其中 $\varphi_t(U)=\{x|x=\varphi_t(y),y\in U\}$，则称 p 为流 φ_t 的一个非游荡点。φ_t 的全体非游荡点的集合称为非游荡集，记作 $\Omega(\varphi)$。若 $q\in D\backslash\Omega(\varphi)$，则称 q 为流 φ 的一个游荡点。

由定义 5 可见，在非游荡点 p 的任何邻域 U 内总存在点 r（它可以是点 p 本身），使得当 $t\to+\infty$ 时，轨线 $\varphi_t(r)$ 返回此邻域 U 无限多次。易证流 φ_t 的全体非游荡点的集合 $\Omega(\varphi)$ 是一个闭的不变集。此外，流 φ_t 的平衡点和闭轨都属于 $\Omega(\varphi)$。

定义 6 在过点 x 的轨线 γ 上，如果存在点列 $\varphi_{t_1}(x),\varphi_{t_2}(x),\cdots$，使得当 $i\to\infty$ 时，$t_i\to+\infty$（或 $-\infty$）且 $\varphi_{t_i}(x)\to p$，则称点 p 为过点 x 的轨线 γ 的一个 ω 极限点（或 α 极限点），记为 $\omega(x)$（或 $\alpha(x)$），也记为 ω_γ（或 α_γ）。

容易证明

$$\omega(x)=\bigcap_{\tau\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant\tau}\varphi_t(x)} \tag{8.2.5}$$

$$\alpha(x)=\bigcap_{\tau\leqslant 0}\overline{\bigcup_{t\leqslant\tau}\varphi_t(x)} \tag{8.2.6}$$

显然，平衡点或闭轨的 ω 极限集（α 极限集）就是它们本身。此外，ω 极限集和 α 极限集都属于非游荡集 $\Omega(\varphi)$。

可以证明，$\omega(x_0)$（或 $\alpha(x_0)$）是不变集，如果正半轨线 γ^+ 是有界（或负半轨线 γ^- 有界的）的，则 $\omega(x_0)$（或 $\alpha(x_0)$）是紧集。

定义 7 设 F 是一个不变集，如果对 F 的每个 ε 邻域 $U_\varepsilon=\{x|\mathrm{d}(x,F)<\varepsilon\}$，存在 F 的一个 δ 领域 U_δ，使得对任何 $p\in U_\delta$，有 $\varphi_t(p)\in U_\varepsilon(t\geqslant 0)$，则称 F 是稳定的。如果 F 稳定并存在 $\alpha>0$，使得对任何 $q\in U_\alpha$，当 $t\to+\infty$ 时 $\mathrm{d}(\varphi_t(q),F)\to 0$，则称 F 是渐近稳定的。

定义 8 设 A 是一个闭的不变集，且是渐近稳定的，则称 A 为吸引集。集合

$$B=\{x|\lim_{t\to-\infty}d(\varphi_t(x),A)=0\}$$

称为 A 的吸引域。将 t 换为 $-t$，我们可以类似地给出排斥集及其排斥域的定义。如果在吸引集（或排斥集）中包含一条稠密的轨线，则称吸引子（或排斥子），点吸引子也称为汇，点排斥子也称为源。

吸引子可以分成两大类：一类称为普通吸引子，如平衡点吸引子（即汇）、周期吸引子、环面吸引子等；另一类是在浑沌运动中出现的奇怪吸引子。

下面举几个典型的动力系统例子去说明上述概念。

例 1 简谐振子方程 $\ddot{x}+k^2x=0,\ x\in R$。

事实上，简谐振子方程等价于 R^2 上的一阶自治系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-k^2x\end{cases}\qquad (x,y)\in R^2$$

我们容易求出流 $\varphi:R\times R^2\to R^2$ 的表达式

$$\varphi(t,x,y)=(x\cos kt+k^{-1}y\sin kt,\ -kx\sin kt+y\cos kt)^T$$

$(0,0)$ 是唯一的平衡点——中心，过 $(x,y)\neq(0,0)$ 的轨线是椭圆 $k^2x^2+y^2=c$，c 为正常数，因此任何非平衡点都是周期点。于是任何 $(x,y)\in R^2$ 都是非游荡点，即 $\Omega(\varphi)=R^2$，此系统无吸引集或排斥集。

例 2 具有阻尼的谐振子方程 $\ddot{x}+\beta\dot{x}+k^2x=0,x\in R$，常数 $\beta>0$。

显然，上述方程等价于 R^2 上的一阶自治系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-k^2x-\beta y\end{cases}\qquad (x,y)\in R^2$$

无需求出流的表达式，我们可以根据定性分析的结果知道，原点是唯一的平衡点，且一切轨线当 $t\to+\infty$ 时都趋于原点，不存在闭轨。因此对于任何 $(x,y)\in R^2$，$\omega(x,y)=(0,0)$；除了 $\alpha(0,0)=\{(0,0)\}$ 之外，对于任何 $(x,y)\neq(0,0)$，有 $\alpha(x,y)\neq\varnothing$。容易见到，$(0,0)$ 是唯一的非游荡点，且是唯一的吸引子。

例 3 Van det Pol 振子方程 $\ddot{x}+\mu(x^2-1)\dot{x}+x=0,x\in R$，常数 $\mu>0$。

Van det Pol 振子方程等价于 R^2 上的一阶自治系统

$$\begin{cases}\dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \mu(1-x^2)y\end{cases} \qquad (x,y) \in R^2$$

显然，原点是不稳定的平衡点，此系统还有唯一的稳定极限环 Γ。原点是它本身的 ω 极限点和 α 极限点。对于 $(x,y)\neq(0,0)$，$\omega(x,y)$ 就是极限环 Γ，$\alpha(x,y)=\varnothing$，此外，$\Omega(\varphi)=\Gamma\cup\{(0,0)\}$，$\Gamma$ 是吸引子，$(0,0)$ 是排斥点。

例 4　梯度系统

考虑开集 $U\subseteq R^n$。设函数 $V\in C^2(U,R)$（即 $V:U\to R$ 有二阶连续偏导数），则 V 的梯度向量场为

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^T$$

由这个梯度向量场给出的自治系统

$$\dot{x} = -\nabla V, x \in R^n \tag{8.2.7}$$

称为梯度系统。如果在点 x 处有 $\nabla V(x)\neq 0$，则称为 V 的正则点，否则称为 V 的临界点。显然 $\bar{x}$ 为梯度系统的(8.2.7)的平衡点的必要且充分条件是 $\bar{x}$ 为函数 V 的临界点。容易证明，当 $\bar{x}$ 是 $V(x)$ 的孤立极小（或极大）点时，点 $\bar{x}$ 是渐近稳定（或不稳定）的平衡点。

梯度系统的非游荡集仅由平衡点组成。事实上，如果 p 不是平衡点，令 $x=\varphi_t(p)$ 为过点 p 的轨线，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\varphi_t(p)) &= \nabla V(\varphi_t(p)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t(p) = < \nabla V(\varphi_t(p)),\ -\nabla(\varphi_t(p)) > \\ &= -\|\nabla V(\varphi_t(p))\|^2 < 0\end{aligned}$$

这表明函数 V 沿轨线 $x=\varphi_t(p)$ 严格单调减少。由 V 的连续性可知，存在点 p 的某个邻域 U，使得从 U 中出发的轨线不会再次返回，从而 p 必为游荡点。

由于闭轨、ω 极限集或 α 极限集等都是属于非游荡集，因此由上述结果得知，梯度系统不存在闭轨，且 ω 极限集和 α 极限集都由平衡点组成，梯度系统的非游荡集有较简单的构造，从而这些系统的定性行为也较容易分析。

例 5　Hamilton 系统为

$$\begin{cases}\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i},\end{cases} \qquad i = 1,\cdots,n \tag{8.2.8}$$

其中 $H=H(p,q)$ 是 Hamilton 函数。可以证明，Hamilton 系统不存在吸引集或排斥集。此外，Halmiltion 系统的非游荡集不仅可以包含平衡点和闭轨，而且可以包含连结鞍点的同宿轨线或异宿轨线。我们以 Duffing 方程

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = 0, x \in R$$

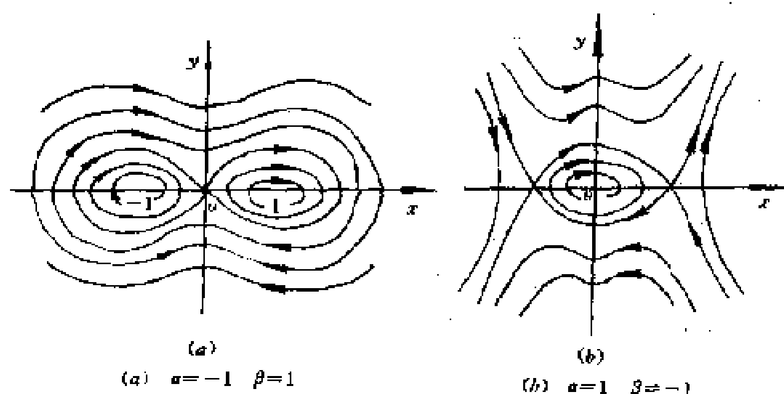
说明之。它等价于 R^2 上的一阶自治系统

$$\begin{cases}\dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha x - \beta x^3\end{cases} \qquad (x,y) \in R^2$$

在图 8.1(a)和(b)上分别给出当 $\alpha=-1,\beta=1$ 和 $\alpha=1,\beta=-1$ 时的相图。除了平衡点和闭轨都属于非游荡集之外，在图 8.1(a)上的同宿轨线和图 8.1(b)上的异宿轨线也属于非游荡集。

因为在它们内部的足够小邻域中，都有闭轨经过。

最后指出，本章只讨论在 R^n 的开子集 D 上定义的连续或离散动力系统的一些基本概念，而许多理论和应用问题需要解决流形（如球面、环面等各种曲面）上的微分方程、差分方程等，因此把动力系统的理论推广到流形上是很自然和必要的，流形（特别是微分流形）上的动力系统[●] 的研究有着极其复杂和丰富的内容，并取得了重大的进展。由于篇幅和预备知识的限制，我们不打算讨论流形上的动力系统，但是本章的许多概念不难推广到流形上的动力系统中去，有兴趣的读者可参看参考文献[9]。



(a) $\alpha=-1$ $\beta=1$　　(b) $\alpha=1$ $\beta=-1$

图 8.1

§8.3 Poincaré—Bendixson 定理

本节讨论平面动力系统的极限集的重要性质，即 Poincaré—Bendixson 定理，并讨论它在极限环研究中的应用。

考虑平面自治系统

$$\dot{x}=f(x),x\in R^2 \tag{8.3.1}$$

其中 $f: R^2\to R^2$ 连续，且满足解的唯一性条件，并设每个解的存在区间都是$(-\infty,+\infty)$，记 $\varphi_t(x)$为系统(8.3.1)的流，即(8.3.1)在 R^2 上定义了一个动力系统，我们先介绍平面曲线的一个重要性质。

定理 1(Jordan 曲线定理)　在 R^2 上的任何 Jordan 闭曲线[●] J 把 R^2 分成两部分 P_i 和 P_e，即 $R^2\backslash J=P_i\cup P_e$，其中 P_i 和 P_e 是不相交的开集，P_i 是有界集，称为 J 的内域；P_e 是无界集，称为 J 的外域。那么，P_i(或 P_e)中的任何两点都可以用完全在 P_i(或 P_e)中的连续曲线连结。

我们略去这个定理的证明，本节的定理基本上是由解的存在唯一性和 Jordan 曲线定理推得的。与高维动力系统相比，平面动力系统的理论要完善和丰富得多，其中一个主要的原因就是平面曲线满足 Jordan 定理这个简单的几何事实。应当指出，由于 Jordan 曲线定理的限制，本节的结果(除引理 1 外)一般对 R^2 成立，不能推广到 $R^n(n\geqslant3)$。

然后介绍平面动力系统的一个十分重要的结果，即 Poincaré-Bendixson 定理。粗略地说，这个定理表明，如果平面动力系统的某条轨线当 $t\to+\infty$(或$-\infty$)时始终在某个有界区域内，则或者它是一条闭轨，或者当 $t\to+\infty$(或$-\infty$)时它盘旋趋近某条闭轨，我们着重介绍 $t\to+\infty$时的结果，对 $t\to-\infty$时可类似地讨论。

我们已经给出了平面系统的截线(无切线段)的概念。我们知道，对向量场 $f(x)$的常点 ξ 和任何不与 $f(\xi)$平行的向量 η，都可以作过点 ξ 并沿方向 η 的截线 L。此外，所有与截线 L 相交的轨线当 t 增加时都由同一侧向另一侧穿过 L。为讨论轨线的性质，以下给出四个引理，均

● 通常把定义在微分流形上的动力系统称为微分动力系统。

● Jordan 闭曲线就是简单连续曲线，更精确地说，它是圆的同胚像。

略去证明。

引理 1 如果 ξ_0 是截线 L 的一个内点，则对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得在 $t=0$ 时从圆域 $B(\xi_0,\delta)$ 内的任何点出发的轨线都在 $t\in(-\varepsilon,+\varepsilon)$ 的时间范围内穿过 L（图 8.2）。

下面的结果表明平面动力系统的轨线与截线的交点序列的单调性。

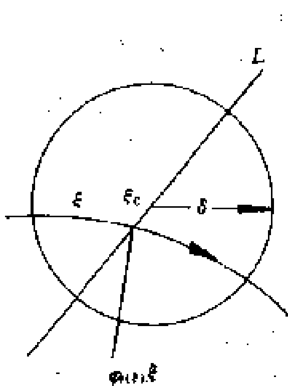


图 8.2

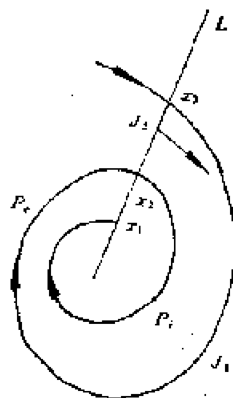


图 8.3

引理 2 设 L 为平面向量场 $f(x)$ 的截线，$\gamma=\{\varphi_t(\xi)\,|\,t\in R\}$ 是过点 ξ 的轨线，并设 γ 与 L 有交点 $x_1,x_2,\cdots$，此点列沿轨线 γ（即对 t）是单调的，其中至少两点不相同，则此点列中的各点互不相同，且在 L 上也是单调的，即在 L 上，x_{k+1} 必位于 x_k 和 x_{k-2} 之间。此外，如果 γ 是闭轨，则 γ 与 L 仅有一个交点。

下面再给出平面动力系统的极限集与截线的关系。

引理 3 设 L 是平面向量场 $f(x)$ 的一条截线，则轨线 $\gamma=\{\varphi(\xi)\,|\,t\in R\}$ 的 ω 极限集 $\omega(\xi)$ 与 L 不多于一个交点，对于 γ 的 α 极限集 $\alpha(\xi)$ 也有类似的结论。

引理 4 设平面自治系统(8.3.1)的轨线 $\gamma=\{\varphi_t(\xi)\,|\,t\in R\}$ 上没有平衡点。

(1)如果 γ 的 ω 极限集 $\omega(\xi)$ 与轨线 γ 相交，则 γ 是一条闭轨。

(2)如果正半轨 γ^+ 有界，且 $\omega(\xi)$ 包含一条闭轨 Γ，则 $\omega(\xi)=\Gamma$。

对于 γ 的 α 极限集 $\alpha(\xi)$ 也有类似的结论。

利用上述引理，我们可以得到本节的主要结果。

定理 2(Poincaré—Bendixson 定理) 设平面系统(8.3.1)的轨线 $\gamma=\{\varphi_t(\xi)\,|\,t\in R\}$，其正半轨线 γ^+ 有界且 $\omega(\xi)$ 不包含平衡点，则轨线 γ 只可能属于下面两种情形之一。

(1)γ 本身是闭轨，此时 $\omega(\xi)=\gamma$；

(2)γ 本身不是闭轨，但 $\omega(\xi)=\overline{\gamma}^+\backslash\gamma^+$ 是闭轨，其中 $\overline{\gamma}^+$ 是 γ^+ 的闭包。

对于负半轨线 γ^- 和 α 极限集 $\alpha(\xi)$ 也有类似的结论。

证明 如果 γ 是闭轨，则显然有 $\omega(\xi)=\gamma$。下面考虑 γ 不是闭轨的情形。因为 γ^+ 是有界的，且 $\omega(\xi)$ 是非空、不变的有界闭集，所以存在有界轨线 $\Gamma\subset\omega(\xi)$。设在 $t=0$ 时，轨线 Γ 经过点 η，则 $\Gamma=\{\varphi_t(\eta)\,|\,t\in R\}$。由于轨线 Γ 是有界的，故其 ω 极限集 $\omega(\eta)$ 非空。再考虑到 $\omega(\xi)$ 是闭集，且 $\Gamma\subset\omega(\xi)$，因此 $\omega(\eta)\subset\omega(\xi)$。

我们要证明 Γ 是一条闭轨，为此任取一点 $\zeta\in\omega(\eta)$，因为 $\omega(\xi)$ 中不含平衡点，所以 ζ 是常点。作过 ζ 的截线 L，则 $\zeta\in\omega(\eta)\cap L$。类似引理 3 的证明，可知存在点列 $\{\zeta_k\}$，$\zeta_k\in\Gamma\cap L$，$k=1,2,\cdots$，且当 $k\to\infty$ 时，$\zeta_k\to\zeta$。由于 $\Gamma\subset\omega(\xi)$，故 $\zeta_k\in\omega(\xi)\cap L$，$k=1,2,\cdots$。但从引理 3 知道，这些 ζ_k 是同一个点。再由 $\lim\limits_{k\to\infty}\zeta_k=\zeta$，可知 $\zeta_k=\zeta$，$k=1,2,\cdots$。这表明 $\zeta\in\Gamma$。此外，前面假设 ζ 也属于 Γ 的 ω 极限集 $\omega(\eta)$，因此由引理 4 之(1)可知 Γ 是一条闭轨。

最后考虑到 $\Gamma\subset\omega(\xi)$，于是再由引理 4 之(2)得知 $\omega(\xi)=\Gamma$，即 $\omega(\xi)$ 是一条闭轨。

必须指出，由于 Poincaré—Bendixson 定理的证明过程中用到了 Jordan 曲线定理，因此这不能推广到 $R^n(n\geqslant 3)$。

例 考虑在 R^3 中以球坐标形式给出的系统

$$\dot\theta=1,\dot\varphi=\pi,\dot\rho=\rho(\sin\theta+\pi\sin\varphi)$$

这个系统满足初始条件

$$\theta(0)=\varphi(0)=0,\rho(0)=1$$

的解为

$$\theta(t)=t,\varphi(t)=\pi t,\rho(t)=\exp(-\cos t-\cos\pi t)$$

易见这个解在 R^3 中是有界的，但它不是周期解，也不趋于周期解。

下面的定理给出平面有界轨线的极限集的结构。

定理 3 设系统(8.3.1)至多有有限个平衡点．如果 γ^+ 是式(8.3.1)的一条有界正半轨线，则轨线 γ 的 ω 极限集 $\omega(\xi)$ 必属于下面三种情形之一：

(1) $\omega(\xi)$ 是一个平衡点；

(2) $\omega(\xi)$ 是一条闭轨；

(3) $\omega(\xi)$ 是由有限个平衡点和一些非闭轨线组成，这些非闭轨线当 $t\to+\infty$ 和 $t\to-\infty$ 时，各自分别趋于上述平衡点之一。

对于负半轨线 γ^- 和 α 极限集 $\alpha(\xi)$ 也有类似的结论。

证明 在本定理的假设下，$\omega(\xi)$ 至多包含有限个孤立平衡点。此外，$\omega(\xi)$ 是非空、连通、不变的有界闭集。

如果 $\omega(\xi)$ 不含常点，只含平衡点，则由连通性得知 $\omega(\xi)$ 只能有一个平衡点，这是本定理的情形(1)。

再考虑 $\omega(\xi)$ 包含常点的情形。如果 $\omega(\xi)$ 包含一条闭轨 Γ，则由引理 4 之(2)可知 $\omega(\xi)=\Gamma$，即此时 $\omega(\xi)$ 是一条闭轨，这是本定理的情形(2)；如果 $\omega(\xi)$ 不含闭轨，考虑到 $\omega(\xi)$ 是有界不变集且含有常点，则 $\omega(\xi)$ 应当包含一些(或一条)有界非闭轨线，今取这些有界非闭轨线之一，记为 C。现证明 C 的 ω 极限集 ω_c 只有平衡点。用反证法，如果 C 的 ω 有限集 ω_c 有常点 ζ，则类似 Poincaré—Bendixson 定理中的证明，得知 C 是一条闭轨。因为 $C\subset\omega(\xi)$，所以与前面关于 $\omega(\xi)$ 不包含闭轨的假设矛盾。再利用本定理证明中已得的结果可知，ω_c 是一个平衡点。同样可知 C 的 α 极限集 α_c 也是一个平衡点。由于 $\omega(\xi)$ 是闭集，且 $C\subset\omega(\xi)$，故 $\omega_c\subset\omega(\xi)$，$\alpha_c\subset\omega(\xi)$，即这些非闭轨线的 ω 极限点和 α 极限点也属于 $\omega(\xi)$，这便是本定理的情形(3)。[1]、[2]

下面给出在定理 3 情形(2)中的轨线与它的极限闭轨的关系。

推论 1 如果闭轨 Γ 是非闭轨线 γ 的 ω 极限集，则 γ 所在一侧 Γ 的某个邻域内的任何轨线当 $t\to+\infty$ 时都盘旋地趋于 Γ，即 Γ 是单侧稳定极限环。对于 γ 的 α 极限集也有相应的结论。

证明 先证明 γ 当 $t\to+\infty$ 时盘旋地趋于 Γ。任取一点 $\eta\in\Gamma$，由于 η 是常点，故可以过点 η 作截线 L，即 $\eta\in\Gamma\cap L$。由引理 3 的证明得知，这时存在 γ 与 L 的一列交点 $\{\eta_k\}$，$k=1,2,\cdots$，它们沿轨线 γ 是单调的，且当 $k\to\infty$ 时，$\eta_k\to\eta$。由于 γ 的非闭轨线，用反证法易证 $\{\eta_k\}$ 中至少有两点不相同。于是由引理 2 知道，点列 $\{\eta_k\}$ 在截线 L 上也是单调的，由此可见轨线 γ 当 $t\to+\infty$ 时盘旋地趋于闭轨 Γ(图 8.4)。

现在证明本推论的结果。过点 $\eta\in\Gamma$ 作截线 L。设 η_k,η_{k+1} 为 γ 与 L 的两个相继的交点。取由 L 上点 η_k 与 η_{k+1} 之间的线段、γ 上点 η_k 与 η_{k+1} 之间的弧段和闭轨 Γ 一起围成的区域 D(图

---

[1] 由若干平衡点和两端都趋于平衡点的轨线一起构成的简单闭曲线称为奇闭轨线。其中，如果一条轨线 C 当 $t\to+\infty$ 和 $t\to-\infty$ 时都趋于同一个平衡点 P(即 C 是一条同宿轨线)，就称闭曲线 $C\cup\{p\}$ 为同宿环。如果奇闭轨线是由一组首尾相接的异缩轨线以及它们的 ω 极限点和 α 极限点一起构成的闭曲线，就称它为异宿环，在奇闭轨线上的平衡点，如果是双曲型平衡点的话，则它必定是鞍点。

[2] 可以证明，平面动力系统(8.3.1)的非游荡集亦只能取定理 3 所示的三种形式：平衡点、闭轨、同宿环或异宿环。

8.5)。因为Γ上的点都是常点，且常点的集合是开集，所以，当k取得充分大时，可以使域D内

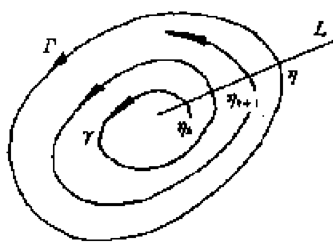
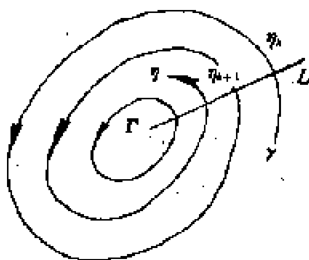



图 8.4

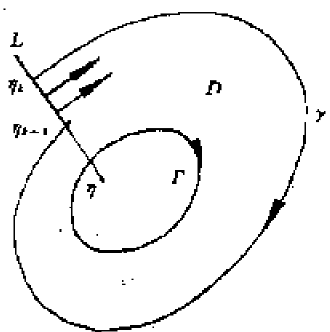


图 8.5

没有平衡点。此外，易知D是一个正不变集。因此，从任何$\xi\in D$出发的正半轨线有界，且其ω极限集$\omega(\xi)$不包含平衡点，因为当$t\to+\infty$时，轨线γ趋于Γ，所以D内没有闭轨。由 Poincaré－Bendixson 定理得知，上述轨线都不是闭轨，但$\omega(\xi)$是闭轨，于是只有$\omega(\xi)=\Gamma$，且上述轨线都盘旋地趋于Γ[如果非闭轨线γ以奇闭轨线为ω(或α)极限集时，亦有类似的结论(图 8.6)]。

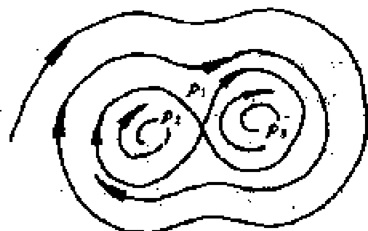


图 8.6

推论 2 如果两条轨线Γ_1和Γ_2围成环形区域D，在D内部无平衡点和其他闭轨，则或者内环的外侧是稳定的，而外环的内侧是不稳定的，或者有相反的结果。

证明 由假设及解的唯一性可知，没有轨线穿越Γ_1或Γ_2，因此D是一个有界不变集。

任取点$\xi\in D$，则对一切$t\in R$有$\varphi_t(\xi)\in D$，故过点ξ的轨线γ是有界的，又D内不包含平衡点，由 Poincaré－Bendixson 定理知道，γ的ω极限集$\omega(\xi)$和α极限集$\alpha(\xi)$都是闭轨。由于D内无其他闭轨，于是$\omega(\xi)$和$\alpha(\xi)$只能分别为Γ_1和Γ_2。又由推论 1 知道这两个单侧极限环的稳定性的相应结论。

利用 Poincaré－Bendixson 定理和推论 1，不难证明 Poincaré 环域定理。

定理 4(Poincaré 环域定理) 设G是内外边界线Γ_1和Γ_2围成的环形区域，当t增加时系统式(8.3.1)的轨线在Γ_1和Γ_2上都是由外向内(或由内向外)，且在G内没有奇点，则在G内至少存在一个外侧稳定(或不稳定)极限环和一个内侧稳定(或不稳定)极限环。

证明 设G是由内、外边界曲线Γ_1和Γ_2围成的环形区域，且平面自治系统式(8.3.1)的轨线在Γ_1和Γ_2上当t增加时都是由外向内，在G内无平衡点。易见G是一个有界正不变集。现在取一条经过Γ_1进入G的轨线γ_1(图 8.7)。当γ_1在t增加时，一当进入域G，就永远留在G内，故它是正向有界的。由 Poincaré－Bendixson 定理，并考虑γ_1不会是闭轨(否则γ_1就会由内向外穿过Γ_1，这与假设矛盾)，故γ_1的ω极限集是一条闭轨$C_1\subset G$。由推论 1 知道C_1是内侧稳定的极限环。同理可证存在一个外侧稳定极限环$C_2\subset G$。由于环域G内没有平衡点，因此C_1和C_2的内部区

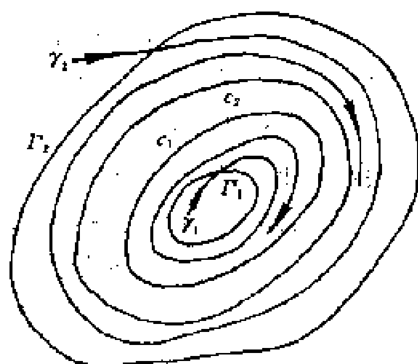


图 8.7

域都不可能完全属于G,从而C_1和C_2都包含内边界曲线Γ_1在其内部。[●]

§8.4 向量场和微分同胚的局部性质

一、线性流的不变子空间

考虑n维线性系统

$$\dot{x} = Ax, x \in R^n \tag{8.4.1}$$

其中A为$n\times n$常值矩阵,由式(8.2.2)知道,这个系统的流为$\varphi_t=e^{At}:R^n\to R^n$,称为线性流。

对R^n作直和分解

$$R^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$$

其中E^s,E^u和E^c分别为矩阵A的具有负实部、正实部和零实部的特征值对应的不变子空间,它们的维数分别是n_s,n_u和n_c,$n_s+n_u+n_c=n$。矩阵A的具有负实部、正实部和零实部的特征值对应线性无关特征向量和广义特征向量分别记为$\{v_1,\cdots,v_{n_s}\}$、$\{u_1,\cdots,u_{n_u}\}$和$\{w_1,\cdots,w_{n_c}\}$。于是上述不变子空间分别为

$$E^s = \mathrm{span}\{v_1,\cdots,v_{n_s}\}$$

$$E^u = \mathrm{span}\{u_1,\cdots,u_{n_u}\}$$

$$E^c = \mathrm{span}\{w_1,\cdots,w_{n_c}\}$$

当矩阵A有复共轭特征值时,就有复共轭特征向量和广义特征向量,这时我们可以用它们的实部和虚部代替。

定理1 (1)E^s,E^u和E^c都是线性流e^{At}的不变子空间。

(2)设$\lambda_1,\cdots,\lambda_{n_s}$为矩阵$A$的有负实部的特征值,$\mathrm{Re}\lambda_i<-\alpha(i=1,2,\cdots,n_s)$,$\alpha>0$,则对于任何$x_0\in E^s$,存在$k_1>0$,使得

$$\| e^{At}x_0 \| < k_1e^{-\alpha t} \| x_0 \|, t \in R$$

(3)设$\mu_1,\cdots,\mu_{n_u}$为矩阵A的有正实部的特征值,$\mathrm{Re}\mu_i>\beta(i=1,2,\cdots,n_u)$,$\beta>0$,则对于任何$x_0\in E^u$,存在$k_2>0$,使得

$$\| e^{At}x_0 \| > k_2e^{\beta t} \| x_0 \|, t \in R$$

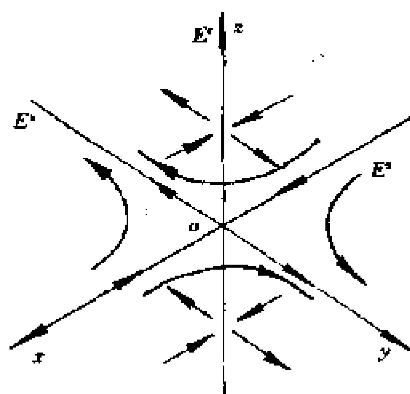


图8.8

由上述定理可知,从子空间E^s(或E^u,E^c)中任一点出发的轨线始终在该子空间内。此外,在E^s上的轨线当t增加时按指数规律单调地或振荡地趋于平衡点O,而在E^u上的轨线当t增加时按指数规律单调地或振荡地远离平衡点O,而在E^c上的轨线,当t增加时或者保持有界或者按幂规律远离平衡点O。因此我们把E^s,E^u和E^c分别称为线性流e^{At}的稳定子空间、不稳定子空间和中心子空间。在图8.8上给出了当

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

● 由推论2可知,如果在Poincaré环域定理的环域中有双侧极限环的话,则其中至少有一个是稳定(不稳定)极限环。

时的图形。这些不变子空间不仅使我们清楚地得知线性系统的平衡点附近的轨线情况，而且有助于了解它在 R^n 中轨线的全局性态。

定义 1 如果矩阵 A 的一切特征值都有非零实部，则称原点 O 为线性系统式(8.4.1)的双曲平衡点，并称 e^{At} 为线性双曲流。

显然，双曲平衡点是系统(8.4.1)的唯一的平衡点，不存在中心子空间，双曲平衡点可分为三种类型(图 8.9)。

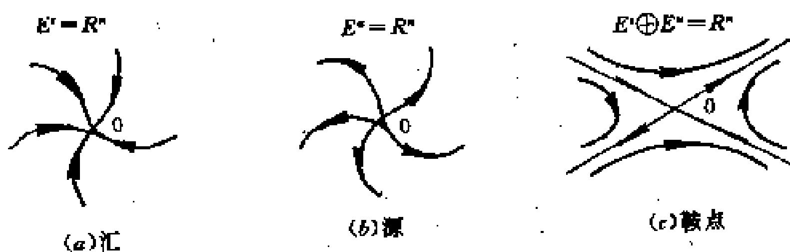


图 8.9

(1)如果 A 的一切特征值都有负实部，则原点 O 是一个平衡点吸引子（汇），这时称 e^{At} 为收缩流。

(2)如果 A 的一切特征值都有正实部，则原点 O 是一个平衡点排斥子(源)。这时称 e^{At} 为扩张流。

(3)如果 A 既有负实部的特征值，也有正实部的特征值，则原点 O 是鞍点。

二、线性化流

现在考虑 n 维非线性系统

$$\dot{x} = f(x), x \in R^n \tag{8.4.2}$$

设原点 O 是一个孤立平衡点，即 $f(0)=0$。设 $f(x)$ 是 C^r 向量场($r\geqslant 1$)，则式(8.4.2)在点 O 处的线性近似系统为

$$\dot{x} = Df(0)x, x \in R^n \tag{8.4.3}$$

上式的右端称为向量场 $f(x)$ 关于点 O 的线性化向量场，它生成线性近似系统式(8.4.3)的流 $e^{Df(0)t}$。后者满足下面的矩阵方程的初值问题

$$\dot{Y} = Df(0)Y; Y(0) = I \tag{8.4.4}$$

另一方面，设 $f(x)$ 生成非线性系统式(8.4.2)的流 φ_t，则有

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x) = f(\varphi_t(x))$$

把上式对 x 微分后，交换对 x 和 t 的微分次序，再利用导算子的链式法则便得到

$$\frac{\partial}{\partial t}D\varphi_t(x) = Df(\varphi_t(x)) \cdot D\varphi_t(x) \tag{8.4.5}$$

取 $x=0$，考虑到 $\varphi_t(0)=0$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D\varphi_t(0) = Df(0) \circ D\varphi_t(0)$$

此外，由于对一切 $x\in R^n$ 有 $\varphi_t(x)|_{t=0}=x$，故

$$D\varphi_t(0)|_{t=0} = I \tag{8.4.6}$$

$D\varphi_t(0)$ 称为流 φ_t 关于点的线性化流。由式(8.4.5)和式(8.4.6)知道，$D\varphi_t(0)$ 满足初值问题式(8.4.4)，根据解的唯一性，便有

$$D\varphi_t(0) = e^{Df(0)t} \tag{8.4.7}$$

这说明线性化流就是线性化向量场生成的流。因此向量场的线性化与流的线性化实际上

是一致的。

三、Hartman－Grobman 定理

我们关心的问题是流φ_t关于平衡点的线性化能否反映φ_t在平衡点附近的局部性态。在第六章(如中心和焦点判定问题)的讨论中,我们已经知道非线性系统与其线性近似系统在平衡点附近不一定有相同的拓扑结构,但是对于双曲平衡点,上述问题有肯定的结果。

定义 2 设$\bar{x}$是系统(8.4.2)的一个孤立平衡点,$Df(\bar{x})$的一切特征值都有非零实部,则称$\bar{x}$是系统(8.4.2)的双曲线平衡点。

为了研究两个动力系统是否有相同的拓扑结构,我们引进向量场的拓扑等价性概念。

设$f(x)$和$g(y)$是分别定义在$U,V\subseteq R^n$上的C^r向量场$(r\geqslant 1)$,它们分别生成流$\varphi_{t,f}:U\to U$和$\varphi_{t,g}:V\to V$。

定义 3 如果存在一个同胚$h:U\to V$,使得对任何$x\in U,t_1\in R$,存在$t_2\in R$,使得[1]

$$h\circ\varphi_{t_1,f}(x)=\varphi_{t_2,g}\circ h(x) \tag{8.4.8}$$

即

$$\varphi_{t_1,f}=h^{-1}\circ\varphi_{t_2,g}\circ h \tag{8.4.9}$$

则称向量场$f(x)$和$g(x)$是拓扑等价的,记作$f\sim g$。如果h是$C^k(k\geqslant 1)$微分同胚,则称$f(x)$和$g(x)$是C^k等价的。

易证拓扑等价(C^k等价)是一种等价关系,并可用下面的交换图说明:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi_{t_1,f}} & U \\ h\Big\downarrow\Big\uparrow h^{-1} & & h\Big\downarrow\Big\uparrow h^{-1} \\ V & \xrightarrow{\varphi_{t_2,g}} & V \end{array}$$

由定义 3 可知,同胚把系统$\dot{x}=f(x)$的过$x\in U$的轨线变成系统$\dot{y}=g(y)$的过$y=h(x)\in V$的轨线,并保持时间定向;也就是说,拓扑等价的向量场对应的系统相图有相同的拓扑结构。对于动力系统的定性研究来说,拓扑等价的向量场可以认为是“一样”的。在讨论结构稳定性时,拓扑等价的概念尤为重要。

如果向量场f和g的拓朴等价只是在对应的平衡点的邻域内成立,则称f和g在此平衡点是局部拓扑等价的。此时两系统在对应的平衡点领域内的轨线有相同的拓扑结构。关于局部拓扑等价性的严格定义需要用到“芽”(germ)的概念,读者可参看[13]。

作为例子,我们在有关部分已经讨论,在常点附近的向量场是与平直流的向量场局部拓扑等价的(直化定理),我们已经知道,在鞍点、焦点、结点等双曲平衡点附近,平面向量场与其线性化向量场是局部拓扑等价的,作为一般性的结果,有以下的定理。

定理 2(Hartman－Grobman 定理) 设点O是系统(8.4.2)的一个双曲平衡点,则系统的向量场$f(x)$与其线性化向量场$Df(0)x$在点O的某邻域Ω内是拓扑等价的。

证明略。

定理 2 的含义可用图 8.10 说明。以下对定理 2 再作两点注示。首先,定理 2 中关于双曲性的条件是重要的,如在中心和焦点判定问题中,非线性系统的平衡点不是双曲的,这时非线性流与线性化流在平衡点的邻域内不一定有相同的拓扑结构。其次,如果非线性流与线性化流

---

[1] 这里不必要求$t_2=t_1$,但要求它们有相同的定向。

之间由 C^k 微分同胚 $h(k\geqslant 2)$ 来联系，这是向量场的 C^k 等价性问题，由 Sternberg 定理知道，当 $Df(0)$ 的特征值满足所谓"非共振条件"时，则 $f(x)$ 与 $Df(0)x$ 是局部 C^k 等价的。

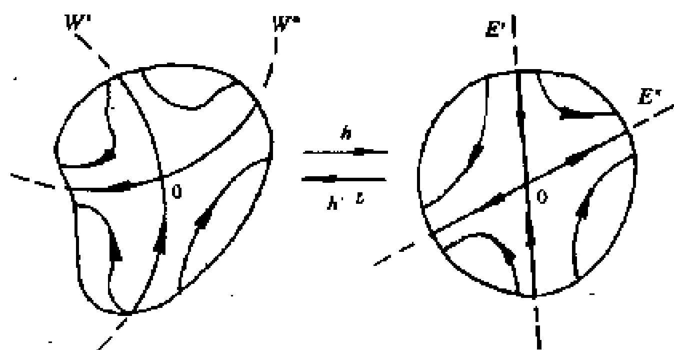


图 8.10

四、稳定流形和不稳定流形

双曲平衡点的另一重要性质就是稳定流形定理，在此仅讨论 R^n 中流形的一般问题。

设点 $\bar{x}$ 是系统式(8.4.2)的孤立平衡点，U 是点 $\bar{x}$ 的某个邻域，我们定义下面的点集：

$W^s_{loc}(\bar{x})\triangleq\{x\in U\mid$ 对一切 $t\geqslant 0$ 有 $\varphi_t(x)\in U$，且当 $t\to+\infty$ 时，$\varphi_t(x)\to\bar{x}\}$ 和 $W^u_{loc}(\bar{x})\triangleq\{x\in U\mid$ 对一切 $t\leqslant 0$ 有 $\varphi_t(x)\in U$，且当 $t\to-\infty$ 时，$\varphi_t(x)\to\bar{x}\}$，通常把 $W_{loc}(\bar{x})$ 分别称为平衡点 $\bar{x}$ 的局部稳定流形和局部不稳定流形。

下面的定理给出了当 $\bar{x}$ 是双曲平衡点时 $W^s_{loc}(\bar{x})$ 和 $W^u_{loc}(\bar{x})$ 的性质。不失一般性，在定理中可取 $\bar{x}=0$。

定理 3(稳定流形定理) 设点 O 是系统式(8.4.2)的一个双曲平衡点，E^s 为线性近似系统(8.4.3)的稳定子空间，$\dim E^s=n_s$，并设 $f(x)$ 是 $C^r(r\geqslant 1)$ 向量场，则 $W^s_{loc}(0)$ 是 n_s 维 C^r 微分流形，且在点 o 处与 E^s 相切。此外，对于 $W^u_{loc}(0)$ 也有同样的结论（只需将上面的 E^s，$W^s_{loc}(0)$ 和 n_s 分别改为 E^u，$W^u_{loc}(0)$ 和 n_u 即可）。

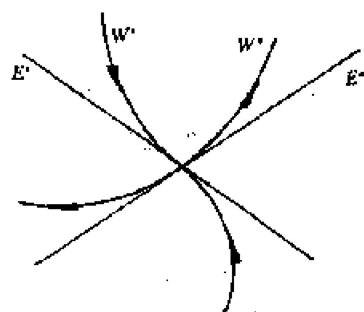


图 8.11

定理证明从略。在图 8.11 上给出定理 3 的说明。根据定理 2，$W^s_{loc}(0)(W^u_{loc}(0))$ 是 $n_s(n_u)$ 维流形，因为 $W^s_{loc}(0)(W^u_{loc}(0))$ 在点 O 的邻域内同胚于 $E^s(E^u)$。余下要证明的是当 f 是 $C^r(r\geqslant 1)$ 向量场时，它们是与 $E^s(E^u)$ 相切的 C^r 微分流形。此外，只要定理 3 对 $W^s_{loc}(0)$ 成立，则将 t 换为 $-t$，就可证明定理 3 对 $W^u_{loc}(0)$ 也成立。

由定义显然可知，$\bar{x}\in W^s_{loc}(\bar{x})$，$\bar{x}\in W^u_{loc}(\bar{x})$；还可知道，$W^s_{loc}$ 是正不变集，W^u_{loc} 是负不变集。

作为例子，对线性系统 $\dot{x}=Ax$，令 U 为点 O 的某个邻域，有 $W^s_{loc}(0)=U\cap E^s$，$W^u_{loc}(0)=U\cap E^u$。此外，对系统式(8.4.2)，如果平衡点 $\bar{x}$ 是吸引子(排斥子)，则有 $\bar{x}$ 的足够小的邻域 U，使得 $W^s_{loc}(\bar{x})=U(W^u_{loc}(\bar{x})=U)$。

把 $W^s_{loc}(\bar{x})$ 中的点沿时间负向运动，便得到点 $\bar{x}$ 的全局稳定流形（简称稳定流形）

$$W^s(\bar{x})=\bigcup_{t\leqslant 0}\varphi_t(W^s_{loc}(\bar{x}))$$

同样地，把 $W^u_{loc}(\bar{x})$ 中的点沿时间正向运动，便得到点 $\bar{x}$ 的全局不稳定流形（简称不稳定流形）

$$W^u(\bar{x})=\bigcup_{t\geqslant 0}\varphi_t(W^u_{loc}(\bar{x}))$$

显然，$\bar{x}\in W^s(\bar{x})$，$\bar{x}\in W^u(\bar{x})$。如果 $x\in W^s(\bar{x})$，则 $\omega(x)=\bar{x}$；如果 $x\in W^u(x)$，则 $\alpha(x)=\bar{x}$。此外，$W^s(\bar{x})$ 和 $W^u(\bar{x})$ 都是不变集。

作为例子，对线性系统 $\dot{x}=Ax$，有 $W^s(0)=E^s$，$W^u(0)=E^u$。对系统(8.4.2)，如果平衡点 $\bar{x}$ 是吸引子，则 $W^s(\bar{x})$ 就是点 $\bar{x}$ 的吸引域；如果平衡点 $\bar{x}$ 是排斥子，则 $W(\bar{x})$ 是 $\bar{x}$ 的排斥域。此

外，如果 $\bar{x}$ 是平面鞍点，则 $W^s(\bar{x})$ 和 $W^u(\bar{x})$ 是鞍点分界线。

例 考虑平面系统

$$\dot{x} = x, \dot{y} = -y + x^2, (x,y) \in R^2 \tag{8.4.10}$$

此系统有唯一的双曲平衡点 O，它的线性近似系统

$$\dot{x} = x, \dot{y} = -y, (x,y) \in R^2 \tag{8.4.11}$$

有不变子空间(如图 8.12(*a*))

$$E^s = \{(x,y) \mid x = 0\}$$

$$E^u = \{(x,y) \mid y = 0\}$$

当 $x \neq 0$ 时，(8.4.10)等价于下面的一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x} + x$$

直接积分后，可以求得轨线族

$$y(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{c}{x} \tag{8.4.12}$$

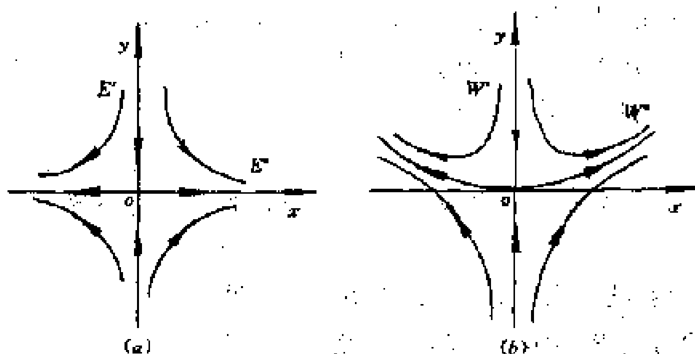


图 8.12

其中 c 为任意常数。此外，易见 $x=0$ 也是系统(8.4.10)的一条轨线。

根据定理 3，$W^s_{loc}(0,0)$ 和 $W^u_{loc}(0,0)$，应当在点 O 处分别与 E^s，E^u 相切，再利用上面得到的轨线表达式，就可以求出全局不变流形如下(图 8.12(*b*))

$$W^s(0,0) = \{(x,y) \mid x = 0\}$$

$$W^u(0,0) = \left\{(x,y) \mid y = \frac{1}{3}x^2\right\} \tag{8.4.13}$$

稳定流形和不稳定流形对于了解动力系统的全局性态有明显的作用，其中稳定流形和不稳定流形相交的情况尤为重要。这里给出几个基本性质：

(1) $W^s(\bar{x})$(或 $W^u(\bar{x})$)不会自身相交。

(2)如果 $\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$ 是两个不同的平衡点，则 $W^s(\bar{x}_1)$ 和 $W^s(\bar{x}_2)$(或 $W^u(\bar{x}_1)$ 与 $W^u(\bar{x}_2)$)不会相交。这是因为若有 $x \in W^s(\bar{x}_1) \cap W^s(\bar{x}_2)$(或 $W^u(\bar{x}_1) \cap W^u(\bar{x}_2)$)，则 $t \to +\infty$(或 $-\infty$)时，有 $\varphi_t(x) \to \bar{x}_1$ 和 $\varphi_t(x) \to \bar{x}_2$，这是不可能的。

(3)如果有 $x \neq \bar{x}$，且 $x \in W^s(\bar{x}) \cap W^u(\bar{x})$，则 $W^s(\bar{x}) \cap W^u(\bar{x})$ 必含有无限多个点。事实上，因为 $W^s(\bar{x})$ 和 $W^u(\bar{x})$ 都是不变集，从而 $W^s(\bar{x}) \cap W^u(\bar{x})$ 也是不变集，所以当 $x \in W^s(\bar{x}) \cap W^u(\bar{x})$ 时，就有 $\varphi_t(x) \in W^s(\bar{x}) \cap W^u(\bar{x})$，$\forall\, t \in R$。由于 $x \neq \bar{x}$，且 $\omega(x) = \bar{x}$，$\alpha(x) = \bar{x}$，故 x 不可能是平衡点，从而点集 $\{\varphi_t(x) \mid t \in R\}$ 有无限多个点，它们都属于 $W^s(\bar{x}) \cap W^u(\bar{x})$。上述结果表明，如果平衡点 $\bar{x}$ 的稳定流形与不稳定流形有一个交点 x 的话，则过点 x 的轨线也完全属于 $W^s(\bar{x}) \cap W^u(\bar{x})$，显然 $W^s(\bar{x}) \cap W^u(\bar{x})$ 包含无限多个点。

(4)如果 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 是两个不同的平衡点，且有 $x \in W^s(\bar{x}_1) \cap W^u(\bar{x}_2)$，则 $W^s(\bar{x}_1) \cap W^u(\bar{x}_2)$ 包含无限多个点。读者可仿照(3)进行证明。

在动力系统中，同一个或不同的平衡点的稳定与不稳定流形相交有可能产生极其复杂的定性行为。通常把 $W^s(\bar{x}) \cap W^u(\bar{x})$ 中的点称为同宿点，过这些点的轨线都是同宿轨线；$W^s(\bar{x}_1) \cap W^u(\bar{x}_2)(\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2)$ 中的点称为异宿点，过这些点的轨线都是异宿轨线，同宿和异宿的概念在浑沌问题的研究中是很重要的。

§8.5 中心流形定理

从上一节中已经知道，在系统式(8.4.2)的双曲平衡点附近，非线性流的拓扑结构可以用线性化流描述。但是对于非双曲平衡点 $\bar{x}$(此时 $Df(\bar{x})$ 的某些特征值有零实部)，在平衡点附近的流的结构可能是很复杂的。本节介绍的中心流形定理提供了一种降低所研究系统的维数的研究方法，因此在研究稳定性和分支问题中有重要的作用。

例1 考虑系统

$$\dot{x}=x^3,\dot{y}=-y-x^2y,(x,y)\in R^2 \tag{8.5.1}$$

它有一个非双曲平衡点 o。(8.5.1)的线性化系统为

$$\dot{x}=0,\dot{y}=-y,(x,y)\in R^2 \tag{8.5.2}$$

显然，线性系统(8.5.2)的稳定子空间 E^s 是 y 轴，中心子空间 E^c 是 x 轴(图8.13(a))。对于系统(8.5.1)，存在过平衡点 O 的两个不变集：一个是与 E^s 相切(其实是重合)的点集 W^s，即 y 轴；另一个是与 E^c 相切(其实是重合)点集 W^c，即 x 轴(图8.13(b))。我们当然可以按照上节的说法，把 W^s 称为稳定流形，并把 W^c 称为中心流形。

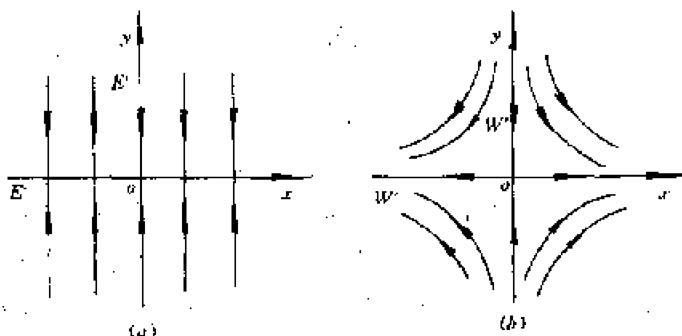


图 8.13

对于一般的系统式(8.4.2)有下面的定理。

定理1(中心流形定理) 设 $f(x)$ 是 $C^r(1\leqslant r<\infty)$ 向量场，点 O 是系统(8.4.2)的一个非双曲平衡点，E^s，E^u 和 E^c 分别为线性近似系统式(8.4.3)的稳定、不稳定和中心子空间，则在点 O 的某邻域 U 内，存在过点 O 并在该处分别与 E^s，E^u 和 E^c 相切的 C^r 局部稳定流形 W^s，C^r 局部不稳定流形 W^u 和 C^r 局部中心流形 W^c(为了简单起见，通常略去"局部"二字)。它们都是局部不变集。[1] 此外，W^s 和 W^u 都是唯一的，但 W^c 则不一定是唯一的。

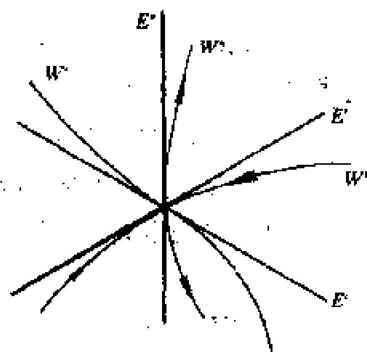


图 8.14

本定理的证明可参看[9]、[13]，在图8.14上说明了定理1的含意。

应该注意，在平衡点 O 附近，系统的流在与中心流形"横截"的方向上的局部性态是比较简单的，因为它们主要由局部稳定和不稳定流形上的局部指数收缩流和扩张流决定的，它们与在稳定和不稳定子空间上的线性化流有相同的局部性态。但是在中心流形上的流与在中心子空间上的线性化流的性态一般是不同的。事实上，在中心流形上，流可能是收缩或扩张的。只有利用 f 在点 O 附近的高阶项的有关信息，我们才能确定在中心流形上的流的局部性态。

---

[1] 局部不变集的定义如下：设点集 $M\subset R^n$，如果对于每一点 $x_0\in M$，存在 $\delta=\delta(x_0)>0$，使得当 $|t|<\delta$ 时，有 $\varphi_t(x)\in M$，则称 M 为流 φ_t 的一个局部不变集。

中心流形可能不是唯一的，以下例子可以说明。

例 2 考虑系统

$$\dot{x} = x^2, \dot{y} = -y, (x,y) \in R^2 \tag{8.5.3}$$

这个系统满足初始条件$(x,y)|_{t=0}=(x_0,y_0)$的轨线，由

$$x(t) = \frac{x_0}{(1-tx_0)}, y(t) = y_0 e^{-t}$$

给出。消去 t 之后，有

$$y(t) = (y_0 e^{-1/x_0}) e^{1/x}$$

由此可见，在左半平面 $x<0$ 上的所有轨线，当 $x\to 0$ 时都趋于原点，且 k 阶导数 $y^{(k)}(x)\to 0, k=1,2,\cdots$。在右半平面 $x>0$ 上，只有一条轨线(即正半 x 轴)，当 $x\to 0$ 时趋于原点。

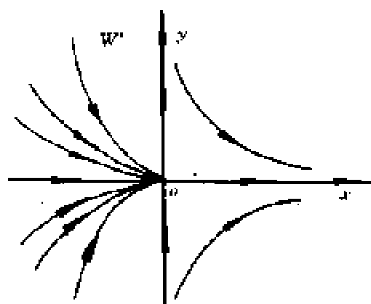


图 8.15

我们还知道，系统(8.5.3)的线性近似系统的中心子空间 E^c 就是 x 轴。由于中心流形 W^c 在原点处与 E^c 相切，因此把左半平面上的任何一条轨线与正半 x 轴连结在一起，就可以得到个 C^∞ 中心流形。由此可见，系统(8.5.3)有无穷多个 C^∞ 中心流形，不过，在它们中间只有一个是解析流形，即 x 轴本身(图 8.15)。

定理 1 中关于中心流形的光滑程度为 C^r 的结论是对式(8.4.2)是常微分方程的情形而言的。如果式(8.4.2)是无限维空间上的一般的发展方程，则当 f 是 $C^r(r\geqslant 1)$向量场时，中心流形是 C^{r-1}的。

如果 f 是 C^∞的，则对任何 $r<\infty$都可找到一个 C^r中心流形，但是不一定有 C^∞中心流形。此外，解析的向量场 f 也不一定有解析的中心流形；但如果后者存在的话，它必定是唯一的。

为了研究在中心流形上的流，我们考虑到中心流形 W^c 在点 O 处与 E^c 相切，因此可以认为 W^c 上向量场在 E^c 上的投影所决定的流是 W^c 上的流的很好的近似。

下面我们只讨论 $Df(0)$的特征值没有正实部的情形，即不稳定流形 W^u 不存在的情形。这样不但便于表述，而且这也是物理和工程技术上最感兴趣的情形。对于 W^u 存在的一般情形也可以类似地讨论。

设 U 为点 O 的某个邻域，且系统式(8.4.2)在 U 内可写成(或者通过非奇异的线性变换后写成)

$$\begin{cases}\dot{u} = Au + F(u,v) \\ \dot{v} = Bv + G(u,v)\end{cases}, (u,v) \in U \subset R^k \times R^l \tag{8.5.4}$$

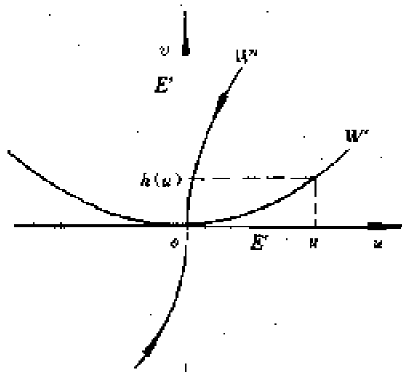


图 8.16

其中 A 和 B 分别为 $k\times k$ 和 $l\times l$ 矩阵，它们的特征值分别有零实部和负实部，$k=\dim E^c, l=\dim E^s, k+l=n$，函数 F,G 及其一阶偏导数在(0,0)处都等于零。

由于中心流形 W^c 存在，且在原点处与 E^c(即子空间 $v=0$)相切，因此我们在 U 内可以把 W^c 表示为(图 8.16)。

$$v = h(u), h(0) = Dh(0) = 0 \tag{8.5.5}$$

把它代入式(8.5.4)的第一式中，便得到

$$\dot{u} = Au + F(u,h(u)), u \in R^k \tag{8.5.6}$$

这就给出 W^c 上的向量场在 E^c 上的投影。下面的定理表明，低维系统式(8.5.6)包含了决定原来的系统式(8.5.4)的流在原点附近 渐近性态所需的信息。

定理 2 (1)如果系统(8.5.6)的原点是稳定(渐近稳定、不稳定)的，则系统(8.4.2)的原点是稳定(渐近稳定、不稳定)的。

(2)如果系统式(8.5.6)的原点是稳定的，令$(u(t),v(t))$为系统式(8.4.2)的解，其初值$(u(0),v(0))$足够小，则存在系统式(8.5.6)的一个解$u^*(t)$，使得

$$u(t) = u^*(t) + O(e^{-rt})$$
$$v(t) = h(u^*(t)) + O(e^{-rt})$$

其中常数$r>0$。

定理 2 的证明参看[9]、[13]。

现在研究函数$h(u)$的计算方法。把$v=h(u)$代入式(8.5.4)的第二式中，并利用求导的链式法则，有

$$Dh(u)\dot{u} = Bh(u) + G(u,h(u))$$

再将式(8.5.4)的第一式代入上式中，整理后得到$h(u)$应满足的方程

$$\Phi(h(u)) \triangleq Dh(u)[Au + F(u,h(u))] - Bh(u) - G(u,h(u)) = 0 \qquad (8.5.7)$$

此外，$h(u)$还应当满足条件

$$h(0) = 0, Dh(0) = 0 \qquad (8.5.8)$$

当然，h的微分方程式(8.5.7)(注意：当$k=\dim E^c \geqslant 2$时，它是偏微分方程组)一般是不能精确求解的，但是我们可以得到$h(u)$的有一定精度的近似解，其根据是下面的定理。

定理 3 假设有一个C^1函数$\varphi: R^k \to R^l$，它满足$\varphi(0)=0, D\varphi(0)=0$，且有某个常数$p>1$，使得当$\|u\| \to 0$时，$\Phi(\varphi(u))=O(\|u\|^p)$，则当$\|u\| \to 0$时，对中心流形$W^c$有

$$h(u) = \varphi(u) + O(\|u\|^p) \qquad (8.5.9)$$

定理 3 的证明请参看[9]。由此定理可见，如果我们能求出方程式(8.5.7)在条件式(8.5.8)下的 Taylor 级数解，那么，就能以任意精度逼近$h(u)$。然而，由于系统式(8.4.2)不一定有解析的中心流形，因此这样的 Taylor 级数解不一定存在。

例 3 考虑系统

$$\dot{x} = xy, \dot{y} = -y + ax^2, (x,y) \in R^2 \qquad (8.5.10)$$

其中a为常数，由定理 1，此系统有过原点的中心流形$W^c=\{(x,y)|y=h(x)\}$。为了计算$h(x)$，式(8.5.7)和式(8.5.8)在本例中可写成

$$\begin{cases} \Phi(h(x)) = h'(x)[xh(x)] + h(x) - ax^2 = 0 \\ h(0) = h'(0) = 0 \end{cases} \qquad (8.5.11)$$

由上式可见，对于$\varphi(x)=O(x^2)$，有

$$\Phi(\varphi(x)) = \varphi(x) - ax^2 + O(x^4)$$

因此，我们若取$\varphi(x)=ax^2$，就有$\Phi(\varphi(x))=O(x^4)$，由定理 3 得知$h(x)$可以近似地表示为

$$h(x) = ax^2 + O(x^4) \qquad (8.5.12)$$

于是式(8.5.6)可写成

$$\dot{x} = xh(x) = ax^3 + O(x^5) \qquad (8.5.13)$$

当$a<0$时，式(8.5.13)的原点是渐近稳定的，再由定理 2 可知，式(8.5.10)的原点是渐近稳定的。同理，当$a>0$时，式(8.5.10)的原点是不稳定的，至于$a=0$的情形，我们必须求出$h(x)$的更高阶的近似结果，才能确定式(8.5.10)的原点的稳定性。在图 8.17(a)上给出$a<0$的

相图，在图 8.17(b)上给出 $\alpha>0$ 的相图。

例 4 考虑系统

$$\begin{cases}\dot{u}=v \\ \dot{v}=-v+\alpha u^2+\beta uv\end{cases}\qquad (u,v)\in R^2 \tag{8.5.14}$$

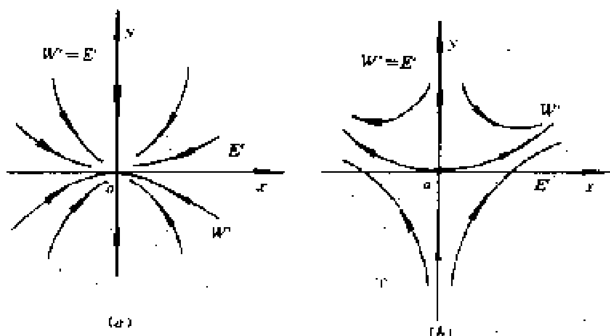


图 8.17

其 α,β 皆为常数，式(8.5.14)有唯一的平衡点(0,0)，在该处的线性近似系统的特征值为 0 和 -1。作线性变换

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},T=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$$

于是式(8.5.14)化为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\alpha(x+y)^2-\beta(xy+y^2)\\ \dot{y}&=-y-\alpha(x+y)^2+\beta(xy+y^2)\end{aligned}\right\} \tag{8.5.15}$$

现在计算中心流形 $y=h(x)$。$h(x)$由方程

$$\begin{aligned}\Phi(h(x))=&h'(x)[\alpha(x+h(x))^2-\beta(xh(x)+h^2(x))]\\ &+h(x)+\alpha(x+h(x))^2-\beta(xh(x)+h^2(x))=0\end{aligned} \tag{8.5.16}$$

和

$$h(0)=h'(0)=0$$

决定。利用 $h(x)$在原点处的 Taylor 展开式，我们可以求出 $h(x)$的一个直到三阶的表达式

$$h(x)=-\alpha x^2+\alpha(4\alpha-\beta)x^3+O(x^4) \tag{8.5.17}$$

因此式(8.5.6)可以写成

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\alpha(x+h(x))^2-\beta(xh(x)+h^2(x))\\ &=\alpha[x^2+(\beta-2\alpha)x^3+(9\alpha^2-7\alpha\beta+\beta^2)x^4]+O(x^5)\end{aligned} \tag{8.5.18}$$

于是当 $\alpha\neq0$ 时，式(8.5.14)的原点都是不稳定的。在图 8.18(a)上给出 $\alpha<0$ 的相图，在图 8.18 (b)上给出 $\alpha>0$ 时的相图。

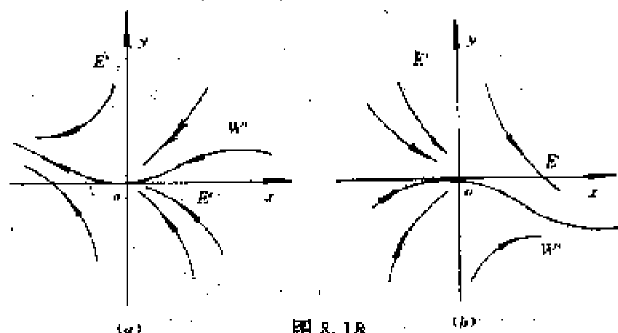


图 8.18

顺便指出，如果我们用 E^c 近似表示 W^c，即取 $h(x)=0+O(x^2)$，这时式(8.5.18)变为

$$\dot{x}=\alpha x^2+O(x^3),$$

当 $\alpha\neq0$ 时，仍然可以确定式(8.5.14)在原点队近的附近性态。

§8.6 离散动力系统

我们在上面讨论过连续动力系统(即流)的一些主要结果，本节将讨论离散动力系统的相应结果。

定义 1 设 $E\subseteq R^n$ 是一个开集，$G:E\to E$ 是一个同胚(C^r 微分同胚，$r\geqslant1$)，我们称双边序列$\cdots,G^{-2},G^{-1},G^0,G^1,G^2,\cdots$为 E 上的 C^0 离散动力系统(C^r离散动力系统)，或C^0 离散流(C^r离散流)。在此规定

$$G^0=I,G^k=G\circ G^{k-1},G^{-k}=(G^{-1})^k$$

显然，定义 1 中的双边序列满足：

(1)$G^0=I$；

(2)$G^k \cdot G^l=G^{k+l}, \forall k,l\in Z$。

因此$\{G^k|k\in Z\}$是一个从 E 到 E 的单参数变换群，参数 k 的取值范围是整数加群(Z,＋)，因此我们把它称为离散动力系统。

应该指出，与离散流的概念对应，我们可以把 § 8.2 定义 1 中的 φ(或 φ_t)称为连续流。此外，人们在动力系统的研究中，为了叙述简便，往往直接用"同胚"(或微分同胚)去称呼相应的离散动力系统。

现在讨论连续流与离散流之间的关系。一方面，我们可以对连续流进行离散采样，得到离散流。一个例子是每隔一定的时间 T 就对连续流 φ_t 作一次采样，得到一个双边序列$\{\varphi_{kT}|\forall k\in Z\}$。若记同胚 $G=\varphi_T$(通常称为频闪映射)，则上述双边序列给出一个离散流$\{G^k|k\in Z\}$。另一个例子，是由下一节得到的 Poincaré 映射生成的离散流。此外，微分方程的差分解法也可以得到离散动力系统。另一方面，对于给定的 E 上的同胚 G，我们可以通过下述的"扭扩"(suspension)的方法，得到高一维空间上的某个连续流(称为扭扩流)。为此，在 $R\times E$ 上定义一个十分简单的流

$$\psi_t(p,t)=(t+p,t),(p,x)\in R\times E$$

并在 $R\times M$ 上定义一个等价关系

$$(p,x)\sim(q,y)\Leftrightarrow p-q=n\in Z$$

且 $$y=G^{p-q}(x)$$

记 $\tilde{E}=R\times E/\sim$，容易验证，如果$(p,x)\sim(q,y)$，则有

$$\psi_t(p,x)\sim\psi_t(q,y)$$

于是 ψ_t 诱导出 $\tilde{E}$ 上的一个流 $\tilde{\psi}_t$，这就是扭扩流。为了探讨扭扩流 $\tilde{\psi}_t$ 与同胚 G 的关系，我们把 E 与 $\Sigma=\{0\}\times E/\sim$等同起来，于是 G 可以看成 Σ 上的同胚。流 $\tilde{\psi}_t$ 从 Σ 上的任一点 x 出发的轨线都要返回 Σ，其中第一次返回 Σ 的点就是 $G(x)$。由 § 8.7 可以进一步知道，G 正是流 $\tilde{\psi}_t$ 关于截面 Σ 的 Poincaré 映射。

由此可见，连续流和离散流有着密切的关系。微分动力系统理论同时包括对连续流和离散流的研究，即 C^r 动力系统是 C^r 流和 C^r 微分同胚的统称。在流和微分同胚的定性研究中，往往有相应的现象和问题。由于微分同胚的研究一般比较简洁、直观，因此人们常常先在微分同胚研究中发现定理，然后再对流进行相应的讨论。此外，人们有时还将流离散化，通过对较低维的离散动力系统的研究得知流的有关性质。关于离散动力系统可进一步参看[9]～[13]。

类似连续流那样，我们可以对离散流建立相应的概念。设 $G:E\subseteq R^n\to E$ 是一个同胚(C^r 微分同胚)，$x\in E$，我们把点集$\{G^k(x)|k\in Z\}$称为离散动力系统 G 过点 x 的轨线。同样，可以建立正半轨线和负半轨线的概念。应当注意：流 φ_t的轨线是 R^n 中的一条连续曲线，而映射 G 的轨线是 R^n 中的一个点列。

如果存在正整数 m，使得 $G^m(x)=x$，则称 x 为 G 的周期点，使上式成立的最小正整数 m 称为 x 的周期，过周期点的轨线称为周期轨线，满足 $G(x)=x$ 的点称为 G 的不动点，它显然是周期为 1 的周期点。

对于 G 的不动点 $\bar{x}$，如果对 $\bar{x}$ 每个邻域 U 都存在一个 $\bar{x}$ 的邻域 U_1，使得对一切 $x\in U_1$ 和 $k\geqslant 0$ 有 $G^k(x)\in U$，则称 $\bar{x}$ 是稳定的；反之是不稳定的。如果 $\bar{x}$ 是稳定的，且对一切 $x\in U_1$ 有

$\lim\limits_{k\to\infty}G^k(x)=0$，则称 $\bar{x}$ 是渐近稳定的。

如果有集合 Λ，对于任何 $x\in\Lambda$ 和 $k\in Z$ 有 $G^k(x)\in\Lambda$，则称 Λ 为 G 的不变集。同样可以建立正不变集和负不变集的概念。

我们分别称点集

$$\omega(x)=\bigcap_{m\in N}\overline{\{G^k(x)\,|\,k\geqslant m\}}$$

$$\alpha(x)=\bigcap_{m\in N}\overline{\{G^{-k}(x)\,|\,k\geqslant m\}}$$

为 G 过点 x 的轨线的 ω 极限集和 α 极限集。

如果对点 x 的任何邻域 U 都是整数 $k\neq0$，使得 $G^k(U)\cap U\neq\varnothing$，则称 x 为 G 的非游荡点。G 的全体非游荡点的集合称为非游荡集，记作 $\Omega(G)$。轨线（包括不动点、周期轨线等），$\omega(x)$，$\alpha(x)$，$\Omega(G)$ 等都是不变集。

下面的定义给出离散动力系统的等价关系。

定义 2 设 $F,G:E\to E$ 是两个同胚（C^r 微分同胚），如果存在一个同胚（C^k 微分同胚）$h:E\to E$，使得

$$h\circ F=G\circ h \tag{8.6.1}$$

则称 F 和 G 是拓扑共轭（C^k 共轭）的。如果上述关系只是在对应的不动点的邻域内成立，则称 F 和 G 在此不动点是局部拓扑共轭（局部 C^k 共轭）的。拓扑共轭（C^k 共轭）是一种等价关系。

可以看到，拓扑共轭的两个动力系统有相同的轨线拓扑结构。

现在研究线性同胚 $L:R^n\to R^n$，$x\mapsto Ax$，其中 A 是 $n\times n$ 非奇异常值矩阵。它的每条轨线是一个点列 $\{x_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$，$x_{k+1}=Ax_k$，$x=0$ 是唯一的不动点。当 A 的所有特征值的模都小于 1 时，$x=0$ 是一个汇，它是渐近稳定的。事实上，由线性代数知道，这时存在某组基和常数 $0<\mu<1$，使得

$$\|Ax\|\leqslant\mu\|x\|,\forall x\in R^n$$

于是 $\|A^kx\|\leqslant\mu^k\|x\|$，且 $\lim\limits_{k\to\infty}A^kx=0$。同理，当 A 的所有特征值的模都大于 1 时，$x=0$ 是一个源，它是不稳定的。

一般情况下，我们把矩阵 A 的模小于 1、大于 1 和等于 1 的特征值对应的不变子空间分别记为 E^s，E^u 和 E^c。E^s 和 E^u 上的轨线分别有收缩和扩张的特性。E^s，E^u 和 E^c 分别称为线性同胚 L 的稳定子空间、不稳定子空间和中心子空间。

现在考虑 $C^r(r\geqslant1)$ 微分同胚 G。若 $\bar{x}$ 是 G 的一个不动点，我们称 $DG(\bar{x})$ 为 G 在 $\bar{x}$ 处的线性化同胚。如果 $DG(\bar{x})$ 所有特征值的模都不等于 1，则称 $\bar{x}$ 为 G 的一个双曲不动点。对于微分同胚的双曲不动点，我们有与流的情形类似的定理。

定理 1（Hatman－Grobman 定理） 设 $\bar{x}$ 是微分同胚 G 的一个双曲不动点，则 G 和 $DG(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}$ 的某邻域内是拓扑共轭的。

我们定义不动点 $\bar{x}$ 的局部稳定流形和不稳定流形如下：

(1) $W^s_{loc}(\bar{x})\triangleq\{x\in U\,|\,$对一切 $k\geqslant0$ 有 $G^k(x)\in U$，且当 $k\to+\infty$ 时，$G^k(x)\to\bar{x}\}$；

(2) $W^u_{loc}(\bar{x})\triangleq\{x\in U\,|\,$对一切 $k\geqslant0$ 有 $G^{-k}(x)\in U$，且当 $k\to+\infty$ 时，$G^{-k}(x)\to\bar{x}\}$.

其中 U 是不动点 x 的某个邻域。同样地，全局稳定流形和全局不稳定流形可以定义如下

$$W^s(x)=\bigcup_{k\geqslant0}G^{-k}(W^s_{loc}(\bar{x}))$$

$$W^u(\bar{x})=\bigcup_{k\geqslant0}G^k(W^u_{loc}(\bar{x}))$$

对于微分同胚情形，上述局部不变流形或全局不变流形都是离散点列组成的集合。下面取 $\bar{x}=0$，我们有与流情形类似的定理。

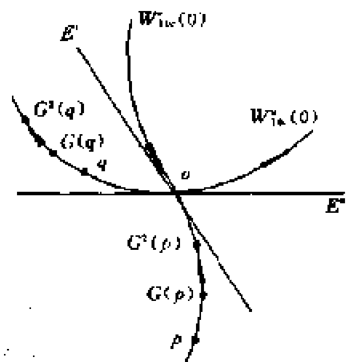


图 8.19

定理 2(稳定流形定理)　设点 O 是 C^r 微分同胚 G 的一个双曲不动点，则存在局部稳定流形 $W^s_{loc}(0)$ 和局部不稳定流形 $W^u_{loc}(0)$，它们在点 $\bar{x}$ 处分别与 E^s,E^u 相切，且维数对应相等。此外，$W^s_{loc}(0)$ 和 $W^u_{loc}(0)$ 是 C^r 光滑的(图 8.19)。

对于微分同胚的非双曲不动点也有中心流形定理。此外，如果微分同胚 G 以 $\bar{x}$ 为周期点，周期为 m，则 $\bar{x}$ 是 G^m 的不动点。因此我们同样可以建立 G 的双曲周期点和双曲周期轨线的概念，还可以定义微分同胚的双曲周期轨线的局部稳定和不稳定流形，并得到相应的性质。在此不再详述。

§8.7　Poincaré 映射

设 φ_t 是 R^n 中的 $C^r(r\geqslant 1)$ 向量场 $f(x)$ 生成的流。类似平面流的截线(无切线段)的概念，我们建立下面的一般定义。

定义 1　设 Σ 为 R^n 中的 $(n-1)$ 维超曲面 H 的一部分，对任何 $x\in\Sigma$，$f(x)$ 不与 Σ 相切，即 $\langle f(x),n(x)\rangle\neq 0$，其中 $n(x)$ 是 Σ 在 x 处的法向量，则称 Σ 为流 φ_t 的一个截面。在截面 Σ 上，流 φ_t 处处都与 Σ 横截相交。只要点 x 不是平衡点，我们总可以作过点 x 的截面。

设 Γ 是 φ_t 的一条闭轨，周期为 T。过任一点 $p\in\Gamma$ 作截面 Σ(适当选取 Σ 的大小，可以使 Γ 与 Σ 仅交于一点 p)。由于 $\varphi_T(p)=p\in\Sigma$(这表示从点 p 出发的轨线 $\Gamma=\gamma(p)$ 经过时间 T 之后第一次回到 Σ 上)，根据流的连续性，存在点 p 的某个邻域 $U\subseteq\Sigma$，使得从任何点 $q\in U$ 出发的轨线都可以再次回到 Σ 上。于是我们可以定义首次回归映射 $P:U\to\Sigma$，使得

$$P(q)=\varphi_{\tau(q)}(q)\in\Sigma,\forall\ q\in U \tag{8.7.1}$$

其中 $\tau(q)$ 为从点 q 出发的轨线首次回到 Σ 所需的时间(图 8.20)。$\tau(q)$ 是一个连续可微函数。一般来说，当 $q\neq p$ 时，$\tau(q)\neq\tau(p)=T$；但当 $q\to p$ 时，$\tau(q)\to T$。通常称 P 为 Poincaré 映射。

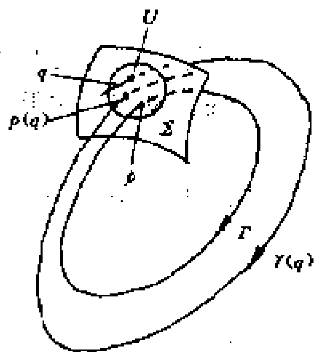


图 8.20

当 φ_t 是 $C^r(r\geqslant 1)$ 时，P 是 U 上的 C^r 微分同胚，于是在 φ_t 的闭轨 Γ 附近用上述法面得到一个离散流 $\{P^k\}$。易知点 p 是 Poincaré 映射 P 的不动点。这里要指出，对流的闭轨的研究可以归结为对 Poincaré 映射 P 的不动点的研究。由于 P 是在 $(n-1)$ 维空间中的映射，因此研究起来比较简便。

定理 1　设 Γ 为 φ_t 的一条闭轨，点 $p\in\Gamma$，且 p 是 Poincaré 映射 P 的双曲不动点，$DP(p)$ 的一切特征值的模都小于 1，则闭轨 Γ 是轨道渐近稳定的。

证明　因为 $DP(p)$ 的一切特征值的模都小于 1，故由 §8.6 定理 1 可知点 p 是映射 P 渐近稳定不动点。

由于点 p 是 P 的稳定不动点，故对 p 的任意邻域 $U\subset\Sigma$，都存在点 p 的一个邻域 $U_1\subset\Sigma$，使得对一切 $k\geqslant 0$ 和 $x\in U_1$ 有 $P^k(x)\in U$。根据解对初值的连续依赖性，可知闭轨 Γ 是轨道稳定的。

再证明对任何 $x\in U_1$，有 $\lim\limits_{t\to+\infty} d(\varphi_t(x),\Gamma)=0$。记 $P^k(x)=x_k(k=0,1,2,\cdots)$，$\tau(x_k)=\tau_k$（即 $\varphi_{\tau_k}(x_k)=x_{k+1}$）。因为 $\tau(x)$ 连续，且当 $k\to\infty$ 时，$x_k\to p$，所以，$\tau_k=\tau(x_k)\to\tau(p)=T$，从而数集 $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$ 有上界 $\bar\tau$。对于任何 $t>0$，可以找到正整数 $k(t)$，使得 $\tau_{k(t)}<t\leqslant\tau_{k(t)-1}$。记 $t=\tau_{k(t)}+s(t)$，则 $s(t)\in(0,\bar\tau]$，从而 $\varphi_t(x)=\varphi_{s(t)}(x_{k(t)})$。

由流的连续性和 $x_k\to p$ 可知，以任何 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得当 $k>N$ 时，对任何 $s\in(0,\bar\tau]$ 有

$$\|\varphi_s(x_k)-\varphi_s(p)\|<\varepsilon$$

于是，存在 $T>0$，使当 $t>T$ 时，$k(t)>N$，从而

$$\begin{aligned}d(\varphi_t(x),\Gamma)&\leqslant\|\varphi_t(x)-\varphi_{s(t)}(p)\|\\&=\|\varphi_{s(t)}(x_{k(t)})-\varphi_{s(t)}(p)\|<\varepsilon\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{t\to+\infty} d(\varphi_t(x),\Gamma)=0,\forall\ x\in U_1$，由此可见 Γ 是轨道渐近稳定的。证毕。

作为一个例子，我们考虑平面系统

$$\left.\begin{aligned}\dot x&=x-y-x(x^2+y^2)\\\dot y&=x+y-y(x^2+y^2)\end{aligned}\right\}\tag{8.7.2}$$

取极坐标 (r,θ)，式(8.7.2)可写成

$$\dot r=r(1-r),\dot\theta=1\tag{8.7.3}$$

取正半 x 轴为截面 Σ，即

$$\Sigma=\{(r,\theta)\,|\,r>0,\theta=0\}$$

利用初等积分方法，容易求出式(8.7.3)的全局流

$$\varphi_t(r,\theta)=\left\{\left[1+\left(\frac{1}{r^2}-1\right)e^{-2t}\right]^{-\frac{1}{2}},t+\theta\right\}$$

由此看到，对于任何 $q=(r,\theta)\in\Sigma$，其首次回归时间 $\tau(q)=2\pi$，因此 Poincaré 映射为

$$P(r)=\varphi_{2\pi}(r,\theta)=\left\{1+\left(\frac{1}{r^2}-1\right)e^{-4\pi}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

显然 P 有一个不动点 $r_0=1$，它对应系统式(8.7.3)的闭轨 $\Gamma=\{(r,\theta)\,|\,r=1\}$。这里 P 是一维映射，容易求出

$$DP(1)=\left.\frac{dP}{dr}\right|_{r=1}=e^{-4\pi}<1$$

因此 $r_0=1$ 是映射 P 的渐近稳定不动点，从而 Γ 是轨道渐近稳定的，即 Γ 是一个稳定极限环。利用平面定性理论，我们也可以得到同样的结论。

应该指出，将 t 换为 $-t$，我们可以证明：如果 $DP(p)$ 的一切特征值的模都大于 1，则闭轨 Γ 是轨道不稳定的。其实，在定理 1 的条件下，我们还可以有更强的结论。不失一般性，下面设 $p=0\in\Gamma$。先证明一个引理。

引理 设 Γ 是 φ_t 的一条闭轨，周期为 T，且 $0\in\Gamma$，则

(1)线性映射 $D\varphi_T(0)$ 必有特征值等于 1，其相应的特征向量为 $f(0)$；

(2)$DP(0)=D\varphi_T(0)|_H$，其中 H 为 $D\varphi_T(0)$ 的除上述特征值 1 之外的其他特征值对应的不变子空间，且截面 $\Sigma\subset H$。

证明 (1)取 $\xi\in\Gamma$，由导算子的定义有

$$\varphi_T(\xi)-\varphi_T(0)=D\varphi_T(0)\xi+o(\|\xi\|)$$

因为 $0\in\Gamma,\xi\in\Gamma$，且 Γ 的周期为 T，所以有

$$\xi-0=D\varphi_T(0)\xi+o(\|\xi\|)$$

除以 $\|\xi\|$，并令 $\|\xi\|\to 0$，考虑到 $\xi/\|\xi\|\to f(0)/\|f(0)\|$，于是得到

$$f(0)=D\varphi_T(0)f(0) \tag{8.7.4}$$

这表明 $f(0)$ 是 $D\varphi_T(0)$ 的对应特征值 1 的特征向量。

(2)作直和分解 $R^n=F\oplus H$，其中 F 是由 $D\varphi_T(0)$ 的特征值 1 的特征向量 $f(0)$ 生成一维特征子空间，H 是其他特征值对应的 $(n-1)$ 维不变子空间，它们都是在 $D\varphi_T(0)$ 作用下不变的。

因为 $P(x)=\varphi_{\tau(x)}(x),x\in U_1\subset\Sigma$，把它在 H 内 $x=0$ 处求导，并注意到 $\tau(0)=T$，便有

$$DP(0)=D\varphi_T(0)|_H+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_T(0)D_\tau(0) \tag{8.7.5}$$

为了计算 $D_\tau(0)$，设子空间 H 的点 x 满足线性方程 $h(x)=0$。由于 $\varphi_{\tau(x)}(x)\in\Sigma\subset H$，$\forall\ x\in U_1$，故有

$$h(\varphi_{\tau(x)}(x))=0,\forall\ x\in U_1$$

将上式在 H 内 $x=0$ 处求导，有

$$Dh(\varphi_T(0))|_H+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(\varphi_T(0))D_\tau(0)=0 \tag{8.7.6}$$

因为 h 是线性的，所以

$$Dh(\varphi_T(0))x=h(D\varphi_T(0)x)$$

由于 H 在 $D\varphi_T(0)$ 作用下是不变的，因此对任何 $x\in H$，有 $D\varphi_T(0)x\in H$，从而 $h(D\varphi_T(0)x)=0$。于是

$$Dh(\varphi_T(0))x=0,\forall\ x\in H$$

即 $Dh(\varphi_T(0))|_H=0$，此外

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(\varphi_T(0)&=h\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_T(0)\right)=h(f(\varphi_T(0))\\&=h(f(0))\neq 0\end{aligned}$$

这是因为 $f(0)\in F$，从而 $f(0)\notin H$ 的缘故。利用上述结果，由(8.7.6)可得 $D_\tau(0)=0$，把它代入式(8.7.5)，便得到 $DP(0)=D\varphi_T(0)|_H$。

定理 2 设 $0\in\Gamma$，$DP(0)$ 的一切特征值的模都小于 1，则闭轨 Γ 是相位渐近稳定的，即 Γ 是一个周期吸引子。

证明 由定理 1 知此时 Γ 是轨道渐近稳定的，现在只要证明对 Γ 附近的任一点 x，存在唯一的点 $z\in\Gamma$ 使得 $\lim\limits_{t\to+\infty}\|\varphi_t(x)-\varphi_t(z)\|=0$（这里的点 z 对应定义 1 中的 $\varphi(t)$）。不失一般性，我们取截面 Σ 在上面的引理的子空间 H 上，而且只需对 $x\in U_1\subset\Sigma$ 证明这个结论，因为凡是趋于 Γ 的轨线都与 U_1 相交。

设 Γ 的周期为 T，我们证明对任何 $x\in U_1\subset\Sigma$，有唯一的点 $z\in\Gamma$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_{kT}(x)=z$。为此将 $\varphi_{kT}(x)$ 写成

$$\varphi_{kT}(x)=\varphi_{t_k}(P^k(x)),k=1,2,\cdots$$

易证 t_k 满足

$$t_k=t_{k-1}+\tau(P^{k-1}(x))-T$$

其中函数 $\tau(\cdot)$ 为首次回归时间。由于 $DP(0)$ 的特征值都小于 1，故当 $k\to\infty$，$P^k(x)\to 0$，且有某组基和某个 $0<r<1$，使得

$$\| P(x) \|_1 \leqslant r \| x \| ,\forall\ x \in U_1$$

此外,由引理的证明还知道 $D_r(0)=0$,因此对任何 $\delta>0$,只要 $x\in\Sigma$,且 $\|x\|$ 充分小,就有

$$|\tau(x) - T| = |\tau(x) - \tau(0)| \leqslant \delta \| x \|$$

利用上述结果有

$$|t_k - t_{k-1}| = |\tau(P^{k-1}(x)) - T| \leqslant \delta \| P^{k-1}(x) \| \leqslant \delta r^{k-1} \| x \| \tag{8.7.7}$$

由此可见,序列 $\{t_k\}$ 是基本收敛的,从而存在唯一的极限 $\bar{t}=\lim\limits_{k\to\infty}t_k$。利用流的连续性,可知

$$z = \lim_{k\to\infty}\varphi_{kT}(x) = \lim_{k\to\infty}\varphi_{t_k}(P^k(x)) = \varphi_{\bar{t}}(0) \in \Gamma$$

由上述结果和流的连续性,可知 $\lim\limits_{t\to+\infty} \| \varphi_t(x)-\varphi_t(z) \| =0,\forall\ x\in U_1$. 证毕。

推论 如果 $D\varphi_T(0)$ 有 $(n-1)$ 个特征值的模小于 1,则闭轨 Γ 是相位渐近稳定的。

现在考虑更一般的情形。如果点 $p\in\Gamma$ 是 Poincaré 映射 P 的双曲不动点,则称 Γ 为流 φ_t 的双曲闭轨。我们可利用 φ_t 过 $W^s(p)$ 和 $W^u(p)$ 的各点的轨线去构成闭轨 Γ 的稳定流形 $W^s(\Gamma)$ 和不稳定流形 $W^u(\Gamma)$(图 8.21)。若 $DP(p)$ 有 n_s 个特征值的模小于 1,n_u 个特征值的模大于 1,$n_s+n_u=n-1$,则 $\dim W^s(\Gamma)=n_s+1$,$\dim W^u(\Gamma)=n_u+1$。

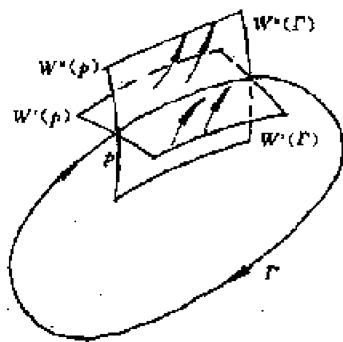


图 8.21

Poincaré 映射不仅在流的闭轨研究中有重要的作用,而且是研究连续动力系统的次谐运动或超谐运动、概周期运动及浑沌运动的必不可少的工具。一般要用理论方法得到 Poincaré 映射的结果是很困难的,因为这需要用到流的表达式,然而可以用数值方法得到 Poincaré 映射的结果。

§8.8 结构稳定性

结构稳定性(即粗性),是指当动力系统受到扰动变为"邻近"的动力系统时,系统的拓扑结构保持不变的性质。结构稳定性问题是微分动力系统理论的中心课题,并且对实际应用中的非线性系统的定性研究有重要作用。这里的"拓扑结构不变"是在前面提到的拓扑等价或拓扑共轭的意义下而言的,至于"邻近的动力系统"的概念还要作进一步说明。

设集合 $U\subseteq R^n$,对于映射 $f\in C^1(U,R^n)$ 和 $\varepsilon>0$,我们定义 f 的 ε—邻域如下

$$B_\varepsilon(f) \triangleq \{g \in C^1(U,R^n) \mid \sup_{x\in K}(\| f(x) - g(x) \| + \| Df(x) - Dg(x) \|) < \varepsilon,\forall \text{ 紧集 } K \subset U\}$$

上述概念对向量场和微分同胚都是适用的。

记 U 上全体 C^1 向量场的集合为 $\mathscr{X}^1(U)$,U 上全体 C^1 微分同胚的集合为 $\mathrm{Diff}^1(U)$。于是我们可以给出向量场(或微分同胚)的结构稳定性的定义。

定义 1 设 $f\in\mathscr{X}^1(U)$(或 $F\in\mathrm{Diff}^1(U)$)。如果在某个 $\varepsilon>0$,使得每个 $g\in B_\varepsilon(f)\subset\mathscr{X}^1(U)$(或 $G\in B_\varepsilon(f)\subset\mathrm{Diff}^1(U)$)都与 f(或 F)拓扑等价(或拓扑共轭),则称 f(或 F)是结构稳定的。

可以指出,Liapunov 稳定性研究,是单个动力系统的运动状态受到初始扰动后的动态特性。结构稳定性讨论的是一族相邻的动力系统的拓扑性质之间的联系。动力系统在受到扰动

后变为"邻近的"动力系统，我们要研究在什么条件下系统的拓扑结构保持不变，这就是结构稳定性问题。更准确地说，定义 1 给出的是 C^1 结构稳定性的定义。我们也可以限于 $\mathscr{X}^1(U)$（或 $\mathrm{Diff}^1(U)$）的某些子集去类似地讨论相应的结构稳定性问题，如在 $\mathscr{X}^r(U)$（或 $\mathrm{Diff}^r(U)$）上建立的 C^r 结构稳定性。

例 1 讨论单自由度无阻尼谐振子系统

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, x \in [-1,1] \tag{8.8.1}$$

的结构稳定性。式(8.8.1)可以写成

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -\omega^2 x, (x,y) \in K \tag{8.8.2}$$

其中 K 为椭圆区域 $x^2+(y/\omega)^2\leqslant 1$，原点是系统式(8.8.2)的中心，且在 K 中充满围绕原点的闭轨。

现在考虑式(8.8.2)的扰动系统

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -\omega^2 x - ay, (x,y) \in K \tag{8.8.3}$$

当 $a>0(<0)$ 时，原点是稳定（不稳定）焦点，且在 K 中不存在任何闭轨。由于 $a\neq 0$ 的扰动系统式(8.8.3)与未受扰系统式(8.8.2)的拓扑结构不是等价的，因此系统式(8.8.2)结构是不稳定的。

应该注意，虽然系统式(8.8.2)在 C^1 向量场中是结构不稳定的，但是，如果限于 C^1-Hamilton 向量场去讨论，则当 $\omega\neq 0$ 时，系统式(8.8.2)在受到此集合中的小扰动后仍能保持拓扑结构，从而是稳定的，这时称系统式(8.8.2)是 Hamilton 结构稳定的。

例 2 如果系统

$$\dot{x} = f(x), x \in R^n \tag{8.8.4}$$

有非双曲平衡点 p，则此系统是结构不稳定的。事实上，这时 $Df(p)$ 的某些特征值有零实部，只要对系统式(8.8.4)作任意小的适当扰动，就可能使平衡点消失或使扰动系统在相应的平衡点处的线性化矩阵的特征值都有非负实部（即相应的平衡点成为双曲的），从而扰动系统与未受扰系统式(8.8.4)不是拓扑等价的。

同理，如果微分同胚 $x\mapsto F(x)$ 有非双曲不动点，则此离散动力系统也是结构不稳定的。我们再利用流的闭轨和 Poincaré 映射的关系，可知如果系统式(8.8.4)有非双曲闭轨，则此系统是结构不稳定的。同理，如果微分同胚有非双曲周期轨线，则此离散动力系统也是结构不稳定的。

例 3 如果平面系统

$$\dot{x} = f(x), x \in R^2 \tag{8.8.5}$$

有连结鞍点的同宿或异宿轨线，则此系统是结构不稳定的。我们以异宿轨线说明之。设系统式(8.8.5)有连结鞍点 p_1 和 p_2 的异宿轨线 $\gamma=W^u(p_1)\cap W^s(p_2)$（图 8.22($a$)）。如果对式(8.8.5)加上一个适当的扰动，就可能把鞍点连线撕开（如图 8.22(b)。显然扰动系统与未受扰系统不是拓扑等价的。

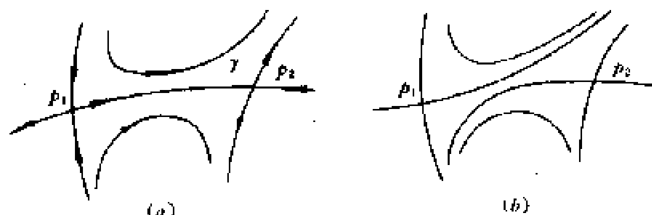


图 8.22

但是例 3 的结果不能直接用于 $n\geqslant 3$ 的高维系统。为了将上述结果推广到一般的系统式(8.8.4)，我们引入横截性(transversality)的概念。

定义 2 设 M,N 是 R^n 中的两个光滑子流形，且在点 $p\in M\cap N$ 处有（记号 + 不必是直和）

$$R^n = T_p(M) + T_p(N)$$

其中 $T_p(M)$ 和 $T_p(N)$ 分别为 M,N 在点 p 处 切空间，则称 M 和 N 在点 p 处是横截的。

容易看到，如果平面系统式(8.8.5)有连结鞍点的同宿或异宿轨线，则鞍点的相应稳定流形和不稳定流形重合，故它们非横截相交。于是，例 3 的结果可以重新表述为适用于一般系统式(8.8.4)的形式。如果系统式(8.8.4)的平衡点的稳定流形和不稳定流形非横截相交，则此系统是结构不稳定的。上述结论对系统式(8.8.4)的闭轨、离散动力系统的不动点，或周期轨线的稳定流形和不稳定流形来说也是适用的。

我们由上述讨论可知，若系统式(8.8.4)是结构稳定的，则此系统的一切平衡点和闭轨都是双曲的，且它们的稳定流形和不稳定流形在相交时都是横截的。对于离散动力系统也有类似的结论。然而，正如我们在下面要见到的那样，单靠上述条件一般并不足以保证动力系统的结构稳定性。因为结构稳定性研究需要涉及更细致的全局分析，所以，往往是十分困难复杂的。

现在介绍关于平面向量场的结构稳定性的重要结果。记平面单位圆盘 $B^2=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$。考虑系统

$$\dot{x}=P(x,y),\dot{y}=Q(x,y),(x,y)\in B^2 \tag{8.8.6}$$

设函数 $P,Q\in C^1(B^2,R)$（即向量场 $(P,Q)\in\mathscr{X}^1(B^2)$），且向量场 (P,Q) 与 B^2 的边界 ∂B^2 是无切的。

定理 1（Андронов－Понтрягин 定理） 设 $(P,Q)\in\mathscr{X}^1(B^2)$，则系统式(8.8.6)为结构稳定的必要且充分条件是：

(1) 式(8.8.6)有有限个平衡点和闭轨，且它们都是双曲的；

(2) 式(8.8.6)不存在从鞍点到鞍点的轨线。

本定理的证明较长，请参看[9]、[13]。这里只对定理的条件作一些说明：条件(1)要求系统式(8.8.6)的平衡点只能是汇、源或鞍点，闭轨只能是稳定(或不稳定)的单重极限环，且它们的数目都是有限的，这个条件显然是必要的，条件(2)要求系统式(8.8.6)不存在连结鞍点的同宿或异宿轨线，这个条件显然也是必要 。由此可见，对于结构稳定的平面系统式(8.8.6)，鞍点的分界线是不会相交的(图 8.23(a))。事实上，由条件(2)，鞍点分界线不会非横截相交；又由解的唯一性，它们也不会如图 8.23(b)所示那样横截相交。

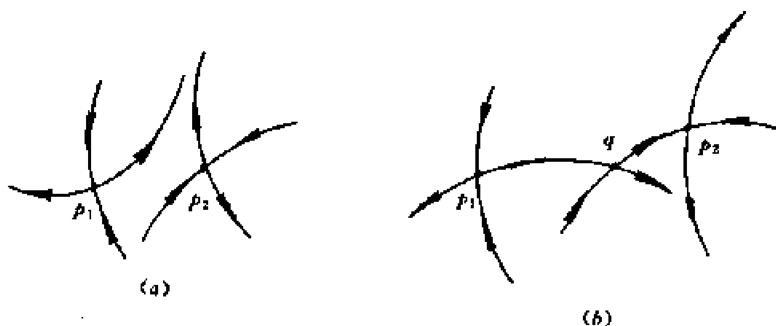


图 8.23

对平面向量场，如果有紧集 $D\subset R^2$，使得向量场与 ∂D 是无切的，即在 ∂D 上轨线都是向内(或向外)的，则定理 1 也可以用于 D 上的向量场。此外，定理 1 还可推广到二维可定向的紧流形 M^2（如 R^3 的球面或环面等）上的系统，这时有下面的结果。

定理 2(Peixoto 定理) 设 M^2 是二维可定向的紧流形，$f\in\mathscr{X}^1(M^2)$，则向量场 f 是结构稳定的必要充分条件是：

(1)此系统有有限个平衡点和闭轨，且它们都是双曲的；

(2)不存在从鞍点到鞍点的轨线；

(3)此系统的非游荡集仅由平衡点和闭轨组成。

本定理的证明请参看[9]，定理 2 是定理 1 的推广，因为对于 B^2 上的系统来说，条件(3)可由(2)直接导出。事实上，对平面自治系统来说，非游荡集只能由平衡点、闭轨、同宿环和异宿环组成，而条件(2)表明此时不存在同宿环或异宿环，故条件(3)必成立。

定理 3(Peixoto 稠密性定理) 设 M^2 是二维可定向的紧流形，记 $\mathscr{X}^1(M^2)$ 中一切结构稳定的向量场构成的子集为 Σ，则 Σ 在 $\mathscr{X}^1(M^2)$ 中是开且稠密的。

本这理的证明请参看[9]。定理 3 表明，在 $\mathscr{X}^1(M^2)$ 中结构稳定系统是非常"普遍"的，从而即使是结构不稳定的系统，也可以用结构稳定的系统任意地逼近。为了进一步的说明，我们引入通有性(genericity)的概念。

定义 3 设 V 是一个度量空间，S 是 V 的一个子集，如果 S 是可数个在 V 中稠密的开子集的交，则称 S 是一个剩余集(residual set)。

特别地，当 S 本身是 V 的一个稠密开集时，S 是一个剩余集。

例 4 $S=\{x|x\neq 0\}$ 在 $V=R$ 中是一个剩余集，因为 S 在 V 中是一个稠密开集。

例 5 全体无理数的集合 S 在 R 中是一个剩余集，事实上，记有理数集为 $Q=\bigcup\limits_k q_k$，其中 q_k 为有理数，Q 是一个可数集，于是 $S=\bigcap\limits_k(R\backslash\{q_k\})$，其中每个集合$(R\backslash\{q_k\})$在 R 中是稠密开集，从而 S 是一剩余集，注意，Q 不是剩余集。

例 6 $S=\{(x,y)|x^2-y^2\neq k^2, k=1,2,\cdots\}$ 在 $V=R^2$ 中是一个剩余集。

定义 4 如果在 $\mathscr{X}^1(U)$(或 $\mathrm{Diff}^1(U)$)中，满足某个性质 P 的向量场(或微分同胚)的集合是一个剩余集，则称性质 P 是通有的。

动力系统集合的某个通有性质 P 表示该性质在这个动力系统集合中是"普遍存在"的和"正常"的。与通有性相反的概念是退化性(degeneracy)。

定义 5 如果在 $\mathscr{X}^1(U)$(或 $\mathrm{Diff}^1(U)$)中，满足某个性质 P 的向量场(或微分同胚)的集合的补集是一个剩余集，则称性质 P 是退化的。

例 7 在 $\mathscr{X}^1(U)$(或 $\mathrm{Diff}^1(U)$)中，我们定义性质 P_1 如下：每个平衡点(或不动点)和闭轨(或周期轨线)都是双曲的，且它们的稳定流形和不稳定流形在相交时都是横截的，于是性质 P_1 是通有的。

例 8 在 $\mathscr{X}^1(U)$(或 $\mathrm{Diff}^1(U)$)中，我们定义性质 P_2 如下：非游荡集 Ω 是平衡点与闭轨(或不动点与周期轨线)的闭包，于是性质 P_2 也是通有的。

由定理 3 可见，在向量场的集合 $\mathscr{X}^1(M^2)$ 中，结构稳定性是通有的，而结构不稳定性是退化的(当然，对 $\mathscr{X}^1(B^2)$ 有同样的结论)。

目前，关于二维动力系统结构稳定性的大多数重要结果，都是对二维紧流形取得的，然而，在实际应用中用到的流形常常不是紧的，如相平面 R^2，因此有必要研究二维开流形上动力系统的结构稳定性问题，但在此不打算介绍了。不过应当指出，二维紧流形上的结果对于二维开流形上的研究有很重要的参考价值。

高维微分动力系统的结构稳定性问题当然更加困难了，目前只能对某些有简明的拓扑特征且有一定的广泛性的动力系统类(如所谓"Morse-Smale"系统)进行研究，下面只作一些说明。

首先，对于 n 维向量场(微分同胚)，平衡点和闭轨(不动点和周期轨线)的双曲性及稳定

流形与不稳定流形的横截相交性都是结构稳定系统所必需的。应当注意，对于维数大于 2 的向量场（或维数大于 1 的微分同胚），稳定流形与不稳定流形在同宿或异宿轨线上可以横截相交。

其次，对于维数大于 2 的向量场（或维数大于 1 的微分同胚），全体结构稳定系统组成一个开子集，但不一定是稠密的，从而结构稳定性不必是通有的性质。

最后给出几个简单的结果。

定理 4 设 $U\subset R^n$ 是一个紧集，$f\in\mathscr{X}^1(U)$。如果 f 满足下列性质：

(1) f 只有一个平衡点 $p\in U$，且它是汇（或源）；

(2) f 在边界 ∂U 上指向内部（或外部）；

(3) 对一切 $x\in U$，$\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi_t(x)=p$（或 $\lim\limits_{t\to-\infty}\varphi_t(x)=p$），则 f 是结构稳定的。

定理 4 的证明请参看[9]，对梯度系统式(8.2.7)有：

定理 5 设 $U\subset R^n$ 是一个紧集，$f=-\nabla V$ 是 U 上的一个梯度向量场，f 与 ∂U 是无切的。如果 f 在 U 中的一切平衡点都是双曲的，且它们的稳定流形与不稳定流形在相交时是横截的，则 f 是结构稳定的。此外，在梯度系统的集合中，结构稳定的系统组成稠密开子集。

对于 Hamilton 系统，式(8.2.8)不存在源或汇，因此双曲平衡点只能是鞍点。显然，如果式(8.2.8)有非双曲平衡点（如中心），或者过鞍点的稳定流形与不稳流形非横截相交，则该系统是结构不稳定的。

习 题 八

1. 证明流形 M 上已知向量场的流 φ_t（或微分同胚）的非游荡集 $\Omega(\varphi)$（或 $\Omega(f)$）是闭的不变集。

2. 证明：$x\in\Omega(f)$ 的充要条件是对 x 的任一邻域 U，存在 $n_k\to+\infty$ 使 $f^{n_k}(U)\cap U\neq\varnothing$。

3. 考察系统

$$\dot{x}=x-x^3,\dot{y}=-y,(x,y)\in R^2$$

试确定其非游荡集，证明在 x 轴上的闭区间$[-1,1]$是一个吸引集，但其中的大多数点都是游荡点。试绘出相图，并说明上述结果。

4. 对于平面向量场 $\dot{x}=x,\dot{y}=2y$，在 $x>0$ 部分作出适当变换使其轨线均变为平行直线。

5. 如果平面自治系统的非闭轨线 γ 分别以周期轨线 Γ_1 和 Γ_2 为其 ω 极限集和 α 极限集，证明 Γ_1 和 Γ_2 不会重合。

6. 证明线性向量场是双曲的当且仅当每一轨线的 ω 极限集或者是原点或者是空的。

7. 讨论系统

$$\begin{cases}\dot{x}=2x(1+x^2-2y^2)\\ \dot{y}=-y(1-4x^2+3y^2)\end{cases},(x,y)\in R^2$$

的 ω 极限集和 α 极限集。

8. 讨论下列在极坐标中给出的平面自治系统在 $r=1$ 附近的轨线情形，并问它们是否遵从 Poincaré—Bendixson 定理：

(1) $\dot{r}=r-r^3,\dot{\theta}=1-\cos 2\theta$；

(2) $\dot{r}=rf(r^2),\dot{\theta}=(r^2-1)^2$。

其中(2)中的函数 $f(\cdot)$ 满足 $f(1)=0,f'(1)<0$。

9. 考察线性系统 $\dot{x}=Ax\ (x\in R^3)$，如果 A 的特征值为 λ,μ,ν 且

(1) $\lambda<\mu<\nu<0$；

(2)$\lambda<0,\mu=a+bi,\upsilon=a-bi(a<0,b<0)$;

(3)$\lambda>0,\mu=a+bi,\upsilon=a-bi(a>0,b<0)$;

(4)$\lambda<\mu<0<\upsilon$;

(5)$\lambda<0<\mu=\upsilon$,且 A 可对角化。

绘出它们的相图。

10. 利用对下列系统的相图的分析,试确定其平衡点的全局稳定流形和不稳定流形。

(1)$\dot{x}=-x+x^2,\dot{y}=x+y,(x,y)\in R^2$;

(2)$\dot{x}+\sin x=0,x\in R$。

11. 利用中心流形研究下列系统的原点的稳定性。

(1)$\dot{x}=ax^2-y^2,\dot{y}=-y+x^2+xy,(x,y)\in R^2$,常数 $a\in R$;

(2)$\dot{x}=x^2y+az^2,\dot{y}=-y+x^2+zy,\dot{z}=z-y^2+xy,(x,y,z)\in R^3$,常数 $a\in R$。

12. 证明平面系统

$$\dot{x}=(1-x^2-y^2)x-y$$
$$\dot{y}=x+(1-x^2-y^2)y$$

有唯一的闭轨 Γ。计算它的 Poincaré 映射,并证明 Γ 是一个周期吸引子。

13. 考察系统

$$\dot{r}=r(1-r^2),\dot{\theta}=1,\dot{z}=\mu-z^2$$

其中(r,θ,z)是柱坐标。利用 Poincaré 映射研究当 $\mu<0,\mu=0$ 和 $\mu>0$ 时,此系统闭轨的稳定性,并确定这些闭轨的稳定流形和不稳定流形。

14. 分析下列系统的结构稳定性。

(1)$\dot{x}=x^2$;

(2)$\ddot{x}=\sin x$;

(3)$\ddot{x}+\dot{x}^2+x=0$;

(4)$\ddot{x}+(x^2-1)\dot{x}+x=0$。

第九章　分支问题的数学方法和应用

分支理论为研究自然界各种复杂现象提供了有效途径，构成了非线性动力系统近代理论的重要内容。本章叙述常微分方程分支问题的基本理论、主要方法及一些应用和进展。

§9.1　分支问题的基本概念

我们已经讨论过动力系统的结构稳定性问题，本章将研究动力系统（特别是常微分方程）的分支问题。如果某个动力系统是结构不稳定的，则任意小的适当的扰动都会使系统的拓扑结构发生突然的变化，我们称这种变化为分支（bifurcation），亦称为分叉、分岐、分岔。由于当分支出现时，系统必定是结构不稳定的，可见分支问题与结构稳定性有密切的联系。动力系统的研究不但要讨论结构稳定性问题，而且也应当考虑由于结构不稳定性而引起的定性性态可能的变化。此外，在动力系统中还可能通过一系列的分支导致浑沌运动的出现，这表明分支问题与浑沌运动也有密切的联系。非线性动力系统的分支问题包含十分丰富的内容，它是动力系统和非线性微分方程研究的重要组成部分。

对分支问题的研究可以追溯到18世纪以来对天体力学、弹性力学、流体力学和非线性振动中的一些失稳现象的探讨，因此分支问题有着深刻的应用背景。不过，长期以来分支问题研究主要是在应用领域中进行，直到本世纪70年代，由于动力系统、非线性分析和非线性微分方程等方面研究的推动，以及强有力的数值计算手段的协助，才开始形成分支的数学理论和方法，并在力学、物理学、化学、生物学、生态学、自动控制、数值计算、工程技术，以及经济学和社会学中得到广泛的应用。

分支理论所关心的基本问题是分支点（或分支解的求出）及分支解稳定性的判据。到目前为止，理论上研究分支解的方法可分为分析方法（包括变分方法）、拓扑方法、泛函分析方法（包括半群方法）等几种。应用泛函分析方法主要是将高维或无穷维的问题转化为低维（大多数情形是转化为一维或二维）的问题，特别值得提出和注意的有两种方法。其一是 Liapunov—Schmidt 方法。这种方法将方程、解空间分解成有限维和无限维两部分，无限维部分是可解的，因而分支的有关信息全部包含在有限维部分。其二是中心流形方法。这种方法将涉及的问题转化为有限维问题，将解吸引到中心流形上（如对应某一特征值的特征向量空间），而此中心流形是有限维的。这两种方法都是证明存在性的较好方法，虽然它们也能构造解，但需要大量的计算。另外，采用小参数展开方法（或奇异摄动方法），依靠隐函数存在定理和 Fredholm 抉择定理，能够有效地研究局部性问题，它既能确定分支解的定性性质，又能计算出局部范围内的分支解。而要研究大范围的整个全解图，只有靠计算机对方程直接进行数值求解，这通常是必须采用的方法。当前对分支的研究无论在理论上还是应用上都在迅速深入地发展着。

在实际应用中，许多系统都含有一个或多个参数，我们当然关心当参数连续地变动时，系统的拓扑结构是否会发生变化，这就是含参数系统的分支问题。

例1　考虑一维系统

$$\dot{x} = \mu x - x^3, x \in R \tag{9.1.1}$$

其中 $\mu \in R$ 是参数。

容易见到，当 $\mu \leqslant 0$，式(9.1.1)有唯一的平衡点 $x=0$，它是渐近稳定的。当 $\mu > 0$ 时，式(9.1.1)有三个平衡点，其中 $x=0$ 是不稳定的，而 $x = \pm\sqrt{\mu}$ 是渐近稳定的，在图 9.1 上的铅直垂线上画出了当 μ 固定时，系统式(9.1.1)的相图。此外，图 9.1 还说明系统式(9.1.1)的平衡点随 μ 变化的情况，其中实线代表有稳定平衡点(记为 s)，虚线代表不稳定平衡点(记为 u)，显然，当 $\mu \leqslant 0$ 和 $\mu > 0$ 时，系统有不同的拓扑结构，这表明系统式(9.1.1)的拓扑结构在 $\mu = 0$ 处发生突然变化，即这时出现平衡点分支(称为叉形分支)。

例 2 考虑平面系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x[\mu - (x^2 + y^2)] \\ \dot{y} = x + y[\mu - (x^2 + y^2)] \end{cases} \quad (x, y) \in R^2 \tag{9.1.2}$$

其中 $\mu \in R$ 是参数。

利用极坐标，式(9.1.2)可写成

$$\left.\begin{aligned} \dot{r} &= r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{9.1.3}$$

由此可见，当 $\mu \leqslant 0$ 时，式(9.1.2)有唯一的渐近稳定焦点(0,0)；当 $\mu > 0$ 时，(0,0)变为式(9.1.2)的不稳定的焦点，此时还有一个稳定的极限环 $r = \sqrt{\mu}$。在图 9.2 上与 μ 轴垂直的截面上

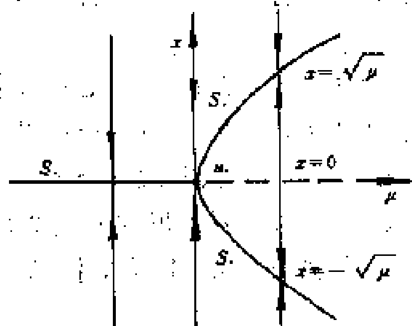


图 9.1

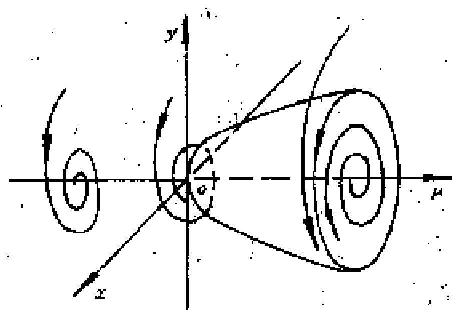


图 9.2

画出了当 μ 固定时系统式(9.1.2)的相图。此外，图 9.2 还说明了式(9.1.2)的平衡点和极限环随 μ 变化的情况。容易见到，系统式(9.1.2)的拓扑结构在 $\mu = 0$ 处发生突然变化，即这时出现分支(称为 Hopf 分支)。

本章着重讨论含参数的常微分方程描述的动力系统的分支问题，先介绍一些有关的基本概念。设区域 $U \subseteq R^n$，$J \subseteq R^m$。考虑含参数的常微分方程系统

$$\dot{x} = f(x, \mu) \tag{9.1.4}$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in U \subseteq R^n$ 称为状态变量，$\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_m)^T \in J \subseteq R^m$ 称为分支参数(亦称为控制变量)。设对于固定的 $\mu \in J$，有 $f(x, \mu) \in \mathscr{X}^1(U)$。

定义 1 设当参数 μ 连续地变动时，给定的系统式(9.1.4)的拓扑结构在 $\mu_0 \in J$ 处发生突然变化，则称系统式(9.1.4)(即向量场 $f(x, \mu)$)在 $\mu = \mu_0$ 处出现分支，并称 μ_0 为一个分支值(临界值)。在参数 μ 的空间中，由分支值组成的集合称为分支集。

定义 1 给出的含参数系统的分支概念是对 $\mathscr{X}^1(U)$ 的子集 $\{f(x, \mu) \mid \mu \in J\}$($f$ 给定)而言的，这与在向量场集合 $\mathscr{X}^1(U)$ 上讨论的一般分支概念是有区别的，显然后者的研究范围比前

者更广，然而，在实际应用中经常遇到含参数系统的分支问题，而且每个向量场 $f(x,\mu)$ 都与参数空间 R^m 中的点 μ 对应，这给分支研究带来很大的方便，因此我们主要研究这类分支问题。

为了清楚地表示分支情况，我们在 (x,μ) 空间中画出系统式(9.1.4)的极限集（如平衡点、极限环等）随参数 μ 变化的图形，称为分支图。图 9.1 和图 9.2 就是分支图。

现在考虑 $\mathscr{X}^1(U)$ 中所有 m 个参数的向量场组成的子集

$$D = \{f(x,\mu) \mid f \in \mathscr{X}^1(U), \mu \in J \subset R^m\}$$

定义 2 设 $\mu_0 \in J$ 是 $f \in D$ 的一个分支值。如果有 f 的某个邻域 $W \subseteq D$，使得对于任何 $g \in W$ 存在一同胚 $h: U\times J \to U\times J, (x,\mu) \mapsto (y(x,\mu), \nu(\mu))$，它把向量场 $f(x,\mu)$ 的轨线映为向量场 $g(y,\nu)$ 的轨线，并保持时间定向，则称 f 在 μ_0 处的分支是通有（非退化）的；否则称 f 在 μ_0 处的分支是退化的。

显然，在 D 中的小扰动不会改变通有分支的定性性态，但是退化分支则不然，因此我们可以认为，通有分支是"稳定"的，退化分支是"不稳定"的。在以下几节中我们将会看到，通过适当地引进附加参数的方法，可以把退化分支扩展成通有分支。

一般地说，完整的分支分析需要研究向量场的全局拓扑结构，这是十分困难复杂，甚至是难以完成的。在实际应用中，有时只关心在平衡点或闭轨附近轨线的拓扑结构的变化，即只研究在平衡点或闭轨的某个邻域内的向量场的分支。这类分支问题统称为局部分支。如果在分支分析中需要考虑向量场的全局性态，则称为全局分支。当然，"局部"和"全局"是相对而言的，局部分支有时也会影响向量场的全局结构。本章主要讨论局部分支问题。

习惯上还可按研究对象把分支问题分为静态分支和动态分支。静态分支研究静态方程

$$f(x,\mu) = 0, x \in U \subseteq R^n, \mu \in J \subseteq R^m \tag{9.1.5}$$

的解的数目随参数 μ 变动而发生的突然变化。动态分支研究动态方程式(9.1.4)的解（首先是极限集）的拓扑结构随参数 μ 变动而发生突然变化。动态分支就是在定义 1 中提到的"分支"。在动态分支问题中，除了研究平衡点分支外，还要研究其他分支问题，如闭轨、同宿或异宿轨线，不变环面等的分支。由于式(9.1.5)的解对应式(9.1.4)的平衡点，因此静态分支属于平衡点分支的研究范围，即动态分支问题实际上包括了静态分支问题。然而在实际应用中许多问题其实是静态的，因而静态分支始终是分支研究的重要内容。§8.8 定理 1 可知平面向量场的分支的一般结果。

定理 1 $\mathscr{X}^1(B^2)$ 中出现分支（即结构不稳定）的必要充分条件是下列条件之一成立：

(1)存在非双曲平衡点；

(2)存在非双曲闭轨；

(3)存在同宿或异宿轨线。

为了较详细地说明当分支出现时，平面系统的拓扑结构的变化情况，我们讨论含单参数 $\mu \in R$ 的平面自治系统

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y,\mu) \\ \dot{y} = Q(x,y,\mu) \end{cases}, (x,y) \in B^2 \tag{9.1.6}$$

设 μ_0 是一个分支值，根据定理 1，系统式(9.1.6)的分支可分为三大类：

第一类，与平衡点有关的分支。

设当 $\mu=\mu_0$ 时，系统式(9.1.6)有非双曲平衡点 (x_0,y_0)，令 A 为 $\mu=\mu_0$ 时，此系统在 (x_0,y_0) 处的线性化矩阵（即导算子）。

若 A 有零特征值，则有高阶平衡点分支。如在图 9.3(a)上，当 $\mu=\mu_0$ 时，系统有一个鞍结

点(x_0,y_0)；当$\mu<\mu_0$时无平衡点，而当$\mu>\mu_0$时，有一个鞍点和一个结点，这种分支称为鞍结分支。

若A有一对纯虚特征值，且当$\mu=\mu_0$时，(x_0,y_0)是系统式(9.1.6)的细焦点，则当μ变化时，就可能从平衡点产生极限环，称为Hopf分支。例如，在图9.3(*b*)上，当$\mu\leqslant\mu_0$时，系统有稳定焦点(特别地，当$\mu=\mu_0$时它是稳定细焦点)，在它的附近无闭轨；当$\mu>\mu_0$时，此平衡点变为不稳定焦点，在它的附近有一个稳定极限环。当$\mu\to\mu_0+0$时，此极限环趋时平衡点。在前面的例2中出现的就是Hopf分支。

若A有一对纯虚特征值，且当$\mu=\mu_0$时，(x_0,y_0)是系统式(9.1.6)的真中心，即在(x_0,y_0)附近全是闭轨，则当μ变化时，有可能从其中的某些闭轨分支出极限环，而平衡点也不再是中心了。这种分支称为Poincaré分支。

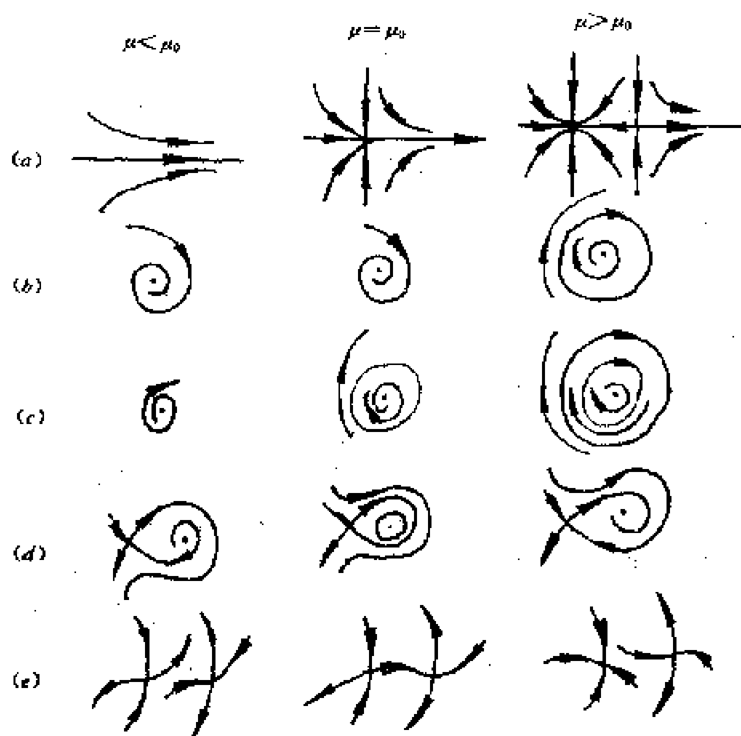


图9.3

第二类，闭轨分支。

设当$\mu=\mu_0$时，系统式(9.1.6)有非双曲闭轨Γ。利用§8.6的结果可知，此时Γ的特征指数$\oint_\Gamma \mathrm{div}(P,Q)\mathrm{d}t=0$，即$\Gamma$是多重环。当$\mu$变化时，系统可能出现闭轨，突然产生消失的现象，称为多重环分支，例如在图9.3(*c*)上，当$\mu=\mu_0$时，系统有一个二重半稳定极限环；当$\mu<\mu_0$时无闭轨，而当$\mu>\mu_0$时有两个极限环。当$\mu\to\mu_0+0$时，这两个极限环趋于一个环。这种分支称为二重半稳环分支。

第三类，同宿或异宿轨线分支。

设当$\mu=\mu_0$时，系统式(9.1.6)有同宿轨线，则当μ变化时，此同宿轨线可能突然消失(图9.3(d))，或者可能从此同宿轨线分支出极限环，这种分支称为同宿轨线分支。

若当$\mu=\mu_0$时，系统式(9.1.6)有异宿轨线，则当μ变化时，此异宿轨线可能突然消失(见图9.3(*e*))，或者可能从几条异宿轨线相连而成的异宿环分支出极限环，这种分支称为异宿轨线分支。

在前面提及的平面向量场的分支中，有些属于局部分支的范围，如高阶平衡点分支、Hopf分支、多重环分支等，有些则属于全局分支的范围，如同宿或异宿轨线分支。

上面得到的结果对于研究R^2上的向量场的分支也是很有价值。此外，我们还可以得到二维定向紧流形M^2上的向量场的分支的相应分类结果，然而高维系统的分支情况将是十分复杂的。

我们还要指出，在分支参数的变化范围内，系统可能在不同的参数值处相继出现分支，如

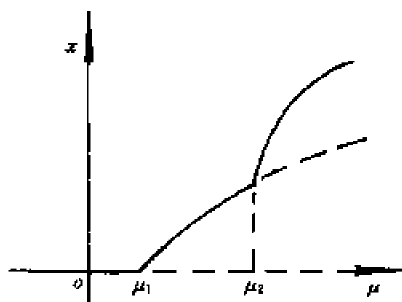


图 9.4

在图 9.4 上所示静态分支。当 $\mu=\mu_1$ 时，从基本解 $x=0$ 分支出初级分支解，接着当 $\mu=\mu_2$ 时又从初级分支解分支出二级分支解。

最后，我们把分支问题的主要研究内容简单地归纳如下：

(1)分支集的确定(即分支的必要条件和充分条件的研究)；

(2)当分支出现时，系统的拓扑结构随参数变化的情况(即分支的定性性态的研究)；

(3)分支解(尤其是平衡点、极限环等)的计算，分支解的稳定性的数值分析，以及确定每个分支点邻域内解集的结构；

(4)不同分支的相互作用问题，延拓性问题，线性化问题，非线性效应问题以及它们与动力系统的其他现象(如锁相、浑沌等)的关系。

§9.2 静态分支

在研究系统式(9.1.4)的平衡点分支问题时，静态分支是一个重要内容。静态分支研究不但能提供平衡点的数目随参数变化的信息，而且往往与稳定性的变化密切相关。我们在本节和下节中着重讨论局部静态分支问题，也经常涉及平衡点的稳定性问题。

考虑静态方程式(9.1.5)，其中向量场：$f:U\times J\subseteq R^n\times R^m\to R^n$。设 $(x_0,\mu_0)\in U\times J$ 是式(9.1.5)的解，即 $f(x_0,\mu_0)=0$。我们研究的是局部静态分支问题，因此只关心在点 (x_0,μ_0) 附近方程式(9.1.5)的解(即 f 的零点)的数目随参数 μ 变化的情况。取点 (x_0,μ_0) 的某个足够小的邻域 $\Omega\subset U\times J$，记 $n(\mu)$ 为当 μ 固定时式(9.1.5)在 Ω 内的解的数目。如果当 μ 经过 μ_0 时，$n(\mu)$ 突然发生变化，则称 (x_0,μ_0) 为一个静态分支点，μ_0 为一个静态分支值。在静态分支点 (x_0,μ_0) 附近，方程式(9.1.5)的解 (x,μ) 的集合称为 f 的静态分支图(或零点集)。总的说来，静态分支就是研究方程式(9.1.5)的多重解问题。我们在下面假设 f 对 x 和 μ 都是足够光滑的，并接着介绍确定静态分支点和分支性态的一些方法。

一、静态分支的必要条件

定理 1 设点 $(x_0,\mu_0)\in U\times J$ 使得 $f(x_0,\mu_0)=0$；在点 (x_0,μ_0) 附近，f 对 x 可微，且 $f(x,\mu)$ 和 $D_xf(x,\mu)$ 对 x,μ 是连续的。若 (x_0,μ_0) 是 f 的静态分支点，则 $D_xf(x_0,\mu_0)$ 是不可逆(即奇异)的。

证明 用反证法。假如 $D_xf(x_0,\mu_0)$ 是可逆的，则由隐函数存在定理可知，在点 (x_0,μ_0) 的某个邻域内，方程式(9.1.5)只有唯一的连续解 $x=\varphi(\mu)$，使得 $f(\varphi(\mu),\mu)\equiv0$ 且 $x_0=\varphi(\mu_0)$。这与 (x_0,μ_0) 是静态分支点的假设矛盾，故本定理得证。

定理 1 给出了 (x_0,μ_0) 为静态分支点的一个必要条件，我们再用别的方式表述这个必要条件，便于以后使用。

定义 1 如果在点 $(x_0,\mu_0)\in U\times J$ 处有 $f(x_0,\mu_0)=0$，且 $D_xf(x_0,\mu_0)$ 是不可逆(即奇异)

的，则称(x_0,μ_0)为向量场$f(x,\mu)$的一个奇异点(singularity)。[1]

利用定理1、定义1及导算子的性质，还可得到(x_0,μ_0)为f的静态分支点的几个等价必要条件：

(1)(x_0,μ_0)是f的奇异点；

(2)$f(x_0,\mu_0)=0,\det\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{(x_0,\mu_0)}=0$； (9.2.1)

(3)$f(x_0,\mu_0)=0$，且$D_xf(x_0,\mu_0)$至少有一个特征值等于零；

(4)$f(x_0,\mu_0)=0$，且$D_xf(x_0,\mu_0)$的零空间(即核)的维数$\dim\mathcal{N}(D_xf(x_0,\mu_0))\geqslant 1$。

应该注意，上面给出的静态分支的必要条件不是充分的，例如考虑方程

$$f(x,\mu)\equiv x^3-\mu=0, x\in R,\mu\in R \tag{9.2.2}$$

显然f在(0,0)处有一个奇异点，因为

$$f(0,0)=0, D_xf(0,0)=3x^2|_{(0,0)}=0$$

但是方程式(9.2.2)对任何$\mu\in R$都有唯一解$x=\mu^{\frac{1}{3}}$，因此(0,0)不是静态分支点。

在研究静态分支时，先由式(9.2.1)求出$f(x,\mu)$的奇异点，它们就是可能出现静态分支的点。然后再研究方程式(9.1.5)在奇异点附近的解的性态，以判断这些奇异点是否为静态分支点。一般说来，我们往往可以利用下面介绍的方法(LS方法或中心流形方法)将原来的方程降维，即在奇异点附近把方程式(9.1.5)的局部解问题化为较低维数的方程的局部解问题去研究。因此在静态分支研究中，实际上只需考虑约化后的方程的解的定性性态。

不失一般性，在下面总是取奇异点为(0,0)。对于任何奇异点(x_0,μ_0)，我们可以通过变换$\bar{x}=x-x_0,\bar{\mu}=\mu-\mu_0$去实现。此外，还取$U=R^n$。

二、Liapunov-Schmidt 方法

Liapunov-Schmidt方法(以后简称LS方法)是一种在研究非线性方程时降低方程维数的方法。它的主要思想是：把x-空间R^n表示成两个子空间的直和，并将方程分别投影到这两个子空间上。这样便得到两个方程，其中一个由隐函数定理得知它总是有唯一解的，于是原来方程的求解问题约化为另一个低维方程的求解问题。

设$(0,0)\in R^n\times J$是$f(x,\mu)$的一个奇异点。为简单起见，记线性算子$L=D_xf(0,0)$，$\mathcal{N}(L)$为L的零空间，$\mathcal{R}(L)$为L的值域，正交补空间$M_1=\mathcal{N}(L)^\perp$，$M_2=\mathcal{R}(L)^\perp$。设$\dim\mathcal{N}(L)=k\geqslant 1$，即$L$有$k$个特征值等于零。在实际问题中，$k$往往等于1或2。由线性代数知道，$\dim M_2=k$，$\dim\mathcal{R}(L)=\dim M_1=n-k$，于是$x$—空间$R^n$有下列直和分解

$$R^n=\mathcal{N}(L)\oplus M_1 \tag{9.2.3}$$

和

$$R^n=M_2\oplus\mathcal{R}(L) \tag{9.2.4}$$

令P为从R^n到$\mathcal{R}(L)$的正交投影算子，于是从R^n到M_2的正交投影算子为$Q=I-P$，方程式(9.1.5)等价于下面的两个方程

$$\begin{cases}Pf(x,\mu)=0 & (9.2.5b)\\ Qf(x,\mu)=0 & (9.2.5a)\end{cases}$$

[1] 注意，这里定义的"奇异点"与向量场的平衡点(亦称为"奇点")的差别。显然，f的奇异点必是平衡点，但反之不一定成立。

首先考虑方程式(9.2.5a)，根据直和分解式(9.2.3)，对于任何$x\in R^n$有

$$x = u + v \tag{9.2.6}$$

其中$u\in\mathscr{N}(L)$，$v\in M_1$，于是式(9.2.5)可写成

$$\Phi(u,v,\mu) \equiv Pf(u+v,\mu) = 0 \tag{9.2.7}$$

其中映射$\Phi:\mathscr{N}(L)\times M_1\times J\to\mathscr{R}(L)$，显然有

$$\Phi(0,0,0) = 0$$

且由导算子的链式法则有

$$D_v\Phi(0,0,0) = PD_xf(0,0) = PL = L$$

上面最后一个等式考虑到P是从R^n到$\mathscr{R}(L)$的投影算子。若限制L作用在M_1上，则线性算子$L:M_1\to\mathscr{R}(L)$是一对一且映上的，从而是可逆的。于是由隐函数定理得知，在$(u,v,\mu)=(0,0,0)$的某个邻域内，式(9.2.7)有唯一解$v=\psi(u,\mu)$(即$Pf(u+\psi(u,\mu),\mu)\equiv0$)，且满足$\psi(0,0)=0$，其中映射$\psi:\mathscr{N}(L)\times J\to M_1$。

再把$v=\psi(u,\mu)$代入式(9.2.5b)中，得到

$$F(u,\mu) \equiv Qf(u+\psi(u,\mu),\mu) = 0 \tag{9.2.8}$$

其中映射$F:\mathscr{N}(L)\times J\to M_2$，由于在奇异点$(x,\mu)=(0,0)$的某个邻域内，函数$f(x,\mu)$的零点与函数$F(u,\mu)$的零点有一一对应关系

$$x = u + \psi(u,\mu) \tag{9.2.9}$$

因此原方程式(9.2.5)的求解问题等价于在较低维数的空间$\mathscr{N}(L)$中的方程式(9.2.8)的求解问题。(9.2.8)称为约化方程(或分支方程)，它包含了研究式(9.1.5)的解在奇异点附近的性态所需的全部信息，从而简化了静态分支分析。

在应用中，我们往往在$\mathscr{N}(L)$和M_2中引进坐标，令$\{e_1,\cdots,e_k\}$和$\{e_1^*,\cdots,e_k^*\}$分别为$\mathscr{N}(L)$和M_2的正交标准基。任何$u\in\mathscr{N}(L)$可写成

$$u = \sum_{j=1}^{k} y_j e_j \tag{9.2.10}$$

记$y=(y_1,\cdots,y_k)^T\in R^k$，将式(9.2.10)代入式(9.2.8)，得到

$$g(y,\mu) \equiv Qf\Big(\sum_{j=1}^{k} y_je_j + \psi\Big(\sum_{j=1}^{k} y_je_j,\mu\Big),\mu\Big) = 0 \tag{9.2.11}$$

考虑到$Q=I-P$，且对任何$z\in R^n$，有$P_z\in\mathscr{R}(L)=M_2^{\perp}$，故

$$< e_i^*, Q_z > = < e_i^*, (I-P)_z > = < e_i^*, z >, i = 1,\cdots,k$$

利用上式，我们可将式(9.2.11)写成下面的关于$y_1,\cdots,y_m$的方程组

$$g_i(y,\mu) \equiv < e_i^*, f\Big(\sum_{j=1}^{k} y_je_j + \psi\Big(\sum_{j=1}^{k} y_je_j,\mu\Big),\mu\Big) > = 0, i = 1,\cdots,k \tag{9.2.12}$$

显然式(9.2.12)(即式(9.2.11))是与方程式(9.2.8)等价的，因此它们也称为约化方程(或分支方程)。一般地说，式(9.2.8)便于理论分析，而式(9.2.12)便于应用。

应该注意，虽然约化方程式(9.2.8)(或式(9.2.12))的维数较低，但是它的求解通常仍然是困难的。此外，约化方程还依赖于方程式(9.2.7)的解$\psi(u,\mu)$，后者也是难以求出的，从而约化方程亦难以明显地写出。不过，由于式(9.2.7)满足隐函数定理的条件，因此它的解$\psi(u,\mu)$一般可以用逐次近似法或级数展开法求得。于是我们就得到约化方程的主部，并通过其主部去研究解的许多主要性质。特别地，一维的约化方程便于用函数的奇异性理论进行研究。

一般地说，在直和分解式(9.2.3)和式(9.2.4)中，我们不一定要取补空间M_1，M_2分别与

$\mathscr{N}(L)$，$\mathscr{R}(L)$正交，因而 M_1，M_2 的选取有任意性。此外，在 $\mathscr{N}(L)$和 M_2 中的基的选取也有任意性。由此可见，约化方程不是唯一的，但是可以证明，上述的不同选取通过 LS 方法得到的约化方程实质上是等价的。

对于无限维空间的静态分支问题，我们同样可以用 LS 方法进行约化，从而当 $\mathscr{N}(L)$是有限维时可化为有限维静态分支问题去研究。

例 1 设 $f(x,\mu)=(\mu x_1+x_2-x_1^2,-x_2-x_1^2)^T$，其中 $x=(x_1,x_2)^T\in R^2$，分支参数 $\mu\in R$，研究方程

$$f(x,\mu)=0 \tag{9.2.13}$$

的静态分支。

解 首先确定函数 $f(x,\mu)$的奇异点，因为

$$D_x f(x,\mu)=\begin{pmatrix}\mu & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

所以由式(9.2.1)可知 f 有一个奇异点$(x,\mu)=(0,0)$，它是可能的静态分支点，$\mu=0$ 是可能的静态分支值。

然后我们在奇异点(0,0)附近用 LS 方法建立约化方程，记线性算子

$$L=D_x f(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

L 有特征值 0 和 -1，容易见到

$$\mathscr{N}(L)=\{(x_1,x_2)\mid x_2=0\}$$
$$\mathscr{R}(L)=\{(x_1,x_2)\mid x_1=0\}$$

因为 $\mathscr{R}(L)=\mathscr{N}(L)^{\perp}$，所以我们可取 $M_1=\mathscr{R}(L)$，$M_2=\mathscr{N}(L)$。此时直和分解式(9.2.3)与(9.2.4)相同，令 $e_1=(1,0)^T$ 和 $e_2=(0,1)^T$ 分别为 $\mathscr{N}(L)$(即 x_1 轴)和 $\mathscr{R}(L)$(即 x_2 轴)上的单位向量，任何 $x\in R^2$ 都可写成

$$x=u+v$$

其中 $u=x_1e_1\in\mathscr{N}(L)$，$v=x_2e_2\in\mathscr{R}(L)$，从 R^2 到 $\mathscr{R}(L)$的正交投影算子 P 为

$$Pz=\langle e_2,z\rangle e_2,\forall z\in R^2$$

利用上面结果，在 $\mathscr{R}(L)$上投影方程(9.2.5a)等价于

$$\langle e_2,f(x,u)\rangle=-x_2-x_1^2=0$$

即

$$x_2=-x_1^2 \tag{9.2.14}$$

由此得到

$$v=x_2e_2=-x_1^2e_2 \tag{9.2.15}$$

将式(9.2.15)代入式(9.2.13)并考虑到 $M_2=\mathscr{N}(L)$，我们可取 $e^*=e_1$，于是得到一维的约化方程

$$\begin{aligned}g(x_1,\mu)&\equiv\langle e_1,f(x_1e_1-x_1^2e_2,\mu)\rangle\\&=\mu x_1-2x_1^2=0\end{aligned} \tag{9.2.16}$$

最后我们对约化方程(9.2.16)进行静态分支分析，(9.2.16)有两个解

$$x_1=0\text{ 和 }x_1=\frac{\mu}{2} \tag{9.2.17}$$

由此可见 $\mu=0$ 确实是式(9.2.15)的静态分支值，相应的静态分支图可参看后面的图 9.7(b)，这种分支通常称为跨临界分支。利用式(9.2.14)，可以得到原来的方程 $f(x,\mu)=0$ 有两个解

$$x^{(1)}(\mu) = (0,0)^T, x^{(2)}(\mu) = \left(\frac{\mu}{2}, -\frac{\mu^2}{4}\right)^T \tag{9.2.18}$$

显然 $f(x,\mu)=0$ 也在 $\mu=0$ 处出现跨临界静态分支。由此可见，原来方程的分支性态完全可以用约化方程描述。

用 LS 方法得到的约化方程式(9.2.11)(其分量形式是式(9.2.12))还可以用来研究平衡点的稳定性。在这里我们讨论线性算子 $L=D_xf(0,0)$ 只有一个特征值等于零，而其他特征值都有负实部的情形，此时约化方程是一维的，设静态方程式(9.1.5)对应的动态方程式(9.1.4)。此外，适当选择 $\mathcal{N}(L)$ 和 M_2 的基向量 e, e^*，使得 $<e,e^*> > 0$。

定理 2 设 $(x,\mu)=(0,0)$ 是方程式(9.1.5)的静态分支点，在其附近约化方程(9.2.11)的某个解 $(y(\mu),\mu)(y\in R)$ 对应方程式(9.1.5)的解 $(x(\mu),\mu)$，则当 $g_y(y(\mu),\mu)<0$ 时，$(x(\mu),\mu)$ 是渐近稳定的；当 $g_y(y(\mu),\mu)>0$ 时，$(x(\mu),\mu)$ 是不稳定的。

定理 2 的证明请参看[18]的第一章。当约化方程的维数等于 1 时，我们可用定理 2 去判定在静态分支点附近式(9.1.4)的各个平衡点解的稳定性。

对于上面的例 1，我们取 $e^*=e=e_1$，由约化方程式(9.2.16)得到

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \mu - 4x_1$$

根据定理 2，不难知道方程式(9.2.13)的两个解，作为动态方程式(9.1.4)的平衡解时的稳定性：

(1) $x^{(1)}(\mu)$：当 $\mu<0$ 时，渐近稳定；当 $\mu>0$ 时，不稳定；

(2) $x^{(2)}(\mu)$：当 $\mu<0$ 时，不稳定；当 $\mu>0$ 时，渐近稳定。

三、中心流形方法

在静态分支研究中，我们也可以用中心流形方法去降低方程的维数。

研究方程式(9.1.5)。设 $(0,0)\in R^n\times J$ 是 $f(x,\mu)$ 的一个奇异点，记线性算子 $L=D_xf(0,0)$。我们考虑 L 的特征值没有正实部的情形，这样不但便于讨论，而且这也是实际感兴趣的情形(即稳定系统开始失稳的临界状态)。设在 L 的特征值中，有 k 个等于零，其余的有负实部。

设式(9.1.5)对应的动态方程是式(9.1.4)，即

$$\dot{x} = f(x,\mu)$$

根据上面对 L 的特征值所作的假设，我们把含参数系统式(9.1.4)写成等价的系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{u} &= A(\mu)u + F(u,v,\mu) \\ \dot{v} &= B(\mu)v + G(u,v,\mu) \\ \dot{\mu} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9.2.19}$$

其中 $x=(u,v)\in R^k\times R^{n-k}$，$\mu\in J$；当 $\mu=0$ 时，$k\times k$ 矩阵 $A(\mu)$ 的特征值都等于零，$(n-k)\times(n-k)$ 矩阵 $B(\mu)$ 的特征值都有负实部；函数 F,G 及其对 u、v 的偏导数在 $(0,0,0)$ 处等于零。在式(9.2.19)中，我们把 μ 也看作变量，这样便于了解参数 μ 变化的影响和得到分支图。由于参数 μ 是与 t 无关的，故第三个方程为 $\dot{\mu}=0$。(9.2.19)称为扩张系统。$(u,v,\mu)=(0,0,0)$ 是扩张系统(9.2.19)的一个非双曲平衡点。根据中心流形定理，式(9.2.19)在 (u,v,μ)－空间中有一个 $k+m$ 维中心流形，它在 $(0,0,0)$ 处与 (u,μ) 空间(即中心子空间)相切。由于在 $(0,0,0)$ 附近，中心流形上的流足以反映系统的动力学性态，因此我们可以根据中心流形上平衡点分支去描述原系统的平衡点分支(包括静态分支)的情况。

例 2 考虑 Duffing 方程

$$\ddot{r} + \dot{r} - \beta r + r^2 = 0 \qquad r \in R \tag{9.2.20}$$

其中 $\beta \in R$ 为参数，试讨论当 β 在 0 附近变动时系统式(9.2.20)的平衡解分支。

解 式(9.2.20)等价于含参数的平面自治系统

$$\begin{cases} \dot{r} = s \\ \dot{s} = \beta r - s - r^2 \end{cases} \qquad (r,s) \in R^2 \tag{9.2.21}$$

当 $\beta=0$ 时，式(9.2.21)在 $(r,s)=(0,0)$ 处的线性近似系统有特征值 0 和 -1。由此可见，$(r,s,\beta)=(0,0,0)$ 是式(9.2.21)的右端函数的一个奇异点。现在研究在该处的平衡点分支情况。

为了方便起见，作变换

$$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$$

我们得到式(9.2.21)的等价系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta(x+y) - (x+y)^2 \\ \dot{y} = -\beta(x+y) - y + (x+y)^2 \end{cases} \qquad (x,y) \in R^2 \tag{9.2.22}$$

为了研究分支情况，取扩张系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \beta(x+y) - (x+y)^2 \\ \dot{\beta} &= 0 \\ \dot{y} &= -\beta(x+y) - y + (x+y)^2 \end{aligned}\right\} \tag{9.2.23}$$

这个系统有一个二维的中心流形，它在 $(x,y,\beta)=(0,0,0)$ 处与 (x,β)—平面相切。若在原点附近中心流形由 $y=h(x,\beta)$ 表示，其中函数 $h: R\times R \to R$，则方程式(8.5.7)可写成

$$\Phi(h(x,\beta)) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial \beta}\right) \begin{bmatrix} \beta(x+h) - (x+h)^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta(x+h) + h - (x+h)^2 = 0$$

即

$$[\beta(x+h) - (x+h)^2] \frac{\partial h}{\partial x} = -\beta(x+h) - h + (x+h)^2 \tag{9.2.24}$$

我们可以用方程式(9.2.24)连同条件

$$h(0,0) = 0, \frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial h}{\partial \beta}(0,0) = 0 \tag{9.2.25}$$

去确定函数 h。如果

$$h(x,\beta) = ax^2 + bx\beta + c\beta^2 + O(\rho^3) \tag{9.2.26}$$

其中 $\rho=(x^2+\beta^2)^{1/2}$，则式(9.2.26)满足条件式(9.2.25)。再把式(9.2.26)代入方程式(9.2.24)，比较两边同次项的系数便可求出

$$a = 1, b = -1, c = 0$$

从而中心流形的表达式为

$$y = h(x,\beta) = -\beta x + x^2 + O(\rho^3) \tag{9.2.27}$$

我们把 $h(x,\beta)$ 的结果式(9.2.27)代入式(8.5.6)，便得到约化系统

$$\dot{x} = \beta x - x^2 + O(\rho^3) \qquad (\dot{\beta} = 0) \tag{9.2.28}$$

在图 9.5 上给出了式(9.2.28)的分支图，还标明了当参数 β 取不同值时式(9.2.28)的轨线，显然在 $(x,\beta)=(0,0)$ 处出现跨临界静态分支，$\beta=0$ 是一个静态分支值。我们还可以从轨线的方向知道当参数 β 固定时平衡点的稳定性。

在图 9.6 上给出了扩张系统式(9.2.28)的中心流形上的流的情况，由于在 $(x,y,\beta)=(0,$

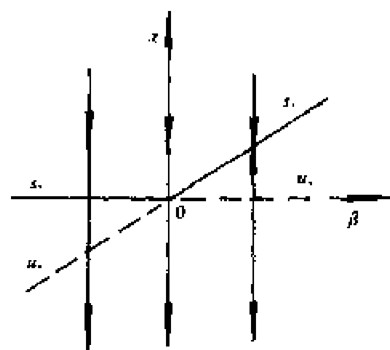


图 9.5

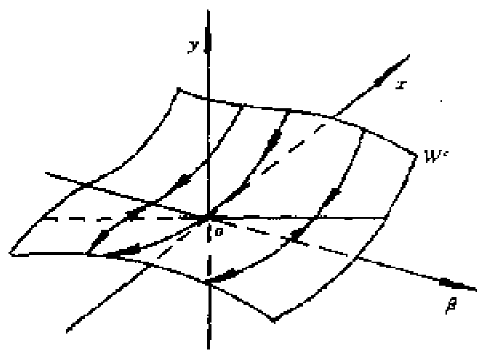


图 9.6

$0,0)$ 附近，当参数 β 固定时，系统式(9.2.22)的平衡点的稳定性也由约化系统式(9.2.28)决定(见 § 8.5 定理 2)，因此系统式(9.2.22)(从而系统式(9.2.20))也有同样的跨临界静态分支。

应该指出，在用中心流形方法研究静态分支时，不但可以知道平衡点数目的变化，而且能够讨论平衡点稳定性的变化。一般地说，中心流形方法可用于讨论与平衡点有关的局部动态分支问题。当然，与中心流形有关的计算和分析也是相当复杂的。此外，中心流形方法也可以推广到无限维空间的情形(参看[9]~[13])。

四、一些重要的单参数静态分支

下面列举三种重要的、有一维零空间的单参数静态分支的充分条件，但不给证明。

考虑单参数静态方程

$$f(x,\mu)=0,x\in U\subseteq R^n,\mu\in J\subseteq R \tag{9.2.29}$$

其中 $f:U\times J\to R^n$。设 $f(0,0)=0$，记 $L=D_xf(0,0)$。设 L 有一个(代数上)单重特征值等于零，其余特征值的实部皆不为零。L 的零特征值对应右单位特征(列)向量 $\varphi\in R^n$ 和左单位特征(行)向量 $\psi\in R^n$，即

$$L\varphi=0,\psi L=0,\|\varphi\|=\|\psi\|=1 \tag{9.2.30}$$

式(9.2.29)对应的动态方程是

$$\dot{x}=f(x,\mu) \tag{9.2.31}$$

1. 鞍结分支

如果 f 还满足下面的条件

$$a\triangleq\psi D_\mu f(0,0)\neq 0,b\triangleq\psi[D_x^2f(0,0)(\varphi,\varphi)]\neq 0 \text{ ❶} \tag{9.2.32}$$

则在 (x,μ)—空间中 $(0,0)$ 的某个邻域内，有式(9.2.29)的一条解曲线经过 $(0,0)$，它可以用参

❶ 这里 $D_\mu f(x_0,\mu_0)=\frac{\partial f}{\partial\mu}(x_0,\mu_0)$；$D_x^l f(x_0,\mu_0)(\varphi_1,\cdots,\varphi_l)$ 是 $f(x,\mu)$ 在 (x_0,μ_0) 处的 l 阶微分 $(l>1)$，并可用下式计算

$$D_x^l f(x_0,\mu_0)(\varphi_1,\cdots,\varphi_l)=\frac{\partial}{\partial t_1}\cdots\frac{\partial}{\partial t_l}f\left(x_0+\sum_{i=1}^{l}t_i\varphi_i,\mu_0\right)\Big|_{t_1=\cdots=t_l=0}.$$

数方程

$$\left.\begin{aligned} x &= x(\varepsilon) = \varepsilon\varphi + O(\varepsilon^2) \\ \mu &= \mu(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon^2 b}{2a} + O(\varepsilon^3) \end{aligned}\right\} \tag{9.2.33}$$

表示，其中参数 $\varepsilon\in R$ 且 $|\varepsilon|$ 是小量，由式(9.2.33)易知，当 a 与 b 异号(或同号时)时，方程式(9.2.29)对 $\mu<0$(或 >0)无解；而对 $\mu>0$(或 <0)有两个解，它们分别对应 $\varepsilon>0$ 和 $\varepsilon<0$，且当 $\varepsilon=0$ 时在(0,0)处汇合，这种分支称为鞍结分支，(0,0)称为方程式(9.2.29)的解的转向点(或极限点)。当 $x\in R$ 且取 $\varphi=\psi=1$ 时的静态分支图如图 9.7 的(a_1)(对 $a>0,b<0$ 情形)和($a2$)(对 $a<0,b<0$ 情形)。在图上还标出了式(9.2.33)作动态方程式(9.2.31)的平衡解时的稳定性，若对给定的 $\mu\neq0$ 有解，必有一个是稳定的(用实线表示)，另一个是不稳定的(用虚线表示)。

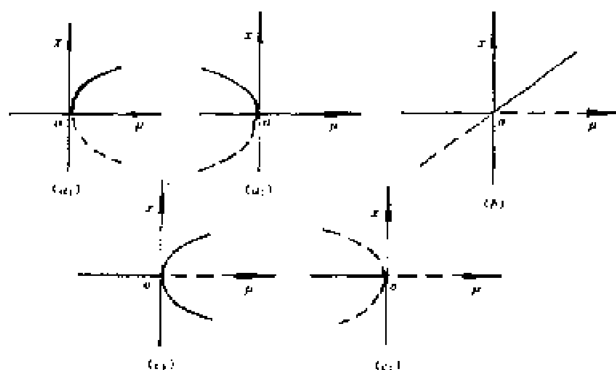


图 9.7

2. 跨临界分支

如果 f 还满足下面的条件：

(1) $f(0,\mu)\equiv0,\forall\ \mu\in J$ (9.2.34)

(2) $b\stackrel{\triangle}{=}\psi[D_x^2f(0,0)(\varphi,\varphi)]\neq0$

(3) $c\stackrel{\triangle}{=}\psi D_\mu D_x f(0,0)\varphi\neq0$ (9.2.35)

则在 (x,μ)-空间中(0,0)的某个邻域内除了平凡解 $(0,\mu)$ 之外，还有式(9.2.29)的一条非平凡解曲线经过(0,0)，它可以用参数方程

$$\left.\begin{aligned} x &= x(\varepsilon) = \varepsilon\varphi + O(\varepsilon^2) \\ \mu &= \mu(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon b}{2c} + O(\varepsilon^2) \end{aligned}\right\} \tag{9.2.36}$$

表示，其中参数 $\varepsilon\in R$ 且 $|\varepsilon|$ 是小量，由式(9.2.36)易知，方程式(9.2.29)对 $\mu\neq0$ 有两个解，而对 $\mu=0$ 只有平凡解，这种分支称为跨临界分支。当 $x\in R$ 且取 $\varphi=\psi=1$ 时的静态分支图如图 9.7(c)所示(对 $b<0,c>0$ 情形)。在图上还标出了式(9.2.31)的平衡解的稳定性，当 μ 由负变正时，平凡解由稳定变为不稳定，而非平凡解由不稳定变为稳定，这种现象称为稳定性交换。

3. 叉形分支

如果 f 还满足下面条件：

(1)对 R^n 中使得 $S\varphi=-\varphi$ 的线性变换 S 有

$$f(Sx,\mu) = Sf(x,\mu),\forall\ \mu\in J \tag{9.2.37}$$

式(9.2.37)称为对称性条件。特别是当 $x\in R$ 时，有 $S=-I$(I 为恒等变换)，于是(9.2.37)可写成

$$f(-x,\mu) = -f(x,\mu)$$

即 f 是关于 x 的奇函数。此外，易证当式(9.2.37)成立时方程式(9.2.29)对一切 $\mu\in J$ 有平凡解 (o,μ)。

(2) $c\stackrel{\triangle}{=}\psi D_\mu D_x f(0,0)\varphi\neq0,\ e\stackrel{\triangle}{=}\psi[D_x^3f(0,0)(\varphi,\varphi,\varphi)]\neq0$ (9.2.38)

则在(x,μ)－空间中$(0,0)$的某邻域内除了平凡解$(0,\mu)$之外，还有式(9.2.29)的一条非平凡解曲线经过$(0,0)$，它可以用参数方程

$$\left.\begin{aligned} x &= x(\varepsilon) = \varepsilon\varphi + O(\varepsilon^2) \\ \mu &= \mu(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon^2 e}{6c} + O(\varepsilon^4) \end{aligned}\right\} \tag{9.2.39}$$

表示，其中参数$\varepsilon\in R$且$|\varepsilon|$是小量。由式(9.2.39)易知，除了平凡解之外，当c与e异号(或同号)时，方程式(9.2.29)对$\mu>0$(或<0)还有两个非平凡解，它们分别对应$\varepsilon>0$和$\varepsilon<0$，且当$\varepsilon=0$时在$(0,0)$处汇合。这种分支称为叉形分支。当$x\in R$且取$\varphi=\psi=1$时的静态分支图见图9.7的(c_1)(对$c>0,e<0$情形)和(c_2)(对$c>0,e>0$情形)。在图上还标出了(9.2.31)的平衡解的稳定性，可以见到若对给定的$\mu\neq0$有非平凡解存在的话，它的稳定性性态与平凡解相反。如果非平凡解在μ大于分支值的范围内出现，则称分支是超临界的，如图9.7(c_1)；否则称为亚临界的，如图9.7(c_2)。

应该指出，上述结论都可以用LS方法或中心流形方法推导，此时的约化方程是一维的，当系统只有一个状态变量$x\in R$时，上述条件成为表9.1中的识别条件。

其次，在各种单参数静态分支中，鞍结分支是唯一的通有分支，其它都是退化分支。也就是说，只要对$f(x,\mu)$加上适当的小扰动，就可以使非鞍结分支的定性性态发生变化。因此在实际应用中，只有对系统加上某些限制条件(如跨临界分支的条件式(9.2.34)，叉形分支中的对称性条件式(9.2.37))，即对扰动加以限制，才能使非鞍结分叉具有保持性。此外，除鞍结分支外，其他的单参数静态分支都要通过引进附近参数的方法才能扩展成通有分支。例如，方程$\mu x-x^2=0(x\in R,\mu\in R)$在$\mu=0$处出现跨临界分支。它的扰动方程$\mu+\mu x-x^2=0$在$\mu=0$处出现鞍结分支。

§9.3 奇异性理论方法

函数的奇异性理论是本世纪60年代中期发展起来的，它使我们能够用统一而明确的方式处理不同的静态分支问题。奇异性理论在分支研究中的应用包括三方面的内容：识别(recognition)问题、开折(unfolding)问题和分类(classification)问题。这里，我们只简单地介绍一些基本结果。

本节讨论有一个状态变量$x\in R$的局部静态分支问题。在应用中经常遇到有一维零空间的静态分支问题，我们可以用LS方法得到一维的约化方程，然后用奇异性理论方法研究约化方程的静态分支问题。

一、识别问题

首先考察一个例子。

例1 考虑图9.8所示的力学系统，这是研究一维杆在受压时的屈曲现象的一个简化模型。这个系统由两根由铰链连接的刚性杆以及扭转弹簧组成。设杆长等于1，弹簧的弹性系数也等于1，在点B作用着水平压力μ，且忽略摩擦力。此外，设此系统处于静止平衡状态，并取角度x作为状态变量，试讨论其静态分支问题。

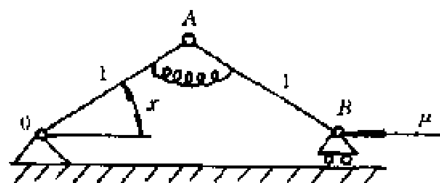


图9.8

这个系统的势能为

$$V(x,u) = \frac{x^2}{2} + 2\mu(\cos x - 1) \tag{9.3.1}$$

其中第一项是弹簧的弹性势能，第二项是外力所作的功。于是，平衡状态由下面的方程描述[1]

$$g(x,\mu) = -\frac{\partial V}{\partial x} = -x + 2\mu\sin x = 0 \tag{9.3.2}$$

易知$(x,\mu)=\left(0,\frac{1}{2}\right)$是 g 的一个奇异点，在其附近 g 有展开式

$$g(x,\mu) = 2\left(\mu - \frac{1}{2}\right)x - \frac{x^3}{6} + \text{高阶项} \tag{9.3.3}$$

我们由 § 9.1 的例 1 知道，方程

$$\mu x - x^3 = 0 \tag{9.3.4}$$

在$(x,\mu)=(0,0)$处出现叉形分支。如果式(9.3.3)中的高阶项在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$附近对函数的定性性态没有影响的话，我们可以预期方程式(9.3.2)在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$处出现叉形分支，这就涉及所谓“识别问题”。即在什么条件下，函数 $g(x,\mu)$与其 Taylor 展开式的低阶项部分有相同的定性性态。在这里暂时把例 1 搁置起来，转而讨论单参数静态分支的识别问题的基本结果，然后解决例 1 的分支问题。下面都假设区域$U\times J\subseteq R\times R$ 且$(0,0)\in U\times J$。

定义 1 设 $g,h:\in U\times J\to R$ 是两个 C^∞ 函数。如果在点(0,0)的某个邻域$U_1\times J_1$ 内存在 C^∞ 微分同胚 $T:(x,\mu)\mapsto (X(x,\mu),M(\mu))$和 C^∞ 函数 $S(x,\mu)$（其中 $X:U_1\times J_1\to R, M:J_1\to R, S:U_1\times J_1\to R$），它们满足

$$M(0) = 0, X(0,0) = 0, M'(\mu) > 0, X_x(x,\mu) > 0, S(x,\mu) > 0 \tag{9.3.5}$$

并使得在点(0,0)附近有

$$g(x,\mu) = S(x,\mu)h(X(x,\mu),M(\mu)) \tag{9.3.6}$$

则称 g 和 h 是等价的，记为 $g\sim h$。

必须指出，在局部静态分支问题中，我们只关心在某点的充分小的邻域内的局部结果。因此，严格地说，本节中涉及的“C^∞ 函数”应当是“芽”(germ)。如果两个 C^∞ 函数 f_1 和 f_2 在原点的某个邻域内相等，就认为它们是等同的，并称它们属于同一个芽 f。

由定义 1 容易证明：

推论 1 设 $g\sim h$，且(0,0)是 g 的一个奇异点（即 $g(0,0)=g_x(0,0)=0$），则(0,0)也是 h 的一个奇异点。

推论 2 设 $g\sim h$，$(x,\mu)\mapsto (X(x,\mu),M(\mu))$，由定义 1 给出，则方程 $g(x,\mu)=0$ 和 $h(X,M)=0$ 在点(0,0)附近解的数目有下面关系

$$n_g(\mu) = n_h(M(\mu)) \tag{9.3.7}$$

式(9.3.5)中的条件 $M'(\mu)>0$ 保证 M 随 μ 严格单调增加，于是当 $g\sim h$ 时，由推论 1 和推论 2 可知在点(0,0)附近，静态方程 $g(x,\mu)=0$ 和 $h(x,\mu)=0$ 有相同的分支性态。式(9.3.5)的最后两个条件（即 $X_x>0, S>0$）使得在对应的动态方程中向量场的方向相同，从而保证对应的平衡点有相同的稳定性。

---

[1] 如果系统的惯性矩等于 1，则运动方程为

$$\ddot{x} = -\partial V/\partial x \equiv g(x,\mu).$$

现在叙述静态分支的识别问题的含义。考虑一个在点(0,0)附近定义的 C^∞ 函数 $h(x,\mu)$。设(0,0)是 $h(x,\mu)$ 的一个奇异点，我们要研究 C^∞ 函数 $g(x,\mu)$ 满足什么条件才能与 h 等价，这些条件称为 h 的识别条件。显然，满足 h 的识别条件的 g 的静态分支性态与 h 相同。通常我们对一些有代表性的且比较简单的多项式函数 $h(x,\mu)$ 确定其识别条件，这些函数 h 称为规范形(normal form)。在表 9.1 上列出了一些规范形的识别条件(包括限定条件和非退化条件两部分)。

一些规范形的识别条件 表 9-1

规范形	限定条件	非退化条件
$\varepsilon x^k+\delta\mu$ $k\geqslant 2$	$g=g_x=\cdots=\dfrac{\partial^{k-1}g}{\partial x^{k-1}}=0$	$\varepsilon=\operatorname{sgn}\left(\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}\right)$ 和 $\delta=\operatorname{sgn}(g_\mu)\neq 0$
$\varepsilon x^k+\delta\mu x$ $k\geqslant 3$	$g=g_x=\cdots=\dfrac{\partial^{k-1}g}{\partial x^{k-1}}=g_\mu=0$	$\varepsilon=\operatorname{sgn}\left(\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}\right)$ 和 $\delta=\operatorname{sgn}(g_{x\mu})\neq 0$
$\varepsilon(x^2+\delta\mu^2)$	$g=g_x=g_\mu=0$	$\varepsilon=\operatorname{sgn}(g_{xx})$ 和 $\delta=\operatorname{sgn}\Delta\neq 0$
$\varepsilon x^2+\delta\mu^3$	$g=g_x=g_\mu=\Delta=0$	$\varepsilon=\operatorname{sgn}(g_{x\mu})$ 和 $\delta=\operatorname{sgn}(g_{vvv})\neq 0$
$\varepsilon x^2+\delta\mu^4$	$g=g_x=g_\mu=\Delta=g_{vvv}=0$	$\varepsilon=\operatorname{sgn}(g_{xx})$ 和 $\delta=\operatorname{sgn}(q)\neq 0$
$\varepsilon x^3+\delta\mu^2$	$g=g_x=g_\mu=g_{xx}=g_{x\mu}=0$	$\varepsilon=\operatorname{sgn}(g_{xxx})$ 和 $\delta=\operatorname{sgn}(g_{\mu\mu})\neq 0$

关于表 9.1 的几点说明：

(1)限定条件和非退化条件都是对 $(x,\mu)=(0,0)$ 取值的。在非退化条件中，要求在 sgn 后面的括号内的部分不等于零。

(2)$\Delta=\det D^2g$，其中 D^2g 是函数 $g(x,\mu)$ 的 Hesse 矩阵，即

$$D^2g=\begin{bmatrix} g_{xx} & g_{x\mu} \\ g_{x\mu} & g_{\mu\mu} \end{bmatrix} \tag{9.3.8}$$

(3)在第四行和第五行中，由于 $\Delta=0$，故 D^2g 有零特征值，记 v 为 D^2g 的对应零特征值的特征向量，并用 g_v 表示沿着 v 的方向导数等等。例如，若

$$g(x,\mu)=a(x+b\mu)^2$$

其中 $a\neq 0$，则

$$D^2g=\begin{bmatrix} 2a & 2ab \\ 2ab & 2ab^2 \end{bmatrix}$$

易见 $\Delta=0$，取 $v=(b,-1)^T$ 为 D^2g 的对应零特征值的特征向量，于是方向导数算子

$$\frac{\partial}{\partial v}=b\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial \mu}$$

(4)在第五行中，$q=g_{vvvv}g_{xx}-3g_{vvx}^2$

我们容易知道表 9.1 上的各种规范形 h 的静态分支图(参看图 9.11)。对于应用中给出的函数 g，如果满足表 9.1 的某组识别条件，就可以由对应的规范形 h 得知 g 的静态分支性态，现在考虑例 1 中的函数 $g(x,\mu)$(见式(9.3.2))。作变换 $\lambda=\mu-\dfrac{1}{2}$，$\bar{g}(x,\lambda)=g(x,\mu)$，则有

$$\bar{g}(x,\lambda)=-x+(2\lambda+1)\sin x$$

它有一个奇异点 $(x,\lambda)=(0,0)$。因为

$$\bar{g}(0,0)=\bar{g}_x(0,0)=\bar{g}_{xx}(0,0)=\bar{g}_\lambda(0,0)=0$$

$$\bar{g}_{xxx}(0,0) = -1, g_{x\lambda} = 2$$

根据表 9.1 的第二行，可知 $\bar{g}(x,\lambda)$的规范形是 $h(x,\lambda)=-x^3+\lambda x$，从而方程 $\bar{g}(x,\lambda)=0$ 如同 $-x^3+\lambda x=0$。那样，在点(0,0)处出现超临界叉形分支，其分支图有图 9.1 的形式。由于 $\mu=\lambda+\frac{1}{2}$，因此例 1 的方程 $g(x,\mu)=0$ 在点$\left(0,\frac{1}{2}\right)$处出现超临界叉形分支。

表 9.1 的结果可以用[18]的第二章给出一般方法证明。这里通过其中的一个重要结果(表 9.1 的第二行的 $k=3$ 情形)加以说明。

定理 1 设 C^∞ 函数 $g:U\times J\to R$ 满足

$$g(0,0) = g_x(0,0) = g_{xx}(0,0) = g_\mu(0,0) = 0 \tag{9.3.9}$$

$$g_{xxx}(0,0) > 0, g_{x\mu}(0,0) < 0 \tag{9.3.10}$$

则 $g(x,\mu)$与 $h(x,\mu)=x^3-\mu x$ 等价。

证 不失一般性，设 $g_{xxx}(0,0)=6, g_{x\mu}(0,0)=-1$。如果不是这样，我们可以通过$(x,\mu)$的一个微分同胚实现这一点，这并不影响等价性的结论。

本定理的证明分三步进行：

(1)记 $p(x,\mu)=g(x,\mu)-h(x,\mu)$，证明 p 可表示成

$$p(x,\mu) = a(x,\mu)h(x,\mu) + b(x,\mu)h_x(x,\mu) \tag{9.3.11}$$

事实上，由式(9.3.9)知道

$$p(0,0) = p_x(0,0) = p_{xx}(0,0) = p_\mu(0,0) = 0$$

并利用 $p(x,\mu)$在(0,0)处的 Taylor 展开式，得到

$$p(x,\mu) = x^3a_1(x,\mu) + \mu x b_1(x,\mu) + \mu^2 c_1(x,\mu) \tag{9.3.12}$$

注意到关系式

$$\left.\begin{aligned} x^3 &= \frac{1}{2}[-(x^3-\mu x) + x(3x^2-\mu)] \\ \mu x &= \frac{1}{2}[3(x^3-\mu x) - x(3x^2-\mu)] \\ \mu^2 &= 3x(\mu x) - \mu(3x^2-\mu) \end{aligned}\right\} \tag{9.3.13}$$

以及 $h=x^3-\mu x, h_x=3x^2-\mu$，且在(9.3.13)的第三式右边第一项中令 $\mu x=x^3-h$，再把第一式代入，于是式(9.3.13)中整理成

$$\left.\begin{aligned} x^3 &= \frac{1}{2}(-h + xh_x) \\ \mu x &= \frac{1}{2}(3h - xh_x) \\ \mu^2 &= -\frac{9}{2}xh + \left(\frac{3}{2}x^2 - \mu\right)h_x \end{aligned}\right\} \tag{9.3.14}$$

把式(9.3.14)代入式(9.3.12)，便得到式(9.3.11)。

(2)记 $f(x,\mu,t)=h(x,\mu)+tp(x,\mu)$，其中 p 由(1)给出，证明 p 可表示成

$$p(x,\mu) = \alpha(x,\mu,t)f + \beta(x,\mu,t)f_x \tag{9.3.15}$$

事实上，利用式(9.3.11)，我们将 f 写成

$$f(x,\mu,t) = (1+ta)h + tbh_x \tag{9.3.16}$$

于是

$$f_x(x,\mu,t) = ta_xh + (1+ta+tb_x)h_x + tbh_{xx} \tag{9.3.17}$$

由于 p 满足

$$p_\mu(0,0) = p_{x\mu}(0,0) = p_{xxx}(0,0) = 0$$

我们对式(9.3.11)求导，并令$(x,\mu)=(0,0)$，便证得

$$a(0,0) = b(0,0) = b_x(0,0) = 0 \tag{9.3.18}$$

利用式(9.3.18)，可知 a,b 可写成

$$\left.\begin{aligned} a(x,\mu) &= xA_1(x,\mu) + \mu A_2(x,\mu) \\ b(x,\mu) &= \mu B_1(x,\mu) + x^2 B_2(x,\mu) \end{aligned}\right\} \tag{9.3.19}$$

把式(9.3.19)代入式(9.3.17)，并用式(9.3.14)和 $h_{xx}=6x$，可以得到

$$f_t(x,\mu,t) = tc(x,\mu)h + [1 + te(x,\mu)]h_x \tag{9.3.20}$$

其中 e 满足 $e(0,0)=0$。

于是我们可以从式(9.3.16)和式(9.3.20)中解出 h 和 h_x，再代入式(9.3.11)，便得到式(9.3.15)

$$p(x,\mu) = \alpha(x,\mu,t)f + \beta(x,\mu,t)f_x$$

其 α,β 满足

$$\alpha(0,0,t) = \beta(0,0,t) = \beta_x(0,0,t) = 0 \tag{9.3.21}$$

(3)最后证明存在 $X(x,\mu,t)$，$S(x,\mu,t)$使得

$$h(x,\mu) = S(x,\mu,t)f(X(x,\mu,t),\mu,t) \tag{9.3.22}$$

则当 $t=1$ 时，便得到定理 1 的结论：$g\sim h$。

事实上，将式(9.3.22)对 t 求导，有

$$fS_t + Sf_t + Sf_xX_t = 0 \tag{9.3.23}$$

考虑到

$$f_t = p = \alpha f + \beta f_x$$

式(9.3.23)可写成

$$\left(\frac{S_t}{S} + \alpha\right)f + (X_t + \beta)f_x = 0 \tag{9.3.24}$$

此外，当 $t=0$ 时，考虑到 $f(x,\mu,0)=h(x,\mu)$，式(9.3.22)给出

$$h(x,\mu) = S(x,\mu,0)h(X(x,\mu,0),\mu)$$

故有

$$S(x,\mu,0) = 1, X(x,\mu,0) = x \tag{9.3.25}$$

由式(9.3.24)和式(9.3.25)，我们取下列微分方程初值问题(其中把 x,μ 当作常数)

$$\left.\begin{aligned} &X_t(x,\mu,t) + \beta(X(x,\mu,t),\mu,t) = 0 \\ &X(x,\mu,0) = x \end{aligned}\right\} \tag{9.3.26}$$

和

$$\left.\begin{aligned} &S_t(x,\mu,t) + \alpha(X(x,\mu,t),\mu,t)S(x,\mu,t) = 0 \\ &S(x,\mu,0) = 1 \end{aligned}\right\} \tag{9.3.27}$$

式(9.3.26)和式(9.3.27)的解 $X(x,\mu,t)$和 $S(x,\mu,t)$就能使式(9.3.22)成立。证毕。

值得注意的是，在表 9.1 上给出的规范形的识别条件只包括 g 的几个偏导数。我们只需计算 g 的 Taylor 展开式的有限多项，就可以判定 g 是否与规范形 h 等价，这时称 h 是有限确定的。

我们在本节开头曾经提过，在实际应用中遇到的一维静态分支问题往往是高维问题经过约化后得到的，我们通常难以得到约化方程的明显表达式，然而，当我们用 LS 方法进行约化时，就可以直接利用原来的函数的导数去计算约化函数的导数，无需知道约化函数的具体表达式。因此 LS 方法特别适合于与奇异性理论方法配合去解决静态分支问题。

设方程 $f(y,\mu)=0$(其中 $f:R^n\times R\to R^n$)经过 LS 方法得到一维的约化方程 $g(x,\mu)=0$(其中 $g:R\times R\to R$)。设(0,0)是 f 的一个奇异点，记 $L=D_yf(0,0)$，e 和 e^* 分别为 $\mathscr{N}(L)$和 $M_2=\mathscr{R}(L)^\perp$上的单位基向量，P 为从 R^n 到 $\mathscr{R}(L)$的正交投影算子。此外，我们采用式(9.2.32)中脚注中的微分记号(在这里都是对$(y_0,\mu_0)=(0,0)$取的，故略去(0,0)，如 $D_y^2(e,e)$就是 $D_y^2(0,0)(e,e)$，等等)，下面列举约化函数 g 的一些偏导数计算公式，它们可以用隐函数微分法求出(参看[18]第一章§3)。读者还可以自行推导更多的公式。

(1)$g_x(0,0)=0$;

(2)$g_{xx}(0,0)=\langle e^*,D_y^2f(e,e)\rangle$;

(3)$g_{xxx}(0,0)=\langle e^*,D_y^3(e,e,e)-3D_y^2f(e,L^{-1}PD_y^2f(e,e))\rangle$;

(4)$g_\mu(0,0)=\langle e^*,D_\mu f\rangle$;

(5)$g_{x\mu}(0,0)=\langle e^*,D_\mu(D_yf\cdot e)-D_y^2f(e,L^{-1}PD_\mu f)\rangle$。

必须指出，在计算上述导数中，主要困难是求逆算子 L^{-1}，但有两种情形可以避免或减少这种麻烦：

(1)f 是 y 的奇函数，即 $f(-y,\mu)=-f(y,\mu)$，这时有 $D_\mu f(0,0)=0$ 和 $D_y^2f(0,0)=0$，因此有

$$g_{xx}(0,0)=g_\mu(0,0)=0$$
$$g_{xxx}(0,0)=\langle e^*,D_y^3f(e,e,e)\rangle$$

(2)对于一切 μ 有 $f(0,\mu)=0$，这时有 $D_\mu f(0,0)=0$，因此有

$$g_\mu(0,0)=0$$
$$g_{x\mu}(0,0)=\langle e^*,D_\mu(D_yf\cdot e)\rangle$$

我们还要指出，前面都是在规范形 h 给定时讨论它的识别条件，至于如何根据给定的 g 去选取合适的规范形 h 通常是一个十分复杂的问题，我们在此不予讨论。

二、开折问题

这段讨论当分支方程受到小扰动时，在分支性态受到的影响。分支问题中的方程是物理现象的一个理想化的数学模型。然而真实状态往往与理论状态有微小的差别，称为非完全性(imperfection)。我们把非完全性看作对理想系统的一个小扰动，对于这种扰动所引起的分支性态变化研究称为非完全分支问题。非完全性可以通过引进一些附加参数的方法去描述，因此需要扩展为多参数分支问题，这就涉及所谓"开折"的问题。

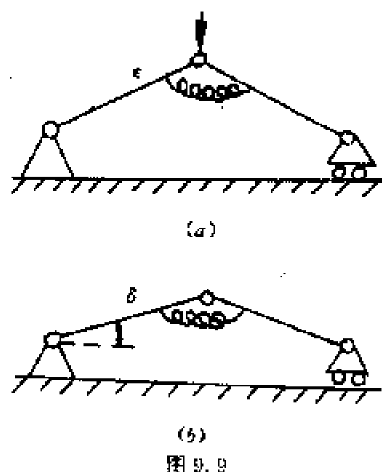


图 9.9

例 2 在例 1 系统的基础上进一步考虑两种非完全性而得到的力学系统。一种非完全性反映结构重量的影响，并采取作用在中间铰链向下的力 ε 表示(图 9.9(a))，另一种非完全性反映弹簧的非对称性，并用零扭矩位置 $x_0=\delta$ 表示(图 9.9(b))；如果弹簧是对称的，则 $\delta=0$。于是我们用两个附加的小参数 ε 和 δ 去描述系统的非完全性。设系统处于静止平衡状态，试讨论静态分支问题。

这个受扰系统的势能为

$$\tilde{V}(x,\mu,\epsilon,\delta) = \frac{(x-\delta)^2}{2} 2\mu(\cos x - 1) + \epsilon\sin x \tag{9.3.28}$$

平衡状态由下面的方程描述

$$G(x,\mu,\epsilon,\delta) \equiv -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} = -x + \delta + 2\mu\sin x - \epsilon\cos x = 0 \tag{9.3.29}$$

式(9.3.29)可以看成对未受扰方程式(9.3.2)的扰动结果。在未受扰函数 $g(x,\mu)$(见式(9.3.2))的奇异点$(x,\mu)=(0,1/2)$附近,$G(x,\mu,\epsilon,\delta)$有展开式

$$G(x,\mu,\varepsilon,\delta) \equiv -\frac{x^3}{6} + \frac{\varepsilon}{2}x^2 + 2\left(\mu - \frac{1}{2}\right)x + (\delta - \epsilon) + \text{高阶项} \tag{9.3.30}$$

我们关心能否根据式(9.3.30)的低阶项部分得知附加参数 ϵ 和 δ 变化,对方程式(9.3.29)的静态分支图的影响。更一般地,我们还关心对例 1 的系统的任何扰动,是否需要更多的附加参数去描述。在这里,暂时地把例 2 搁置,转而讨论单参数静态分支的"普适开折"问题,然后解决例 2 的问题。

定义 2 设对 C^∞ 函数 $g(x,\mu)$(其中 $g:U\times J\to R$),存在 C^∞ 函数 $G(x,\mu,\alpha)$(其中 $G:U\times J\times K\to R$, $\alpha=(\alpha,\cdots,\alpha_k)^T\in K\subseteq R^k$, $k\geqslant 0$ 且 $0\in K$),使得当 $\alpha=0$ 时有

$$G(x,\mu,0) = g(x,\mu) \tag{9.3.31}$$

则称 G 为 g 的一个 k—参数开折,α 是开折参数。特别地,G 的 0—参数开折就是函数 g 本身。

因为

$$G(x,\mu,\alpha) = g(x,\mu) + [G(x,\mu,\alpha) - G(x,\mu,o)]$$

所以我们可以把 $G(x,\mu,\alpha)$看作 $g(x,\mu)$的某个扰动函数,其中扰动与 k 个附加参数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 有关。

函数 $g(x,\mu)$有无穷多个开折,现在讨论它们之间的关系。

定义 3 设 $G(x,\mu,\alpha)$和 $H(x,\mu,\beta)$是 C^∞ 函数 $g(x,\mu)$的两个开折,$\alpha\in K_1\subseteq R^k$, $\beta\in K_2\subseteq R^l$。如果在$(x,\mu,\beta)=(0,0,0)$的某个邻域 $U\times J$ 内存在 C^∞ 函数 $S(x,\mu,\beta)$, $X(x,\mu,\beta)$, $M(\mu,\beta)$和 $A(\beta)$(其中 $S:U\times J\times K_2\to R$, $X:U\times J\times K_2\to R$, $M:J\times K_2\to R$, $A:K_2\to R^k$),S,X,M 除了当 β 固定时满足式(9.3.5)中的后三个条件之外,它们还满足

$$S(x,\mu,0) \equiv 1, X(x,\mu,0) \equiv x, M(\mu,0) \equiv \mu, A(0) = 0 \tag{9.3.32}$$

并使得在点$(x,\mu,\beta)=(0,0,0)$附近有

$$H(x,\mu,\beta) = S(x,\mu,\beta)G(X(x,\mu,\beta),M(\mu,\beta),A(\beta)) \tag{9.3.33}$$

则称 H 可用 G 分解。

在定义 3 中,式(9.3.33)表示对开折 H 的每个元素 $H(\cdot,\cdot,\beta)$,都可找到开折 G 的某个元素 $G(\cdot,\cdot,A(\beta))$与之等价。也就是说,开折 G 在等价的意义上包含了开折 H 中的一切扰动,其次,由于 $G(x,\mu,0)=g(x,\mu)$, $H(x,\mu,0)=g(x,\mu)$,故当 $\beta=0$ 时,式(9.3.33)应当给出恒等关系,从而要求此时 S,X,M,A 满足条件式(9.3.32)。最后,在定义 3 中并不要求对一切 $\beta\in K_2$ 有$(X(0,0,\beta),M(0,\beta))=(0,0)$,即当 $\beta\neq 0$ 时并不要求原点的保持性,这样对一般讨论更为方便。

例 3 令 $g(x,\mu)=x^3-\mu x$,显然

$$G(x,\mu,\beta) = x^3 - \mu x + \beta x, \beta \in R$$

是 g 的一个 1—参数开折,令 $H(x,\mu)=g(x,\mu)$为 g 的 0—参数开折,并取

$$S(x,\mu,\beta) = 1, X(x,\mu,\beta) = x, M(\mu,\beta) = \mu + \beta$$
$$A(\beta) = \beta$$

则式(9.3.33)成立，即 g 可用 G 分解。

对于许多函数 g 来说，存在某些开折 G，它们在等价的意义上包含了 g 的所有扰动函数，即 g 的每个开折都可用 G 分解。下面的定义概括了这个重要概念。

定义 4 如果 G 是 C^∞ 函数 g 的某个开折，且 g 的任何开折都可用 G 分解，则称 G 是 g 的一个全开折(versal unfolding)，在 g 的一切全开折中，所含参数的个数最小的开折称为普适开折(universal unfolding)。在 g 的全开折中的参数数目的最小值称为 g 的余维数(codimension)，记作 codim g。

必须指出，并非所有 C^∞ 函数 g 都有全开折，如果 g 没有全开折，则称 g 的余维数为无穷大。

由于 g 的普适开折在等价的意义上以最简单的形式包含了 g 的所有扰动函数，因此在研究方程 $g=0$ 受扰后可能出现的各种分支性态时有十分重要的作用。注意 g 的普适开折一般不是唯一的。

我们讨论 g 的开折 G 是普适开折的充分条件。

定义 5 记 $\mathscr{E}$ 为在 $U\times J\subseteq R\times R$ 上定义的全体 C^∞ 函数构成的向量空间，对 $g\in\mathscr{E}$ 取 $\Xi_g=\{f|f\sim g\}$。Ξ_g 在 g 处的切空间 $T(g)$ 为

$$T(g)=\{a(x,\mu)g+b(x,\mu)g_x+c(\mu)g_\mu\}\tag{9.3.34}$$

其中 $a,b\in\mathscr{E}$，c 为 J 上的 C^∞ 函数。

定理 2 函数 $g\in\mathscr{E}$ 的余维数等于切空间 $T(g)$ 的余维数[❶] 即

$$\operatorname{codim}g=\operatorname{codim}T(g)\tag{9.3.35}$$

定理 3 设 $g\in\mathscr{E}$，$\operatorname{codim}g=k$，且存在 $p_1,\cdots,p_k\in\mathscr{E}$，使得

$$\mathscr{E}=T(g)\oplus\operatorname{span}\{p_1,\cdots,p_k\}\tag{9.3.36}$$

则

$$G(x,\mu,\alpha)=g(x,\mu)+\sum_{j=1}^{k}\alpha_j p_j(x,\mu)\tag{9.3.37}$$

是 g 的一个普适开折，其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)^T\in R^k$。

定理 2 和定理 3 的证明请参看[18]。这两个定理提供了求 g 的余维数和普适开折的方法，关键在于确定 $T(g)$ 的补空间的一组基向量 $\{p_1,\cdots,p_k\}$。

例 4 求 $h(x,\mu)=x^3-\mu x$ 的余维数和普适开折。

解 由(9.3.34)得到

$$T(h)=\{a(x^3-\mu x)+b(3x^2-\mu)+cx\}\tag{9.3.38}$$

其中 $a=a(x,\mu)$，$b=b(x,\mu)$，$c=c(\mu)$，由(9.3.14)知道 $x^3,\mu x,\mu^2\in T(h)$。

对于任何 $g\in\mathscr{E}$，由 g 在(0,0)处的 Taylor 展开式有

$$g(x,\mu)=g_0(\mu)+g_1(\mu)x+g_2(\mu)x^2+g_3(x,\mu)x^3$$

易见

$$\begin{aligned}
&g_3(x,\mu)x^3\in T(h)\\
&g_2(\mu)x^2=\beta_1x^2+\beta_2\mu x+\beta_3(\mu)x^2\mu^2\\
&\qquad=\beta_1x^2(\operatorname{mod}T(h))^{❷}\\
&g_1(\mu)x=\gamma_1x+\gamma_2(\mu)\mu x\in T(h)\\
&g_0(\mu)=\delta_0+\delta_1\mu+\delta_2(\mu)\mu^2=\delta_0+\delta_1\mu(\operatorname{mod}T(h))
\end{aligned}$$

---

❶ 若向量空间 $\mathscr{E}=V_1\oplus V_2$，则定义子空间 V_1 的余维数为 $\operatorname{codim}V_1=\dim V_2$。

❷ $f_1=f_2(\operatorname{mod}T(h))$表示 $f_1-f_2\in T(h)$。

其中 β_1、β_2、γ_1、δ_0、δ_1 是常数。考虑 $3x^2-\mu\in T(h)$，故

$$g_0(\mu)=\delta_0+\delta_3 x^2(\mathrm{mod}T(h))$$

综合上述结果，有

$$g(x,\mu)=\alpha_1+\alpha_2 x^2(\mathrm{mod}T(h))$$

其中 $\alpha_1=\delta_0\in R$，$\alpha_2=\beta_1+\delta_3\in R$，这表明 $T(h)$ 的补空间是由 $\{1,x^2\}$ 张成的，于是 $\mathrm{codim}T(h)=2$。

根据定理 2 可知，codim $h=2$，再由定理 3 可知，h 的一个普适开折为

$$H_1(x,\mu,\alpha_1,\alpha_2)=x^3-\mu x+\alpha_1+\alpha_2 x^2 \tag{9.3.39}$$

容易见到，我们也可以取 h 的另一个普适开折为

$$H_2(x,\mu,\alpha_1,\alpha_2)=x^3-\mu x+\alpha_1+\alpha_2\mu \tag{9.3.40}$$

在应用中，往往需要考虑普适开折的识别问题，也就是已知 g 与规范形 h 等价，G 是 g 的一个开折，我们要判定 G 是否是 g 的普适开折。在这里给出两个重要的结果。关于它们的证明请参看[18]的第三章。

定理 4 设 C^∞ 函数 $g(x,\mu)$ 与 $h(x,\mu)=\pm x^3\pm\mu$ 等价，G 是 g 的一个 1－参数开折，则当且仅当在 $(x,\mu,\alpha)=(0,0,0)$ 处有

$$\det\begin{bmatrix} g_\mu & g_{\mu x}\\ G_\alpha & G_{\alpha x}\end{bmatrix}\neq 0 \tag{9.3.41}$$

时，$G(x,\mu,\alpha)$ 是 g 的一个普适开折。

定理 5 设 C^∞ 函数 $g(x,\mu)$ 与 $h(x,\mu)=\pm x^3\pm\mu x$ 等价，G 是 g 的一个 2－参数开折，则当且仅当在 $(x,\mu,\alpha,\beta)=(0,0,0,0)$ 处有

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & g_{x\mu} & g_{xxx}\\ 0 & g_{\mu x} & g_{\mu\mu} & g_{\mu xx}\\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\mu} & G_{\alpha xx}\\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\mu} & G_{\beta xx}\end{bmatrix}\neq 0 \tag{9.3.42}$$

时，$G(x,\mu,\alpha,\beta)$ 是 g 的一个普适开折。

与规范形的识别问题一样，普适开折的识别问题只用到开折 G 的有限多个导数，在实际应用中这会带来很大的方便。作为一个简便的例子，读者容易用定理 5 去证明(9.3.39)和(9.3.40)中的 H_1 和 H_2 都是 $x^3-\mu x$ 的普适开折。

表 9.2 中列举了一些余维不大于 3 的规范形的普适开折。下面利用普适开折去研究当分支方程受到扰动时，分支性态可能发生的变化。设 $G(x,\mu,\alpha)$(其中 $G:R\times R\times R^k\to R$)是 $g(x,\mu)$(其中 $g:R\times R\to R$)的普适开折。设(0,0)是 g 的一个奇异点。由于普适开折 G 包含了 g 的一切扰动，因此我们在开折参数 α 的空间 R^k 中讨论 G 的分支图 $\{(x,\mu)\mid G(x,\mu,\alpha)=0\}$ 是如何随 α 变化的。可以发现，对某些 α 值，g 的普适开折 G 的某些分支图在受到小扰动时，在等价的意义上保持不变，即分支是通有的。我们称这些分支图是持久的。对另一些 α 值，G 的分支图会在小扰动下改变其定性性态，即分支是退化的。我们称这些分支图是非持久的。应当指出，如果在分支图上有三种点(歧点、迟滞点(hysteresis)、双极限点(double limit point))[●]之一时，分支图就不是持久的。

● 在方程 $f(x,\mu)=0$ 的解曲线上，如果在某点处还有另外的解曲线经过，就称该点为歧点；如果过某点的切线垂直于 μ 轴，且解曲线位于此切线的两侧，就称该点为迟滞点；如果有 μ 坐标相同的两个极限点(即转向点)，就称它们为双极限点。

定义 6

(1)歧集：$\mathscr{B}=\{\alpha\in R^k \mid$ 存在$(x,\mu)\in R\times R$,使得在(x,μ,α)处有 $G=G_x=G_\mu=0\}$；

(2)迟滞集：$\mathscr{H}=\{\alpha\in R^k \mid$ 存在$(x,\mu)\in R\times R$,使得在(x,μ,α)处有 $G=G_x=G_{xx}=0\}$；

(3)双极限集：$\mathscr{D}=\{\alpha\in R^k \mid$ 存在$(x_1,x_2,\mu)\in R\times R\times R, x_1\neq x_2$,使得在$(x_i,\mu,\alpha)(i=1,2)$处有 $G=G_x=0\}$；

(4)转迁集(transition set)：$\Sigma=\mathscr{B}\cup\mathscr{H}\cup\mathscr{D}$。

转迁集就是 $G(x,\mu,\alpha)$的非持久分支图所对应的开折参数的集合，它可用 R^k 中的超曲面表示。歧集、迟滞集和双极限集对应的分支图的非持久性的三种类型(在图 9.10 上有歧集和迟滞集的例子)。当我们只考虑小扰动，即只限于在 R^k 的原点的某个小邻域 W 中讨论时，转迁集 Σ 将 W 分成若干个子区域，在每个子区域中 G 的分支图是持久的。在同一子区域内，不同的参数 α 对应的分支图是等价的。于是我们可以根据这些子区域列举 G 的全部持久分支图。

例 5 研究 $h(x,\mu)=x^3-\mu x=0$ 的扰动分支图。取 h 的一个普适开折(式(9.3.39))。

$$H(x,\mu,\alpha_1,\alpha_2)=x^3-\mu x+\alpha_1+\alpha_2 x^2$$

由于 $H_x=3x^2-\mu+2\alpha_2 x, H_\mu=-x, H_{xx}=6x+2\alpha_2$

因此可以由定义 6 得到

$$\mathscr{B}=\{(\alpha_1,\alpha_2)\in R^2 \mid \alpha_1=0\}$$

$$\mathscr{H}=\{(\alpha_1,\alpha_2)\in R^2 \mid \alpha_1=\alpha_2^3/27\}$$

$$\mathscr{D}=\varnothing$$

转迁集为

$$\Sigma=\mathscr{B}\cup\mathscr{H}$$

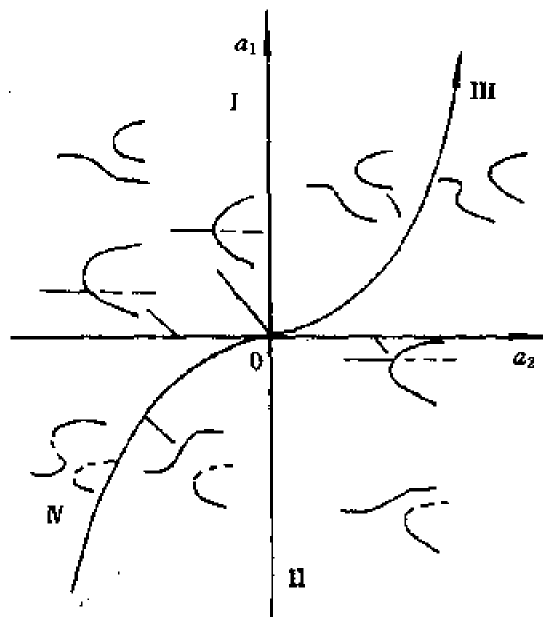


图 9.10

如图 9.10 所示，转迁集 Σ 把原点的邻域 W 分成四个子区域。在图 9.10 上还给出了各个区域及边界上的分支图。在四个子区域中，H 的分支图上的奇异点都是极限点(即转向点)，且没有双极限点。在 $\mathscr{B}$ 集(即 α_2 轴)上，H 的分支图上有歧点，在其附近出现跨临界分支。在集 H(即曲线 $\alpha_1=\alpha_2^3/27$)上，H 的分支图上有迟滞点。此外，H 的分支图上都没有双极限点。

现在我们回到例 2 的问题。作变换

$$y=-\frac{x}{\sqrt[3]{6}}, \lambda=\sqrt[3]{6}(1-2\mu), \alpha_1=\delta-\varepsilon, \alpha_2=\frac{\varepsilon}{2\sqrt[3]{36}}$$

则例 2 的平衡状态方程式(9.3.29)可写成

$$H(y,\lambda,\alpha_1,\alpha_2)=y^3-\lambda y+\alpha_1+\alpha_2 y^2+\text{高阶项}=0 \qquad (9.3.43)$$

由于 $H(y,\lambda,\alpha_1,\alpha_2)$是 $h(y,\lambda)=y^3-\lambda y$ 的一个扰动，因此方程式(9.3.43)的分支性态可以用 h 的普适开折描述。考虑到 h 的普适开折只有两个开折参数，且展开式(9.3.43)是收敛的，因此我们在$(y,\lambda)=(0,0)$附近可以略去高阶项，用截断方程 $y^3-\lambda y+\alpha_1+\alpha_2 y^2=0$ 去讨论例 2 的局部静态分支问题。在不同的小参数(α_1,α_2)下的分支图可参看图 9.10。由此还可以知道在不同的原来参数(ε,δ)下的分支图，在此不再详述。此外，我们还知道，要完整地研究扰动对例 1 的系统的分支性态的影响，只需引进两个附加参数，例如，(ε,δ)或(α_1,α_2)。

三、分类问题

我们希望把局部静态分支问题按定性性态进行分类。在这里，余维数的概念有重要的作用。由于随着余维数增加，奇异点的退化程度增大，分支情况越来越复杂，分支图越来越难以表示，因此我们只对余维数不大于 3 的奇异点进行分类，称为初等静态分支问题。对此我们有下面的结果。

定理 6 设 C^∞ 函数 $g(x,\mu)$（其中 $g:U\times J\to R$）有奇异点 $(0,0)$（即 $g(0,0)=g_x(0,0)=0$），且 $\operatorname{codim} g\leqslant 3$，则 g 必与表 9.2 中的 11 个规范形中的某个等价。

余维数不大于 3 的分支问题的规范和普适开折 表 9.2

	奇异点	余维数	规范形	普适开折
(1)	极限点	0	$\varepsilon x^2+\delta\mu$	$\varepsilon x^2+\delta\mu$
(2)	跨临界分支点	1	$\varepsilon(x^2+\delta\mu^2)\quad(\delta=-1)$	$\varepsilon(x^2-\mu^2+\alpha_1)$
(3)	孤立点	1	$\varepsilon(x^2+\delta\mu^2)\quad(\delta=+1)$	$\varepsilon(x^2+\mu^2+\alpha_1)$
(4)	迟滞点	1	$\varepsilon x^3+\delta\mu$	$\varepsilon x^3+\delta\mu+\alpha_1 x$
(5)	非对称尖点	2	$\varepsilon x^2+\delta\mu^3$	$\varepsilon x^2+\delta\mu^3+\alpha_1+\alpha_2\mu$
(6)	叉形分支点	2	$\varepsilon x^3+\delta\mu x$	$\varepsilon x^3+\delta\mu x+\alpha_1+\alpha_2 x^2$
(7)	四次折迭点	2	$\varepsilon x^4+\delta\mu$	$\varepsilon x^4+\delta\mu+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2$
(8)	孤立点	3	$\varepsilon x^2+\delta\mu^4$	$\varepsilon x^2+\delta\mu^4+\alpha_1+\alpha_2\mu+\alpha_3\mu^2$
(9)	双翼尖点	3	$\varepsilon x^3+\delta\mu^2$	$\varepsilon x^3+\delta\mu^2+\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3\mu x$
(10)	跨临界分支点	3	$\varepsilon x^4+\delta\mu x$	$\varepsilon x^4+\delta\mu x+\alpha_1+\alpha_2\mu+\alpha_3 x^2$
(11)	迟滞点	3	$\varepsilon x^5+\delta\mu$	$\varepsilon x^5+\delta\mu+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3$

注：本表中 ε 和 δ 只取 +1 或 −1。

定理 6 表明，余维数不大于 3 的 g 的奇异点只有 11 种分支性态，它们也是在实际应用中经常遇到的静态分支类型，相应的分支图和平衡点的稳定性如图 9.11 所示。

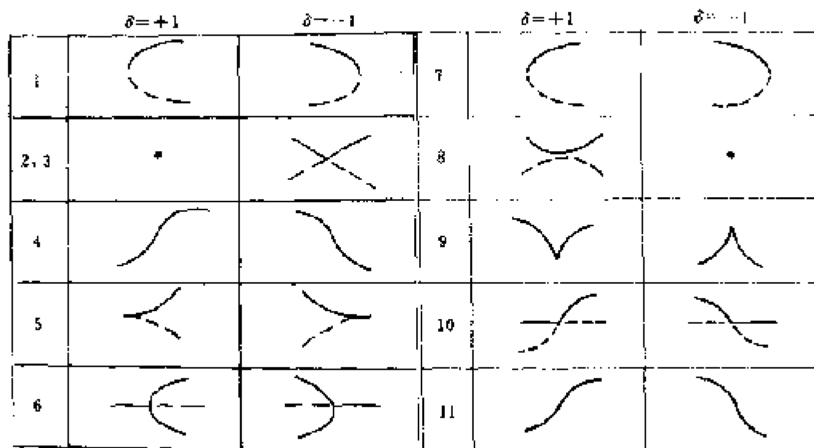


图 9.11 11 种初等分叉的分支图（$\varepsilon=-1$）

应该注意，关于平衡点的稳定性结果，图 9.11 是对动态方程 $\dot{x}=g(x,\mu)$ 而言的，而参考文献[18]是对动态方程 $\dot{x}+g(x,\mu)=0$ 而言的，因此它们是有差别的。

由于篇幅有限，我们没有给出关于上述 11 种初等分支问题的普适开折的转迁集、持久分支图及识别问题的结果。

在实际的静态分支问题中，奇异性理论不但提供了统一而方便的理论研究方法，而且还可以根据实验或数值计算得到的某些有代表性的分支结果进行讨论，从而得到完整的分支分析

结果，因此是很有用的。

§9.4 PB 规范形理论和计算方法

在微分方程研究中，我们往往需要借助变换去得到较简单的形式。Poincaré 的规范形理论使我们能在平衡点附近，通过坐标变换把微分方程化简。Poincaré－Birkhoff 规范形（以下简称 PB 规范形）不但是微分方程定性研究的重要手段，而且当它用于含参数的微分方程时，成为动态分支研究的基本工具，本节介绍 PB 规范形的基本概念和计算方法。

一、PB 规范形的概念

考虑微分方程

$$\dot{x} = f(x), x \in R^n \tag{9.4.1}$$

设 $f(x)$ 是足够光滑的，且 $f(0)=0$。现在研究对于某个给定正整数 $r\geqslant 2$，通过坐标的多项式变换，使得在 f 的 Taylor 展开式中直到 r 次的项有比较简单的形式。我们要由低次项到高次项逐步实现这个化简过程。这些步骤都是类似的，因此只需讨论其中的一个步骤。

记 $H_n^k(2\leqslant k\leqslant r)$ 是从 R^n 到 R^n 的所有 k 次齐次多项式组成的向量空间。令 $L=Df(0)$，设微分方程(9.4.1)的右边的展开式中的直到 $(k-1)$ 次的项已经化简，并写成

$$\begin{aligned} f(x) &= Lx + g_2(x) + \cdots + g_{k-1}(x) \\ &\quad + h_k(x) + o(\| x \|^k) \end{aligned} \tag{9.4.2}$$

其中 $g_i\in H_n^i(i=2,\cdots,k-1)$ 为已经化简的项，$h_k\in H_n^k$。我们现在要找一个坐标变换去化简 $h_k(x)$，且保持次数低于 k 的项不变。考虑如下形式的变换

$$x = y + P_k(y) \tag{9.4.3}$$

其中 $P_k\in H_n^k$ 为待定函数，把式(9.4.3)代入式(9.4.1)可得到

$$\dot{y} = (I + DP_k(y))^{-1} f(y + P_k(y)) \tag{9.4.4}$$

由于

$$(I + DP_k(y))^{-1} = I - DP_k(y) + o(\| y \|^k)$$

并考虑式(9.4.2)，方程式(9.4.4)化为

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ly + g_2(y) + \cdots + g_{k-1}(y) + h_k(y) - [DP_k(y)Ly - LP_k(y)] + o(\| y \|^k) \\ &= Ly + g_2(y) + \cdots + g_{k-1}(y) + h_k(y) - ad_L P_k(y) + o(\| y \|^k) \end{aligned} \tag{9.4.5}$$

其中线性算子 ad_L 由下式定义：对 $F:R^n\to R^n$ 有

$$ad_L F(y) \stackrel{\triangle}{=} [DF(y)] \cdot Ly - LF(y) \tag{9.4.6}$$

显然，值域 $ad_L(H_n^k)\subset H_n^k$。记 $B_n^k=ad_L(H_n^k)$，并取 B_n^k 在 H_n^k 中的补空间 G_n^k，即

$$H_n^k = B_n^k \oplus G_n^k \tag{9.4.7}$$

于是 $h_k\in H_n^k$ 可表示成

$$h_k(y) = f_k(y) + g_k(y), f_k \in B_n^k, g_k \in G_n^k \tag{9.4.8}$$

因为 $f_k\in B_n^k=ad_L(H_n^k)$，所以，我们可以找到 $P_k\in H_n^k$ 使得 $ad_L P_n(y)=f_k(y)$。于是方程式(9.4.5)化为

$$\dot{y} = Ly + g_2(y) + \cdots + g_{k-1}(y) + g_k(y) + o(\| y \|^k) \tag{9.4.9}$$

其中 $g_k\in G_n^k$。上述讨论对于 $2\leqslant k\leqslant r$ 都成立，因此我们可以通过一系列的坐标变换，使 $g_i\in G_n^i$

$(i=2,\cdots,r)$，即证明了下述定理。

定理1(Poincaré—Birkhoff 规范形定理)　设 $f(x)$ 是 C^r 向量场 $(r\geqslant 2)$，$f(0)=0$，$L=Df(0)$，则在原点附近存在一个坐标的 r 次多项式变换，使得在新坐标系中，方程式(9.4.1)化为下面的规范形

$$\dot{y}=Ly+g_2(y)+\cdots+g_r(y)+o(\|y\|^r) \tag{9.4.10}$$

其中 $g_i\in G_n^i(i=1,2,\cdots,r)$。

定义1　系统

$$\dot{y}=Ly+g_2(y)+\cdots+g_r(y) \tag{9.4.11}$$

称为式(9.4.1)的一个 r 阶(截断)PB 规范形。

应该注意，对于给定的 r 来说，r 阶 PB 规范形的取法一般不是唯一的。此外，定义1同样适用于复数情形。[19]把式(9.4.11)称为 r 阶 A—规范形。

在平衡点 $x=0$ 附近，截断 PB 规范形(9.4.11)与原来的系统式(9.4.1)的拓扑结构往往有密切关系，但并不一定相同。一般地说，对于给定的 r，r 阶 PB 规范形到底能在多大程度上反映原来的系统的定性性态仍然是一个未解决的问题。此外，即使 f 是解析的，在式(9.4.10)右端的部分当 $r\to\infty$ 时也不一定收敛。尽管如此，在大量的研究中发现，阶数不太高的 PB 规范形通常就能提供定性性态方面的重要信息，这对原来系统的拓扑结构的研究有很大的帮助，因此 PB 规范形是微分方程的定性研究的重要工具。

二、PB 规范形的计算

根据补空间 G_n^k 的不同取法，就有 PB 规范形的不同的计算方法。下面讨论一族有相同的线性部分的微分方程(即给定线性算子 L，但非线性部分是任意的)的 r 阶 PB 规范形的一些计算方法。通常假设 L 为 Jordan 标准形，这总可以通过坐标的线性变换去实现。

1. 矩阵表示法

由于 H_n^k 是一个有限维的向量空间，ad_L 是线性算子，因此，我们可以用矩阵表示法求出补空间 G_n^k，从而得到 PB 规范形。

命题1　设 $\{e_1,\cdots,e_l\}$ 为 H_n^k 的一个基，A 为 ad_L 在这个基下的矩阵，则 A^*(即 A 的复共轭转置矩阵)的零空间 $\mathscr{N}(A^*)$ 是 B_n^k 在 H_n^k 中的一个补空间，即 $H_n^k=B_n^k\oplus\mathscr{N}(A^*)$。

命题1容易由线性代数证得。于是我们可取 $G_n^k=\mathscr{N}(A^*)$。

例1　考虑微分方程

$$\dot{x}=f(x),x\in R \tag{9.4.12}$$

其中 $f(x)=o(|x|)$，求式(9.4.12)的2阶 PB 规范形。

解　在本例中有 $L=0$，取向量空间 H_1^2 的一个基为 $\{e\}=\{y^2\}$，$y\in R$。由式(9.4.6)直接得到

$$\mathrm{ad}_L e(y)=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(y^2)\right]\cdot 0-0\cdot y^2=0$$

因此 ad_L 在基 $\{y^2\}$ 下的矩阵表示为 $A=0$，从而 $A^*=0$，于是我们有 $G_1^2=\mathscr{N}(A^*)=H_1^2$，故对 $g_2\in G_1^2$ 有 $g_2(y)=ay^2$，其中 a 为常数。

(9.4.12)的一个二阶 PB 规范形为

$$\dot{y}=ay^2,y\in R$$

于是式(9.4.12)可以通过适当的坐标变换 $y=y(x)$ 化为

$$\dot{y} = ay^2 + o(|y|^2) \tag{9.4.13}$$

常数 a 是与函数 f 有关的，在本情形中可直接取 $y=x$，这时有 $a=f_{xx}(0)/2!$。

例 2 考虑微分方程

$$\dot{x} = Lx + \tilde{f}(x), x = (x_1, x_2)^T \in R^2 \tag{9.4.14}$$

其中 $\tilde{f}(x)=o(\|x\|)$，$L=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$，求(9.4.14)的二阶 PB 规范形。

解 令 $y=(y_1,y_2)^T\in R^2$，取向量空间 H_2^2 的一个基

$$\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\} = \left\{\begin{pmatrix}0\\y_1^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\y_1y_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\y_2^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1^2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1y_2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_2^2\\0\end{pmatrix}\right\}$$

对于每个 $F(y)=(F_1(y),F_2(y))^T\in H_2^2$，有

$$ad_LF(y) = [DF(y)]\cdot Ly - LF(y)$$

$$= \begin{bmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_2\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ & \\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_1\\F_2\end{bmatrix}$$

因此对于基向量 $e_i(y)(i=1,\cdots,6)$，有

$$ad_Le_1(y) = \begin{bmatrix}-y_1^2\\2y_1y_2\end{bmatrix}, ad_Le_2(y) = \begin{bmatrix}-y_1y_2\\y_2^2\end{bmatrix},\cdots$$

从而得到 ad_L 在这个基中的矩阵表示

$$A = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

我们求出线性代数方程组

$$A^*\xi = 0, \xi \in R^6$$

(在本情形有 $A^*=A^T$)的一个基础解组

$$\{(0,1,0,2,0,0)^T,(1,0,0,0,0,0)^T\}$$

由此得到 $G_2^2=\mathcal{N}(A^*)$的一个基

$$\{\tilde{e}_1,\tilde{e}_2\} = \{e_2+2e_4, e_1\} = \left\{\begin{bmatrix}2y_1^2\\y_1y_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\y_1^2\end{bmatrix}\right\}$$

故有

$$g_2(y) = a\tilde{e}_1(y) + b\tilde{e}_2(y) = \begin{bmatrix}2ay_1^2\\ay_1y_2+by_1^2\end{bmatrix}$$

其中 a,b 为常数。

从而式(9.4.14)的一个二阶规范形为

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 + 2ay_1^2\\ \dot{y}_2 &= ay_1y_2 + by_1^2\end{aligned}\right\} \tag{9.4.15}$$

于是式(9.4.14)可通过适当的变换 $y=y(x)$化为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + 2ay_1^2 + o(|y_1|^2, |y_2|^2) \\ \dot{y}_2 &= ay_1y_2 + by_1^2 + o(|y_1|^2, |y_2|^2) \end{aligned} \Bigg\} \tag{9.4.16}$$

常数 a,b 与函数 $\tilde{f}$ 有关，若要具体确定系数 a,b，我们根据式(9.4.3)取如下的坐标变换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + p_1y_1^2 + p_2y_1y_2 + p_3y_2^2 \\ y_2 + q_1y_1^2 + q_2y_1y_2 + q_3y_2^2 \end{bmatrix} \tag{9.4.17}$$

其中 $p_1,\cdots,q_3$ 也是待定常数。把式(9.4.17)代入式(9.4.14)(其右边取 Taylor 展开式)，并考虑到式(9.4.16)和 $g_2(y)$ 的表达式，那么，通过比较等式两边的同次项的系数的方法就可以确定上述待定常数，特别是系数 a,b。

矩阵表示法的原理比较简单，但是 H_n^k 的维数[1]随着 n 和 k 的增大而迅速增大(如当 $n=4$，$k=3$ 时，$\dim H_4^3=60$)，从而计算量太大。此外，在求不同阶的 PB 规范形时，要用不同的线性代数方程组求解，从而增添了计算的复杂性。

2. 共轭算子法

通过在 H_n^k 中适当地定义内积的方法，可以证明下面的结果。

命题 2 设 L^* 为线性化矩阵 $L=Df(0)$ 的复共轭转置矩阵，则在 H_n^k 中，线性算子 ad_{L^*} 的零空间 $\mathcal{N}(ad_{L^*})$ 是 B_n^k 的一个补空间，即 $H_n^k=B_n^k\oplus\mathcal{N}(ad_{L^*})$。

由命题 2 知道，我们可以取 $G_n^k=\mathcal{N}(ad_{L^*})$。确定 $\mathcal{N}(ad_{L^*})$ 的问题就是求下面的线性偏微分方程组在 H_n^k 中的全部多项式解

$$[DF(y)]\cdot L^*y - L^*F(y) = 0, F \in H_n^k \tag{9.4.18}$$

例 3 用共轭算子法求式(9.4.14)的二阶 PB 规范形。

解 在本例中有 $L^*=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，记 $y=(y_1,y_2)^T$，$F(y)=(F_1(y),F_2(y))^T$，式(9.4.18)可以写成

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = 0$$

即

$$\begin{aligned} y_1\frac{\partial F_1}{\partial y_2} &= 0 \\ y_1\frac{\partial F_2}{\partial y_2} &= F_1 \end{aligned} \Bigg\} \tag{9.4.19}$$

若 $F\in H_2^2$，由式(9.4.19)可以求得全部解

$$F(y) = \begin{bmatrix} ax_1^2 \\ ax_1x_2 + bx_1^2 \end{bmatrix} \tag{9.4.20}$$

其中 a,b 为任意常数。由于上述 $F(y)$ 的全体组成 $G_2^2=\mathcal{N}(ad_{L^*})$，故可取 $g_2(y)=F(y)$，从而得到式(9.4.14)的二阶 PB 规范形

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + ay_1^2 \\ \dot{y}_2 &= ay_1y_2 + by_1^2 \end{aligned} \Bigg\} \tag{9.4.21}$$

[1] $\dim H_n^k = nC_{n+k-1}^{n-2}$

必须注意，由于这里取的补空间 C_2^2 与例 2 不同，故二阶 PB 规范形式(9.4.21)与式(9.4.15)也有差别。

共轭算子法的最大优点在于求不同阶的 PB 规范形时都用同样的偏微分方程组(9.4.18)。但是它在实用上也有局限性，主要是求出式(9.4.18)在 H_n^k 中的全部多项式解并非易事，而且在这方面没有一般的解法。

PB 规范形还有别的计算方法(如李代数表示法等)以及其他的问题，读者可参看[19]。

最后讨论一下含参数的微分方程规范形问题。我们把含参数的微分方程

$$\dot{x} = f(x,\mu), x \in R^n, \mu \in R^m \tag{9.4.22}$$

写成扩张系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,\mu) \\ \dot{\mu} = 0 \end{cases}$$

在讨论扩展系统的 PB 规范形时，所取的坐标变换应当有 $H(x,\mu)=(h(x,\mu),\mu)$ 的形式，使这些变换保持方程 $\dot{\mu}=0$ 不变，此时 PB 规范形的计算方法如前所述，不过其系数是其关于 μ 的展开式。我们将在下面研究动态分支问题时作更多的说明。

§9.5 Hopf 分支定理

Hopf 分支是指当分支参数变化且经过分支值时，从平衡状态产生孤立的周期运动的现象。从相图上看，这时有极限环从平衡点"冒"出来。Hopf 分支是一类比较简单但很重要的动态分支问题，它不仅在动态分支研究和极限环研究中有重要的理论价值，而且因为它密切联系自激振动产生的问题，所以，在实际工作中也有广泛的应用。本节介绍 Hopf 分支的有关定理和一些应用。

考虑单参数系统

$$\dot{x} = F(x,\mu), (x,\mu) \in U \times J \subseteq R^n \times R \tag{9.5.1}$$

当 $\mu=0$ 时有平衡点 $\bar{x}(0)=0$(即 $f(0,0)=0$)，且 $L=DF(0,0)$ 有一对单重纯特征值 $\pm i\omega(\omega>0)$，其余的特征值的实部皆不为零。因为 L 是可逆的，故由隐函数定理得知，当 μ 在 0 附近时，系统式(9.5.1)有唯一的平衡点 $\bar{x}(\mu)$，使得 $\bar{x}(0)=0$。由此可见，当 $\mu=0$ 时在原点的邻域内不会出现静态分支。然而，如果当 μ 经过 0 时，平衡点 $x(\mu)$ 的稳定流形和不稳定流形的维数发生变化，那么，在平衡点 $\bar{x}(\mu)$ 附近的流的拓扑结构会出现不属于平衡点分支的变化。下面将对此作较深入的研究。我们注意到，在上述的条件下，当 $\mu=0$ 时系统式(9.5.1)的平衡点 $\bar{x}=0$ 有二维中心流形，因此可以利用中心流形定理把 n 维系统式(9.5.1)的分支问题化为二维系统的分支问题去讨论，为此我们着重讨论二维 Hopf 分支问题。

一、PB 规范形的计算

在这里讨论无参数的平面系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + f(x,y) \\ \dot{y} = x + g(x,y) \end{cases} \quad (x,y) \in U \subseteq R^2 \tag{9.5.2}$$

的 PB 规范形的计算问题。设 f,g 足够光滑，f,g 及它们的各个一阶偏导数在(0,0)处等于零。

先计算二阶 PB 规范形。在本情形中，

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

它有特征值$\pm i$，令$(u,v)^T\in R^2$，取向量空间H_2^2的一个基

$$\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}=\left\{\begin{pmatrix}0\\u^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\uv\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\v^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u^2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}uv\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}v^2\\0\end{pmatrix}\right\},$$

对于每个$F(u,v)=(F_1(u,v),F_2(u,v))^T\in H_2^2$有

$$ad_LF(u,v)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_1\\ F_2\end{bmatrix}$$

因此对于基向量$e_i(u,v)(i=1,\cdots,6)$有

$$ad_Le_1=\begin{bmatrix}-u^2\\ 2uv\end{bmatrix},ad_Le_2=\begin{bmatrix}-uv\\ -u^2+v^2\end{bmatrix},\cdots,$$

从而得到ad_L在这个基下的矩阵表示

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

容易看到，A^*是满秩矩阵(因$\det A=3$)，故线性代数方程组

$$A^*\xi=0,\xi\in R^6$$

只有零解，因此$G_2^2=\mathcal{N}(A^*)=\{0\}$，从而$g_2(u,v)=(0,0)^T$。由此得到式(9.5.2)的一个二阶PB规范形

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}&=-v\\ \dot{v}&=u\end{aligned}\right\}\tag{9.5.3}$$

于是(9.5.2)可通过适当的坐标变换$u=u(x,y),v=v(x,y)$化为

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}&=-v+o(|u|^2,|v|^2)\\ \dot{v}&=u+o(|u|^2,|v|^2)\end{aligned}\right\}\tag{9.5.4}$$

这表明式(9.5.2)的二次项可用坐标变换消去，从而二阶PB规范形式(9.5.3)只包含线性部分，显然它在原点附近不一定能反映非线性系统式(9.5.4)(它对应原来的系统式(9.5.2))的定性性态，由此可见，我们需要计算更高阶的PB规范形。

再计算三阶PB规范形，取向量空间H_2^3的一个基

$$\left\{\begin{bmatrix}0\\u^3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\u^2v\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\uv^2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\v^3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}u^3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}u^2v\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}uv^2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}v^3\\0\end{bmatrix}\right\}$$

我们可以求出ad_L在这个基下的矩阵表示

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

线性代数方程组 $A^* \xi=0, \xi\in R^8$ 有一个基础解系

$$\{(0,1,0,1,1,0,1,0)^T, (1,0,1,0,0,-1,0,-1)^T\}$$

从而 $G_2^3=\mathcal{N}(A^*)$ 有一个基

$$\left\{\begin{bmatrix}u(u^2+v^2)\\ v(u^2+v^2)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-v(u^2+v^2)\\ u(u^2+v^2)\end{bmatrix}\right\}$$

由此得到式(9.5.2)的一个三阶 PB 规范形，故式(9.5.2)可通过适当的坐标变换化为

$$\left.\begin{aligned}\dot{u} &= -v + au(u^2+v^2) - bv(u^2+v^2) + o(|u|^3,|v|^3)\\ \dot{v} &= u + av(u^2+v^2) + bu(u^2+v^2) + o(|u|^3,|v|^3)\end{aligned}\right\} \tag{9.5.5}$$

在极坐标中，式(9.5.5)写成比较简单的形式

$$\left.\begin{aligned}\dot{r} &= ar^3 + o(r^3)\\ \dot{\theta} &= 1 + br^2 + o(r^3)\end{aligned}\right\} \tag{9.5.6}$$

由中心和焦点判定问题知道，当 $a\neq 0$ 时，从式(9.5.6)中略去三阶以上的项后，仍能反映原来的系统在点的局部定性性态。若 $a<0$，则原点是稳定细焦点；若 $a>0$，则原点是不稳定细焦点。鉴于式(9.5.6)中系数 a 的重要性，这里给出其计算公式

$$\begin{aligned}a = \frac{1}{16}[&f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy} + f_{xy}(f_{xx} + f_{yy})\\ &- g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}]|_{(0,0)}\end{aligned} \tag{9.5.7}$$

其中函数 f, g 由式(9.5.2)给出。

这里，关于无参数的平面系统的规范形的讨论，对下面关于含参数的平面系统的研究有很大的启发。

二、二维 Hopf 分支定理

考虑含单参数 μ 的平面系统

$$\begin{cases}\dot{x} = F(x,y,\mu)\\ \dot{y} = G(x,y,\mu)\end{cases} \quad (x,y)\in U\subseteq R^2, \mu\in J\subseteq R \tag{9.5.8}$$

假设(0,0)对一切 μ 是式(9.5.8)的平衡点，即

$$F(0,0,\mu) = G(0,0,\mu) = 0, \forall\ \mu\in J \tag{H_1}$$

记式(9.5.8)在 $(x,y)=(0,0)$ 处的线性化矩阵为 $L(\mu)$。假设 $L(\mu)$ 在 $\mu=0$ 附近有一对复共轭特征值 $\alpha(\mu)\pm i\beta(\mu)$ $(\beta(\mu)>0)$，且当 $\mu=0$ 时，它们等于纯虚数 $\pm i\omega$ $(\omega>0)$，即

$$\alpha(0) = 0, \beta(0) = \omega > 0 \tag{H_2}$$

利用坐标的线性变换可把式(9.5.8)写成

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(\mu)x - \beta(\mu)y + f(x,y,\mu)\\ \dot{y} &= \beta(\mu)x + \alpha(\mu)y + g(x,y,\mu)\end{aligned}\right\} \tag{9.5.9}$$

其中 $f,g=o(|x|,|y|)$，类似式(9.5.2)(它对应系统式(9.5.9)在 $\mu=0,\omega=1$ 的情形)，可以证明式(9.5.9)的一个三阶 PB 规范形为(参看[17]，在那里给出复数形式)

$$\left.\begin{aligned}\dot{u} &= -\omega v + [c\mu + a(u^2+v^2)]u - [e\mu + b(u^2+v^2)]v\\ \dot{v} &= \omega u + [e\mu + b(u^2+v^2)]u + [c\mu + a(u^2+v^2)]v\end{aligned}\right\} \tag{9.5.10}$$

其中 $c=\alpha'(0), e=\beta'(0)$。在极坐标系中，(9.5.10)写成

$$\left.\begin{aligned}\dot{r} &= c\mu r + ar^3\\ \dot{\theta} &= \omega + e\mu + br^2\end{aligned}\right\} \tag{9.5.11}$$

我们直接看到，当 $a\neq0, c\neq0$ 时，系统式(9.5.11)在 $\mu=0$ 处出现 Hopf 分支。如当 $a<0, c>0$ 且 μ 在 0 附近时，若 $\mu\leqslant0$，式(9.5.11)只有一个稳定焦点；若 $\mu>0$，式(9.5.11)有一个不稳定焦点和一个稳定的极限环。对其他情形亦可同样地分析。我们自然会提出这样的问题：原来的系统式(9.5.9)是否也具有其三阶截断系统式(9.5.11)的分支性态呢？下面的定理回答了这个问题。

定理 1 设系统式(9.5.9)满足条件 (H_1)、(H_2) 和条件

$$c=\alpha'(0)\neq0 \qquad (H_3)$$

如果 $a\neq0$，则式(9.5.9)在 $\mu=0$ 处出现 Hopf 分支。当 $\mu\neq0$（$|\mu|$ 充分小）且与 a/c 异号时，在 $(x,y)=(0,0)$ 附近有唯一的极限环，当 $\mu\to0$ 时，此极限环趋于原点。对充分小的 $|\mu|$，这个极限环的振幅[1] $A\approx\sigma\sqrt{|\mu|}$（$\sigma$ 为某个比例常数），周期 $T\approx2\pi/\omega$。当 $a<0$ 时，此极限环是稳定的；当 $a>0$ 时，此极限环是不稳定的。

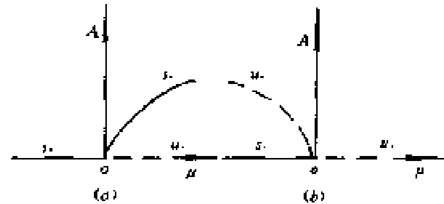


图 9.12

这个定理的结果可以包括在下面的定理 2 中，在图 9.12 上表示了极限环的振幅随 μ 的变化情况及极限环的稳定性。在涉及闭轨的分支问题中，经常采用这种形式的分支图，其纵坐标取振幅或截距。在图 9.12 上还表示了平衡点的稳定性随 μ 的变化情况。图 9.12(a)是 $a<0$，$c>0$ 的情形，此时出现超临界 Hopf 分支；在图 9.12(b)是 $a>0, c>0$ 的情形，此时出现亚临界 Hopf 分支。

在定理 1 中决定极限环稳定的 a 是三阶 PB 规范形(9.5.11)中的三次项系数。类似式(9.5.7)，这里给出其计算公式

$$\begin{aligned}a=&\frac{1}{16}[f_{xxx}+f_{xyy}+g_{xxy}+g_{yyy}]|_{(0,0,0)}+\frac{1}{16\omega}\\&\times[f_{xy}(f_{xx}+f_{yy})-g_{xy}(g_{xx}+g_{yy})-f_{xx}g_{xx}+f_{yy}g_{yy}]|_{(0,0,0)}.\end{aligned} \qquad (9.5.12)$$

我们在下面取消 $a\neq0$ 的限制条件，讨论式(9.5.9)出现 Hopf 分支的问题。为了简单起见，假设式(9.5.9)中的 f, g 在(0,0,0)的邻域内对 x, y 和 μ 是解析的。

定理 2(Hopf 定理) 设系统式(9.5.9)满足条件 (H_1)、(H_2) 和 (H_3)，则存在一个充分小的 $\varepsilon_0>0$ 和一个解析函数

$$\mu=\mu(\varepsilon)=\sum_{k=2}^{\infty}\mu_k\varepsilon^k, 0<\varepsilon<\varepsilon_0 \qquad (9.5.13)$$

使得对每个 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$，系统式(9.5.9)有闭轨 $\Gamma_{\mu(\varepsilon)}$（我们可取闭轨 Γ_μ 上某点的向径作为 ε），这时有两种可能的情况：

第一种，如果 $\mu(\varepsilon)\equiv0$，则系统式(9.5.9)在平衡点(0,0)的邻域内充满闭轨，即系统式(9.5.9)以(0,0)为中心，反之亦然。

第二种，如果 $\mu(\varepsilon)$ 不恒等于零，则使 $\mu_k\neq0$ 的最小下标 k_1 必为偶数，从而存在 $\varepsilon_1>0$，使得对每个 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$ 都有 $\mu(\varepsilon)>0$（若 $\mu_{k_1}>0$）或 $\mu(\varepsilon)<0$（若 $\mu_{k_1}<0$），它在平衡点(0,0)的充分小邻域内对应唯一的闭轨 $\Gamma_{\mu(\varepsilon)}$，并有下面的性质：

(1)记 $A(\varepsilon)$ 为闭轨 $\Gamma_{\mu(\varepsilon)}$ 的振幅（或截距），则

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{A(\varepsilon)}{\sqrt{|\mu(\varepsilon)|}}=\sigma\neq0 \qquad (9.5.14)$$

---

[1] 在这里，定义振幅为此极限环上各点的向径 r 的平均值或某个有代表性的值。

从而当 $\varepsilon\to0$ 时，$\mu(\varepsilon)\to0$，$\Gamma_{\mu(\varepsilon)}$趋于原点。

(2)闭轨 $\Gamma_{\mu(\varepsilon)}$的周期 $T(\varepsilon)$是一个解析函数

$$T(\varepsilon)=\frac{2\pi}{\omega}\left(1+\sum_{k=2}^{\infty}\tau_k\varepsilon^k\right)\qquad 0<\varepsilon<\varepsilon_2 \tag{9.5.15}$$

(3)当 μ_{k_1}与 c(即 $\alpha'(0)$)同号时，$\Gamma_{\mu(\varepsilon)}$是稳定极限环。当 μ_{k_1}与 c 异号时，$\Gamma_{\mu(\varepsilon)}$是不稳定极限环。

由于篇幅所限，在此不给出定理 2 的证明。在[55]中，利用复数形式的 PB 规范形进行证明，并给出了系数 μ_k,τ_k 的一些计算公式，这对于具体的 Hopf 分支问题计算是有用的。在下面的例 1 中我们给出周期分支解的另一种计算方法。此外，[8]、[55]也用后继函数进行证明。下面对定理 2 作几点说明：

(1)由定理 2 可知，当 $\mu(\varepsilon)$不恒等零时，展开式(9.5.13)的头一个不等于零的系数 μ_{k_1}的符号决定 Hopf 分支的方向。当 $\mu_{k_1}>0$(或<0)时，系统式(9.5.9)对充分小的 $\mu>0$(或<0)有极限环，即出现超临界(或亚临界)Hopf 分支。

(2)由[55]知道：若 $c\neq0$，有

$$\mu_2=-\frac{a}{c},\tau_2=-\frac{(b+\mu_2e)}{\omega} \tag{9.5.16}$$

其中常数 a,b,c,e 见三阶 PB 形(9.5.10)。因此，当 $a\neq0$ 时，有 $\mu_2\neq0$，即对应 $k_1=2$ 的情形，利用式(9.5.16)，我们可由定理 2 得到定理 1。

(3)我们对条件(H_1)、(H_2)和(H_3)作一些说明：

条件(H_1)总可以通过坐标变换实现；

条件(H_2)表明原点是系统式(9.5.9)的中心型平衡点，即原点是式(9.5.9)的线性近似系统的中心。

条件(H_3)连同(H_2)表明系统式(9.5.9)的线性化矩阵 $L(\mu)$的复共轭特征值，当 $\mu=0$ 时以不等于零的速率横穿虚轴。于是对充分小的$|\mu|\neq0$ 有 $\alpha(\mu)\neq0$，即系统式(9.5.9)在 $\mu\neq0$ 时有粗焦点，且 $\alpha(\mu)$在 $\mu=0$ 的两侧异号，即当 μ 变化且经过 0 时，上述粗焦点由稳定变为不稳定(图 9.12)，或者由不稳定变为稳定。

(4)条件(H_2)和(H_3)的等价形式：我们把式(9.5.8)或式(9.5.9)的线性化矩阵 $L(\mu)$写成展开式

$$L(\mu)=L(0)+\mu L_1(\mu) \tag{9.5.17}$$

因为矩阵 $L(0)$有纯特征值$\pm i\omega$，所以条件(H_2)等价于

$$\mathrm{tr}L(0)=0,\det L(0)=\omega^2>0 \tag{H_2'}$$

此外，因为矩阵 $L(\mu)$有复共轭特征值 $\alpha(\mu)\pm i\beta(\mu)$，$\mathrm{tr}L(\mu)=2\alpha(\mu)$，从而

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}L_1(0)&=\mathrm{tr}\lim_{\mu\to0}L_1(\mu)=\mathrm{tr}\lim_{\mu\to0}\frac{L(\mu)-L(0)}{\mu}\\&=\lim_{\mu\to0}\frac{\mathrm{tr}L(\mu)-\mathrm{tr}L(0)}{\mu}=\lim_{\mu\to0}\frac{2(\alpha(\mu)-\alpha(0))}{\mu}\\&=2\alpha'(0)=2c\end{aligned}$$

故条件(H_3)等价于

$$\mathrm{tr}L_1(0)\neq0 \tag{H_3'}$$

由于条件(H_2')，(H_3')无需计算矩阵的特征值，有时更便于使用。

(5)由定理 2 见到，从平衡点"冒出"极限环之后，平衡点的稳定性突然改变，且平衡点与极

限环有相反的稳定性性态，这时 Hopf 分支服从稳定性交换原则(图 9.12)。

(6)我们通常把满足条件 $c=\alpha'(0)\neq 0$ 和 $\mu_2\neq 0$ 的 Hopf 分支称为通有(或非退化)的，把其他(即有 $c=0$ 或 $\mu_2=0$)的 Hopf 分支称为退化(或非通有)的。由式(9.5.16)知道，对于通有的 Hopf 分支也有 $a\neq 0$，因此定理 1 就是通有的二维 Hopf 分支定理。

(7)我们由说明(2)已经知道原点是系统式(9.5.9)的中心型平衡点，由于 f,g 是解析函数，故原点只可能是中心或细焦点。从定理 2 知道，如果条件(H_1)，(H_2)和(H_3)成立，则

1)$\mu(\epsilon)\equiv 0\Leftrightarrow$系统式(9.5.9)以原点为中心；

2)$\mu(\epsilon)$不恒等于 $0\Leftrightarrow$系统式(9.5.9)以原点为细焦点。

进一步分析表明，细焦点的稳定性与从平衡点"冒出"的极限环的稳定性是一致的，即当 μ_{k_1}与 c 同号时，系统式(9.5.9)以原点为稳定细焦点；而当 μ_{k_1}与 c 异号时，系统式(9.5.9)以原点为不稳定细焦点。

我们再给出一个关于二维 Hopf 分支的定理，在这里不要求条件(H_3)，而且从平衡点"冒出"的极限环不必是唯一的。

定理 3 考虑系统式(9.5.8)，设 F 和 G 都是 x,y 和 μ 的解析函数。如果当 $\mu=0$ 时，系统式 (9.5.8)以(0,0)为稳定(或不稳定)细焦点；当 $\mu>0$ 时，系统式(9.5.8)以(0,0)为不稳定(或稳定)焦点，则对充分小的 $\mu>0$，系统式(9.5.8)在(0,0)附近至少有一个稳定(或不稳定)极限环，它们当 $\mu\to 0$ 时趋于原点。

在[20]中，利用 Liapunov 第二个方法证明了定理 3。

应该注意，由于定理 3 中不要求条件(H_3)，因此当 $\mu>0$ 时，(0,0)不必是粗焦点。另外，把"$\mu>0$"改为"$\mu<0$($|\mu|$充分小)"，定理 3 仍然成立。

三、二维 Hopf 分支的例子

例 1 研究系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-y\\ \dot{y}=x+\mu y-x^2y\end{cases}\qquad (x,y)\in R^2,\mu\in R \tag{9.5.18}$$

的 Hopf 分支问题。

解 (1)定性研究：系统式(9.5.18)对于一切 μ 都有平衡点(0,0)，故条件(H_1)成立。式(9.5.18)在(0,0)处的线性化矩阵为

$$L(\mu)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & \mu\end{bmatrix}$$

显然，当 $\mu=0$ 时，$L(0)$有特征值$\pm i$，即满足条件(H_2)，于是 $\mu=0$ 是可能出现 Hopf 分支的参数值。下面再作进一步的研究。

由于 $L(\mu)=L(0)+\mu L_1(\mu)$，其中

$$L_1(\mu)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

显然，$\mathrm{tr}L_1(0)=1\neq 0$，故满足条件$(H_3')$(即满足$(H_3)$)。直接用式(9.5.12)求得 $a=-\frac{1}{8}$。于是由定理 1 知道，$\mu=0$ 是 Hopf 分支值，对充分小的 $\mu>0$，系统式(9.5.18)在(0,0)附近有唯一的稳定极限环。当 $\mu\to 0$ 时，此极限环趋于(0,0)，周期趋于 2π。

我们也可以用定理 2 和定理 3 讨论。由前面已经知道式(9.5.18)满足条件(H_1)、(H_2)和

(H_3)，故定理 2 适用。我们要指出，平衡点(0,0)不是系统(9.5.18)的中心。事实上，式(9.5.18)可写成

$$\dot{x} = -y$$
$$\dot{y} = x - x^2 y$$

(0,0)是此系统的中心型平衡点。若取 Liapunov 函数 $V(x,y)=x^2+y^2$，则有$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-2x^2y^2$，由此可知，(0,0)是渐近稳定的，因此它是式(9.5.18)的一个稳定细焦点。

根据定理 2，系统式(9.5.18)在 $\mu=0$ 处出现 Hopf 分支。为了确定分支的方向，我们用公式(9.5.16)直接计算 $\mu_2=1/4$，从而知道对充分小的 $\mu>0$ 在原点附近有唯一的稳定极限环(注意：$c=\mathrm{tr}L_1(0)/2=1/2$)。

此外，我们亦可无需计算 μ_2，而利用定理 3 去确定分支的方向。因为 $L(\mu)$的特征值的实部 $\alpha(\mu)$满足 $\alpha(0)=0,\alpha'(0)=c=\dfrac{1}{2}$，所以对充分小的 $\mu>0$ 有 $\alpha(\mu)>0$，从而系统式(9.5.18)以(0,0)为不稳定焦点。根据定理 3，对充分小的 $\mu>0$ 在原点附近至少有一个稳定极限环，再由定理 2 知道此极限环是唯一的。

(2)Hopf 分支的周期解计算：记 $C_{2\pi,n}$为周期 2π 的全体 n 维连续向量函数组成的空间，在其上定义内积

$$< u,v > \triangleq \int_0^{2\pi} < u(s),v(s) > \mathrm{d}s, \forall\ u,v \in C_{2\pi,n}$$

其中$<u(s),v(s)>$为 n 维向量 $u(s)$和 $v(s)$的欧氏内积。此外，记 $C^1_{2\pi,n}$为周期 2π 的全体 n 维连续可微向量函数组成的空间。

令 A 为 $n\times n$ 常值实矩阵，微分算子 $K:C^1_{2\pi,n}\to C_{2\pi,n}$为

$$K = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} - A$$

其共轭算子 $K^*:C^1_{2\pi,n}\to C_{2\pi,n}$定义为

$$K^* = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} - A^T$$

引理 若 $f\in C_{2\pi,n}$，则非齐次方程

$$Ku = f$$

有解 $u\in C^1_{2\pi,n}$的必要且充分条件是

$$< f,\psi_k >_p = 0, k = 1,\cdots,n,$$

其中$\{\psi_1,\cdots,\psi_n\}$是线性齐次方程

$$K^* v = 0, v \in C^1_{2\pi,n}$$

的一个基础解组。

这个引理是泛函分析中的 Fredhold 择一性定理的特殊形式，在此略去证明。

现在用小参数展开法求式(9.5.18)在充分小的 $\mu>0$ 时的周期解$(x(t),y(t))^T$。设这个周期解当 $t=0$ 时的初值为$(\varepsilon,0)^T$。在下面取 $\varepsilon>0$ 为小参数进行讨论，记这个周期解的周期为 $T(\varepsilon)$，由定理 2 知道

$$T(\varepsilon) = 2\pi(1 + \tau(\varepsilon))$$

我们取新的变量

$$s = \frac{2\pi}{T(\varepsilon)}t = \frac{t}{1 + \tau(\varepsilon)}$$

于是对原来的变量 t 的周期为 $T(\varepsilon)$ 的解变为对新的变量 s 的周期为 2π 的解，记

$$u(s)=x(t(s)),v(s)=y(t(s))$$
$$w(s)=(u(s),v(s))^T$$

方程式(9.5.18)可写成

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}-(1+\tau(s))^{-1}Aw=f \tag{9.5.18)'}$$

其中矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$f=\frac{1}{1+\tau(\varepsilon)}\begin{bmatrix}0\\ \mu v-u^2v\end{bmatrix}$$

我们要求出式(9.5.18)′的周期为 2π 的解 $w(s)\in C^1_{2\pi,2}$。

根据定理 2，我们可取小参数展开式

$$\mu=\mu_2\varepsilon^2+\cdots$$
$$\tau=\tau_2\varepsilon^2+\cdots$$
$$w(s)=w_1(s)\varepsilon+w_2(s)\varepsilon^2+\cdots,$$

其中 $w_1(s)=(u_1(s),v_1(s))^T,w_2=(u_2(s),v_2(s))^T,\cdots$都是 $C^1_{2\pi,n}$函数。

把上述展开式代入式(9.5.18)′，并比较等式两端的 ε 的同次幂的系数，可得一组方程并依次求解，初值取 $w_1(0)=(1,0)^T,w_k(0)=(0,0)^T,k=2,3,\cdots$。

一阶近似方程为

$$\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}s}-Aw_1=0,w_1(0)=(1,0)^T,$$

容易求得上述方程的 $C^1_{2\pi,2}$解

$$w_1(s)=\begin{bmatrix}u_1(s)\\v_1(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos s\\ \sin s\end{bmatrix}$$

二阶近似方程为

$$\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}s}-Aw_2=0,w_2(0)=(0,0)^T$$

于是上述方程的 $C^1_{2\pi,2}$解

$$w_2(s)=\begin{bmatrix}u_2(s)\\v_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

三阶近似方程为

$$\frac{\mathrm{d}w_3}{\mathrm{d}s}-Aw_3=-\tau_2Aw_1+g_3,w_3(0,0)=(0,0)^T$$

其中 $g_3(0,\mu_2v_1-u_1^2v_1)^T$。将一阶近似的结果代入上式，有方程

$$\frac{\mathrm{d}w_3}{\mathrm{d}s}-Aw_3=f_3,w_3(0,0)=(0,0)^T$$

其中 $f_3=(\tau_2\sin s,-\tau_2\cos s+\mu_2\sin s-\cos^2 s\sin s)^T$。根据引理，上述方程有解 $w_3\in C^1_{2\pi,2}$的必要且充分条件是

$$\langle f_3,\psi_k\rangle_p=0,k=1,2 \tag{*}$$

其中$\{\psi_1,\psi_2\}$是线性齐次方程

$$-\frac{\mathrm{d}\widetilde{w}}{\mathrm{d}s}-A^T\widetilde{w}=0,\widetilde{w}\in C^1_{2\pi,2}$$

的一个基础解组，容易求得

$$\psi_1=(\cos s,\sin s)^T$$

$$\psi_2=(\sin s,-\cos s)^T$$

于是上述的可解性条件（$*$）可写成

$$\int_0^{2\pi}[\tau_2\sin s\cos s+(-\tau_2\cos s+\mu_2\sin s-\cos^2 s\sin s)\sin s]\mathrm{d}s=0$$

$$\int_0^{2\pi}[\tau_2\sin s\sin s-(-\tau_2\cos s+\mu_2\sin s-\cos^2 s\sin s)\cos s]\mathrm{d}s=0$$

积分后得到

$$\begin{cases}\pi\mu_2-\dfrac{\pi}{4}=0\\ \pi\tau_2+\pi\tau_2=0\end{cases}$$

由此求出 $\mu_2=\frac{1}{4}$，$\tau_2=0$，这与按公式(9.5.16)计算的结果一致。把 μ_2,τ_2 代入三阶近似方程中，可以求得满足初始条件 $w_3(0,0)=(0,0)^T$ 的 $C^2_{2\pi,2}$解

$$w_3(s)=\frac{3}{32}(\sin s-\sin 3s,-\cos s+\cos 3s)^T$$

于是得知展开结果为

$$\mu=\frac{1}{4}\varepsilon^2+\mu_3\varepsilon^3+\cdots,\tau=\tau_3\varepsilon^3+\cdots$$

$$w(s)=w_1(s)\varepsilon+w_3(s)\varepsilon^3+\cdots$$

其中 μ_3,τ_3 要由四阶近似方程的可解性条件确定。由此可见，对于充分小的 $\mu>0$，有

$$\varepsilon=2\mu^{\frac{1}{2}}+O(\mu^{3/2})$$

因此，方程式(9.5.18)′有周期解

$$w(x,\mu)=2w_1(s)\mu^{\frac{1}{2}}+8w_3(s)\mu^{\frac{3}{2}}+O(\mu^2)$$

我们还可将 s 换为原来的变量 t，得到方程(9.5.18)对于充分小的 $\mu>0$ 的周期解$(x(t,\mu),y(t,\mu))^T$。它的关于变量 t 的周期为

$$T(\mu)=2\pi(1+\tau)=2\pi(1+O(\mu^{\frac{3}{2}}))$$

例 2 研究系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+\mu x\\ \dot{y}=x+\mu y\end{cases}\quad (x,y)\in R^2,\mu\in R \tag{9.5.19}$$

的 Hopf 分支问题。

解 式(9.5.19)对一切 μ 有平衡点(0,0)，它在(0,0)处的线性化矩阵为

$$L(\mu)=\begin{bmatrix}\mu & 1\\ -1 & \mu\end{bmatrix}$$

在 $\mu=0$ 处，$L(0)$有特征值$\pm i$，又由于

$$L_1(\mu)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

故 $\mathrm{tr}L_1(0)=2\neq0$，由此可见条件(H_1)，(H_2)和(H_3)都成立。

我们指出，(0,0)是式(9.5.19)的中心，于是由定理 2 知道，式(9.5.19)在 $\mu=0$ 处不会出现 Hopf 分支。我们利用[55]的理论也容易证实，当 $\mu\neq0$ 时，系统式(9.5.19)不存在闭轨。当 $\mu<0$ 时，(0,0)是稳定焦点；当 $\mu>0$ 时，(0,0)是不稳定焦点。这时没有从平衡点"冒出"极限环的现象。

例 3 研究系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-y-3x^2+(1-\mu)xy+y^2\\ \dot{y}=x(1+\frac{2}{9}x-3y)\end{cases}\quad (x,y)\in R^2,\mu\in R \tag{9.5.20}$$

的 Hopf 分支问题。

解 式(9.5.20)对一切 μ 有平衡点(0,0)，它在(0,0)处的线性化矩阵为

$$L(\mu)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

容易看到，在 $\mu=0$ 处虽然满足条件(H_2)，但不满足条件(H_3)(因为 $\operatorname{tr}L_1(0)=0$)，因此定理 2 不能应用。通过对平衡点(0,0)的定性分析，可知当 $\mu=0$ 时，(0,0)是二阶稳定细焦点；当 $\mu>0$ 且 μ 充分小时，(0,0)是一阶不稳定细焦点。于是由定理 2 得知，系统式(9.5.20)对充分小的 $\mu>0$ 在原点附近至少有一个稳定极限环。

四、n 维 Hopf 分支定理

考虑系统

$$\dot{x}=F(x,\mu),x\in R^n,\mu\in R \tag{9.5.21}$$

并假设 $F(x,\mu)$ 是 x 和 μ 的解析函数；对于一切 μ 有 $F(0,\mu)=0$。记 $L(\mu)=D_xF(0,\mu)$。设 $L(\mu)$ 在 $\mu=0$ 附近有一对复共轭特征值 $\alpha(\mu)\pm i\beta(\mu)$，当 $\mu=0$ 时有

$$\beta(0)=\omega>0,\alpha(0)=0,\alpha'(0)\neq0$$

且 $L(0)$ 的其余 $(n-2)$ 个特征值都有非零实部，这时有下面的定理。

定理 4 在上述假设下，存在一个充分小的 $\varepsilon_0>0$ 和一个解析函数

$$\mu=\mu(\varepsilon)=\sum_{k=2}^{\infty}\mu_k\varepsilon^k,0<\varepsilon<\varepsilon_0$$

使得对每个 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$，系统式(9.5.21)有周期解 $p_\varepsilon(t)$。如果 $\mu(\varepsilon)$ 不恒等于零，则使 $\mu_k\neq0$ 的最小下标 k_1 必为偶数，从而存在 $\varepsilon_1>0$，使得在 $(0,\varepsilon_1)$ 上 $\mu(\varepsilon)$ 恒正(或恒负)，且每个 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$ 都对应唯一的周期解 $p_\varepsilon(t)$。当 $\varepsilon\to0$ 时，$p_\varepsilon(t)$ 趋于原点，这个周期解的周期是一个解析函数

$$T(\varepsilon)=\frac{2\pi}{\omega}\Big(1+\sum_{k=2}^{\infty}\tau_k\varepsilon^k\Big)$$

$p_\varepsilon(t)$ 有两个特征指数。当 $\varepsilon\to0$ 时趋于零，其中一个等于零，另一个是解析函数

$$\beta(\varepsilon)=\sum_{k=2}^{\infty}\beta_k\varepsilon^k$$

当 $\beta(\varepsilon)<0$ 时，周期解 $p_\varepsilon(t)$ 是相位渐近稳定的；当 $\beta(\varepsilon)>0$ 时，$p_\varepsilon(t)$ 是不稳定的。

在本定理的假设下，系统式(9.5.21)在 $x=0$ 附近有二维的中心流形，从而我们可以约化到中心流形上进行研究，[55]利用中心流形方法和复数形式的 PB 规范形证明了本定理，并提供了系数 μ_k,τ_k 和 β_k 的一些计算方法和公式。值得指出的是，[18]利用 LS 方法和函数的奇异性理论也证明了类似的定理。

Hopf 分支对于研究物理、化学、生物、机电、控制等系统当参数变化时，由于平衡状态失稳

而产生自激振荡的现象有重要的作用。

例 4 研究 Brusselator 振子方程

$$\begin{cases}\dot{x} = a - (b+1)x + x^2 y \\ \dot{y} = bx - x^2 y\end{cases} \quad (x,y) \in R^2 \tag{9.5.22}$$

的 Hopf 分支问题，其中 $a>0$ 为常数，$b>0$ 为分支参数。

解 系统式(9.5.22)有平衡点$(a, b/a)$，我们作坐标变换

$$x = \xi + a, y = \eta + \left(\frac{b}{a}\right)$$

于是式(9.5.22)化为

$$\begin{cases}\dot{\xi} = (b-1)\xi + a^2\eta + [(b/a)\xi^2 + 2a\xi\eta + \xi^2\eta] \\ \dot{\eta} = -b\xi - a^2\eta - [(b/a)\xi^2 + 2a\xi\eta + \xi^2\eta]\end{cases} \tag{9.5.22$'$}$$

系统式(9.5.22)$'$对于一切 $b>0$ 都有平衡点(0,0)，此系统在(0,0)处的线性化矩阵为

$$A(b) = \begin{bmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{bmatrix}$$

$A(b)$有特征值 $\lambda_{1,2}(b) = \gamma(b) \pm i\beta(b)$，其中

$$\gamma(b) = \frac{1}{2}[b - (1+a^2)], \beta(b) = \sqrt{a^2 - \gamma^2(b)} \tag{9.5.23}$$

由此可见，当$|\gamma(b)| < a^2$(即 $1-a^2<b<1+3a^2$)时，λ_1 和 λ_2 是一对复共轭特征值。特别地，当 $b = b_c \triangleq 1+a^2$ 时，$\gamma(b_c)=0$，故 $\lambda_{1,2}(b_c) = \pm ia$，由此可见，$b_c = 1+a^2$ 是可能出现 Hopf 分支的参数值。

对应特征值 $\lambda_1(b)$的一个特征向量为

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{(1-b+\gamma+i\beta)}{a^2} \end{bmatrix}$$

取变换矩阵

$$P = (\mathrm{Re}w_1, -\mathrm{Im}w_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1-b+\gamma}{a^2} & \dfrac{-\beta}{a^2} \end{bmatrix}$$

和坐标变换

$$\begin{bmatrix}\xi \\ \eta\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}u \\ v\end{bmatrix}$$

式(9.5.22)$'$化为

$$\left.\begin{aligned}\dot{u} &= \gamma u - \beta v + (b/a)u^2 + (u+2a)u\varphi(u,v) \\ \dot{v} &= \beta u + \gamma v + \delta(b/a)u^2 + \delta(u+2a)u\varphi(u,v)\end{aligned}\right\} \tag{9.5.24}$$

其中

$$\varphi(u,v) = \frac{(1-b-\gamma)\mu - \beta v}{a^2}$$

$$\delta = \frac{1+a^2-b+\gamma}{\beta}$$

于是我们可以直接利用 Hopf 分支的有关定理研究式(9.5.23)在参数 b 在 b_c 附近的分支情况。利用公式(9.5.12)、(9.5.16)、(9.5.23)和(9.5.24)等，可以直接算得(注意，各式应当对分支参数 $b=b_c$ 时取值)

$$c = \gamma'(b_c) - \frac{1}{2} > 0, e = \beta'(b_c) = 0$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{4} > 0, \tau_2 = \frac{1}{6a^2}\left[\left(\frac{1}{a} - a\right)^2 - \frac{1}{4}\right] > 0$$

(9.5.25)

由定理 2 知道，当 $b>b_c$ 且($b-b_c$)充分小时，系统式(9.5.24)在$(u,v)=(0,0)$附近有唯一的稳定极限环；当 $b \to b_c$ 时，此极限环趋于(0,0)。这个极限环对应的周期解的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\beta(b_c)}\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty}\tau_k\varepsilon^k\right) \tag{9.5.26}$$

考虑到

$$b - b_c = \sum_{k=2}^{\infty}\mu_k\varepsilon^k = \mu_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$

利用式(9.5.25)中 μ_2 的公式，得到

$$\varepsilon = 2a(a + a^2)^{-\frac{1}{2}}(b - b_c) + O((b - b_c)^{\frac{3}{2}})$$

将上式代入(9.5.26)，再用(9.5.25)中 τ_2 的公式，得到参数值为 $b(>b_c)$时周期解的周期

$$T = \frac{2\pi}{a}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{a} - a\right)^2 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{a^2}{2}\right)^{-1} \times (b - b_c) + O((b - b_c)^2)\right]$$

(9.5.27)

我们还可以计算这个周期解，在此不再详述。同样地，当 $b>b_c$ 且 $b-b_c$ 充分小时，原来的系统式(9.5.22)在平衡点附近有唯一的稳定极限环，即出现超临界 Hopf 分支。在图 9.13 上给出当 $a=1, b=3$ 时，在(ξ,η)一平面上的极限环的数值计算结果。

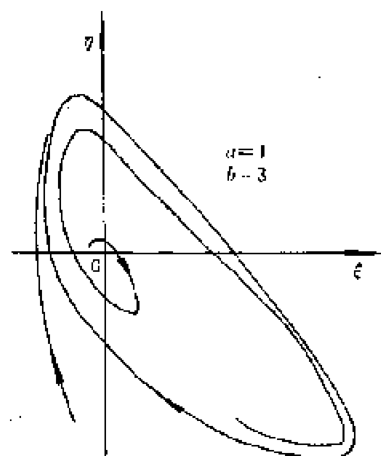


图 9.13

顺便指出，根据定理 2 的说明(7)，当 $b=b_c$ 时，系统(9.5.22)的平衡点是稳定细焦点。由此可见，本例利用二维 Hopf 分支定理，比较简便地得到重要的结论。

例 5　气动弹性颤振问题

当气流以恒定的速度 V 流过一个弹性结构(如机翼、桥梁、建筑物、输电线等)时，在一定的条件下弹性结构会出现并维持振幅一定的自激振动，这种现象称为气动弹性颤振，当颤振振幅过大时，会导致结构破坏或其他的危险结果。

这里考虑一个简单的气动弹性振子模型的方程

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = \frac{1}{2}\rho V^2 a\left[A_1\left(\frac{\dot{x}}{V}\right) - A_3\left(\frac{\dot{x}}{V}\right)^3 + A_5\left(\frac{\dot{x}}{V}\right)^5 - A_7\left(\frac{\dot{x}}{V}\right)^7\right] \tag{9.5.28}$$

其中状态变量 $x \in R$，m 为质量，r 为阻尼系数，k 为弹性系数，ρ 为空气密度，V 为气流速度，a 为弹性结构的迎风面积，A_1, A_3, A_5, A_7 是由实验确定的正常数。我们要研究当 V 增大时弹性结构出现颤振的情况。把式(9.5.28)改写成平面自治系统，上述问题归结为二维 Hopf 问题。取 V 作为分支参数，计算表明当 $V=V_c=\dfrac{2r}{\rho a A_1}$时出现超临界 Hopf 分支，即 $V>V_c$，且$(V-V_c)$充分小时有一个稳定的极限环，于是当气流速度超过 V_c 之后，弹性结构就会出现颤振。

顺便指出，当 V 继续增大到一定数值 V_p 时，又会出现极限环的分支；当 $V>V_p$ 时，有三个极限环包围着在原点处的不稳定焦点，其中有两个极限环是稳定的，它们被另一个不稳定的极

限环分隔，此时弹性结构会出现较大振幅的颤振。

§9.6 Hopf 分支的应用

一、一类具有时滞的非线性动力系统

考虑一类具有时滞非线性微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}=d_{11}P(t)+d_{12}N(t-\tau)+f_1(P(t),N(t)) & (9.6.1)\\ \dfrac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}=d_{21}P(t-\tau)+d_{22}N(t)+f_2(P(t),N(t)) & (9.6.2)\end{cases}$$

式中 f_1 和 f_2 都是关于 $P(t)$和 $N(t)$的二项式；$d_{ij},i,j=1,2$ 是实参数；τ 是正常数。本段讨论当实数 d_{21}变化时，方程组(9.6.1)和(9.6.2)变化的特征，分析这类方程组零解的稳定性，从而得到它产生 Hopf 分支的条件。

引入 $t=\tau s,x(s)=P(\tau s),y(s)=N(\tau s)$，把它们代入方程组(9.6.1)和(9.6.2)，然后仍把 s 换为 t，并令 $\mu=d_{21}\tau$，于是方程组(9.6.1)和(9.6.2)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=d_{11}\tau x(t)+d_{12}\tau y(t-1)+f_1(x(t),y(t)) & (9.6.3)\\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=\mu x(t-1)+d_{22}\tau y(t)+f_2(x(t),y(t)) & (9.6.4)\end{cases}$$

再引入

$$A_{1,\mu}=\begin{bmatrix}0 & d_{12}\tau\\ \mu & 0\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}d_{11}\tau & 0\\ 0 & d_{22}\tau\end{bmatrix},u(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix},f=\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\end{bmatrix},$$

于是方程组(9.6.3)和(9.6.4)的矩阵形式为

$$\dot{u}(t)=A_{1\mu}u(t-1)+A_2u(t)+f \tag{9.6.5}$$

设 $C^k(-1,0)$表示在$[-1,0]$实二维向量值函数空间，它的两个分量是 k 阶连续可微，在自治系统式(9.6.5)中，设 $u_t(\theta)=u(t+\theta),u_t:[-1,0]\to R^2,\theta\in[-1,0]$，线性算子

$$A_{1\mu}:C(-1,0)\to R^2,A_2:C(-1,0)\to R^2$$

和算子

$$f(\cdot):C(-1,0)\to R^2$$

而式(9.6.5)的解是 $B:C(-1,0)\to R^2$ 的元素即解把连续初值映射到 R^2。

根据 Riesz 表示定理，存在一个 2×2 的矩阵函数

$$\eta(\cdot,\mu):(-1,0)\to R^{2^2}$$

它的每个分量是有界变差函数且对于所有的 $\varphi\in C(-1,0)$使得

$$A_{1\mu}\varphi=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}\eta(\theta;\mu)\varphi(\theta)$$

于是

$$\mathrm{d}\eta(\theta,\mu)=\begin{bmatrix}0 & d_{12}\tau\\ \mu & 0\end{bmatrix}\delta(\theta-1)$$

式中 $\delta(\theta+1)$为 Diracδ—函数。

定义 1 对于 $\varphi\in C^1(-1,0)$，有

$$A(\mu)+R\varphi=\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{d\theta}, & -1\leqslant\theta<0\\ \displaystyle\int_{-1}^{0}d\eta(s,\mu)\varphi(s)+A_2\varphi+f(\varphi), & \theta=0\end{cases}$$

于是，式(9.6.5)可化为

$$\dot{u}=A(\mu)u_t+Ru_t, A(\mu)=A_{1\mu}+A_2 \tag{9.6.6}$$

因为，对于$-1\leqslant\theta<0$，式(9.6.6)正是平凡方程$\dfrac{du_t}{dt}=\dfrac{du_t}{d\theta}$；对于$\theta=0$，式(9.6.6)就是式(9.6.5)。

显然，式(9.6.6)的平衡解是零解，考虑式(9.6.6)中线性算子$A(\mu)$谱的分析，它的特征函数为

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}d_{11}\tau-\lambda & d_{12}\tau e^{-\lambda}\\ \mu e^{-\lambda} & d_{22}\tau-\lambda\end{vmatrix}=(d_{11}\tau-\lambda)(d_{22}\tau-\lambda)-\mu d_{12}\tau e^{-2\lambda} \tag{9.6.7}$$

$$D(i\omega)=M(\omega)+iS(\omega), \omega\in R \tag{9.6.8}$$

式中$M(\omega)=\mathrm{Re}D(i\omega)$，$S(\omega)=\mathrm{Im}D(i\omega)$。

定理1 设$d_{11}\tau=d_{22}\tau=-b$，$b>0$，$d_{12}\tau=-a$，$a>0$。如果$\mu<\mu_c$，$\mu_c=\min(\mu_{ck},k=1,\cdots,m)$，并且$\mu_{ck}$满足下列方程

$$\begin{cases}2b\omega_k-\mu_{ck}a\sin2\omega_k=0\\ b^2-\omega_k^2+\mu_{ck}a\cos2\omega_k=0\end{cases}$$

则方程组(9.6.1)和(9.6.2)的零解是渐近稳定的。

证明 在假设条件下，由式(9.6.7)和(9.6.8)可得

$$M(\omega)=b^2-\omega^2+\mu a\cos2\omega \tag{9.6.9}$$

$$S(\omega)=2b\omega-\mu a\sin2\omega \tag{9.6.10}$$

令$M(\omega)=0$即解下列方程

$$b^2-\omega^2+\mu a\cos2\omega=0 \tag{9.6.11}$$

显然，式(9.6.11)至少有一个正根或有m(奇数)个正根，记ω_k，$k=1,\cdots,m$，m为奇数。对于下标k为偶数的正根ω_k位于区间$\left(\pi j-\dfrac{\pi}{4},\pi j\right)$，$j=1,2,\cdots$，由于式(9.6.10)可知，$S(\omega_k)>0$，自然成立，且只要适当选择参数$a$、$b$可以有$(-1)^{k+1}S(\omega_k)=-1$。

对于下标k为奇数的正根ω_k位于区间$\left(\pi j,\pi j+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$j=1,2,\cdots$，要使$S(\omega_k)>0$必须满足

$$2b\omega_k-\mu a\sin2\omega>0$$

即

$$\mu<\mu_{ck}=\frac{2b\omega_k}{a\sin2\omega_k}$$

因此，μ_{ck}满足以下方程

$$\begin{cases}2b\omega_k-\mu_{ck}a\sin2\omega_k=0 & (9.6.12)\\ b^2-\omega_k^2+\mu_{ck}a\cos2\omega_k=0 & (9.6.13)\end{cases}$$

由于$\mu<\mu_{ck}$，且μ_{ck}满足式(9.6.12)和(9.6.13)，于是$S(\omega_k)>0$且$(-1)^{k+1}S(\omega_k)=1$，因此

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}S(\omega_k)=1$$

我们取分支参数为μ，令分支值为$\mu_c=\min(\mu_{ck},k=1,\cdots,m)$，因此当$\mu<\mu_c$时，根据文献

[57]，$A(\mu)$的特征根在λ—平面的左半面，即$A(\mu)$的所有特征根都具有严格的负实部，所以方程组(9.6.1)和(9.6.2)的零解是渐近稳定的。定理1得证。

下面分析当$\mu=\mu_c$时，特征根$\lambda=\alpha+i\omega$实部的符号。由式(9.6.7)，得

$$D(\lambda)=D(\alpha+i\omega)=(\alpha+i\omega+b)^2+\mu a e^{-2(\alpha+i\omega)}$$
$$=b^2+\alpha^2-\omega^2+2\alpha b+\mu a e^{-2\alpha}\cos 2\omega+i(2\omega\alpha+2\omega b-\mu a e^{-2\alpha}\sin 2\omega)$$

令$\mu=\mu_{ck}$，$\omega=\omega_k$，$\lambda=\alpha_k+i\omega_k$代入$D(\lambda)$且满足

$$b^2+\alpha_k^2-\omega_k^2+2\alpha_k b+\mu_{ck} a e^{-2\alpha}\cos 2\omega_k=0 \tag{9.6.14}$$

$$2\omega_k\alpha_k+2\omega_k b-\mu_{ck} a e^{-2\alpha}\sin 2\omega_k=0 \tag{9.6.15}$$

由式(9.6.12)、(9.6.13)、(9.6.14)和(9.6.15)，得

$$\alpha_k^2+\alpha_k\left(b+\frac{\omega_k^2}{b}\right)=0$$

所以
$$\alpha_k=0 \text{ 或 } \alpha_k=-\frac{b^2+\omega_k^2}{b}<0$$

如果在式(9.6.12)、(9.6.13)、(9.6.14)和(9.6.15)中以ω_k换成$-\omega_k$表示，则式(9.6.12)、(9.6.13)、(9.6.14)和(9.6.15)不变，说明上述结果对$-\omega_k$也是成立的。

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu}=\frac{a}{2}e^{-2\alpha}[(\mu a e^{-2\alpha}\cos 2\omega-b-\alpha)^2+(\mu a e^{-2\alpha}\sin 2\omega+\omega)^2]^{-1}$$
$$\times\{[(\mu a e^{-2\alpha}\cos 2\omega-\alpha-b)\cos 2\omega+(\mu a e^{-2\alpha}\sin 2\omega+\omega)\sin 2\omega]$$
$$+i[(\mu a e^{-2\alpha}\sin 2\omega)\cos 2\omega-(\mu a e^{-2\alpha}\cos 2\omega-b-\alpha)\sin 2\omega]\} \tag{9.6.16}$$

于是，利用式(9.6.12)和(9.6.13)，由式(9.5.16)，得

$$\alpha_c'(\mu_c)=\frac{(\omega_c^2+b^2+b)(\omega_c^2+b^2)}{2\mu_c[(\omega_c^2+b^2+b)+\omega_c^2]}>0$$

$$\omega_c'(\mu_c)=\frac{\omega_c(\omega_c^2+b^2)}{2\mu_c[(\omega_c^2+b^2+b)^2+\omega_c^2]}>0$$

综合所述，我们得到了线性算子$A(\mu)$的谱的分布有以下结果：

(1)$\alpha=\alpha(\mu)$和$\omega=\omega(\mu)$是关于μ的单调增函数，如果$\mu_c=\min(\mu_{ck},k=1,\cdots,m)$，那么，$\omega_c=\omega(\mu_c)=\min(\omega_{ck},k=1,\cdots,m)$和$\alpha_c=\alpha(\mu_c)=\min(|\alpha_k|,k=1,\cdots,m)$。

(2)存在一对复共轭本征值$\lambda(\mu)$和$\bar{\lambda}(\mu)$使得$\alpha_c=\alpha(\mu_c)=0$，$\omega_c=\omega(\mu_c)>0$。同时$\alpha'(\mu_c)>0$，$\omega_{\mu_c}'=\omega'(\mu_c)>0$。

(3)所有其他的$\lambda(\mu_c)$有严格的负实部。

根据Hopf分支定理得到：

定理2 如果$d_{11}\tau=d_{22}\tau=-b$，$b>0$，$A_{12}\tau=-a$，$a>0$，则当$\mu=\mu_c$时，方程组(9.6.1)和(9.6.2)产生Hopf分支。

另外，我们又根据中心流形定理和Hassard的"规范形"方法，可以计算方程组(9.6.1)和(9.6.2)的分支周期解的渐近形式及它具有轨道渐近稳定的判据，这些结果在此不作介绍。

例 考虑系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-y(t-1)-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi x(t)-Ex^2 & (9.6.17)\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=\mu x(t-1)-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi y(t) & (9.6.18)\end{cases}$$

因为已知 $a=1, b=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$，由式(9.6.12)和(9.6.13)，经计算可得

$$\mu_c = \frac{4}{9}\pi^2, \omega_c = \frac{\pi}{3}, \alpha_c = 0$$

并且

$$\alpha_c' = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu}\right)\Big|_{\mu_c=\frac{4}{9}\pi^2} = \frac{27a\left(\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi\right)}{8\pi(9+6\sqrt{3}\pi+4\pi^2)} > 0$$

$$\omega_c' = \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu}\right)\Big|_{\mu_c=\frac{4}{9}\pi^2} = \frac{27a}{8\pi(9+6\sqrt{3}\pi+4\pi^2)} > 0$$

因此，当 $\mu_c=\frac{4}{9}\pi_2$ 时，方程组(9.6.17)和(9.6.18)产生 Hopf，并且从平衡点分支出的一族分支周期解是轨道渐近稳定的，其近似表达式为

$$x(t,\mu) = \left[\frac{5(\mu-\mu_c)}{\mu_c E^2}\right]^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi}{2}t + \frac{5(\mu-\mu_c)}{4\mu_c E^2}\left(-\frac{9}{2}\cos\frac{2\pi}{3}t + \frac{3}{5}\sin\frac{2\pi}{3}t + 7\right) + O\left(\left[\frac{5(\mu-\mu_c)}{4\mu_c E^6}\right]^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$y(t,\mu) = \frac{3}{2\pi}\left[\frac{5(\mu-\mu_c)}{E^2}\right]^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\pi}{3}t - \frac{\mu-\mu_c}{4E}\left(\cos\frac{2\pi}{3}t + 3\sin\frac{2\pi}{3}t - 20\right) + O\left(\left[\frac{5(\mu-\mu_c)}{4\mu_c E^6}\right]^{\frac{3}{2}}\right)$$

二、具有扩散和群体防卫的简单食物链模型

1. 简单食物链的反应扩散模型

目前，对单线简单食物链模型已作了不少研究，得到了许多结果。许多文献首先把这一模型归结为一组自治的常微分方程，然后证明系统一切解的有界性和全局稳定性；同时，还利用 Liapunov 函数得到了系统持续性的判据，[52]提出了群体防卫的概念，并对具有这一特征的简单食物链系统的稳定性和持续性进行了定性分析。通过对自然现象的深入观察和研究，这个模型也在不断的改进和发展。

本段除考虑最低层食物具有群体防卫能力外，同时还考虑构成简单食物链三种群的密度分布是不均匀的，因此，必然有迁移现象即扩散现象。这种具有扩散现象和群体防卫能力的简单食物链模型可以归结为如下的反应扩散方程组。

$$\begin{cases}\frac{\partial P_1}{\partial t} = d_1\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + P_1\Phi_1(P_1,k) - P_2\Phi_2(P_1)\\ \frac{\partial P_2}{\partial t} = d_2\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + P_2[-r+\sigma\Phi_2(P_1)] - P_3\Phi_3(P_2)\\ \frac{\partial P_3}{\partial t} = d_3\frac{\partial P_3}{\partial x^2} + P_3[-\sigma_1+\sigma_2\Phi_3(P_2)]\\ P_1(0,t)=P_1(l,t)=P_1^*, P_2(0,t)=P_2(l,t)=P_2^*, P_3(0,t)=P_3(l,t)=P_3^*\end{cases} \tag{9.6.19}$$

式中 $P_1(x,t)$、$P_2(x,t)$、$P(x,t)$ 分别表示最低层食物、中间层食物和最高层食物的密度，d_1，d_2、d_3 分别表示三种群的扩散系数，而 (P_1^*, P_2^*, P_3^*) 是系统(9.6.19)的正平衡解。本段将研究扩散对系统稳定性的影响；分析系统产生 Hopf 分支的条件；讨论中心流形的存在，并通过正则化问题，从而将得到系统式(9.6.19)分支周期解的渐近形式及其稳定性的判据。

我们假定 $\Phi_1(P_1,k)$，$\Phi_2(P_1)$，$\Phi_3(P_2)$ 是连续可微的。k，r，σ，σ_1 和 σ_2 均为正常数。k 表示环境的承载能力即环境的容纳量，且认为它是足够大，$\Phi_1(P_1,k)$ 表示最低层食物在没有捕食行

为条件下的增长率，且假定满足：

(1)$\Phi_1(0,k)=h>0,\Phi_1(k,k)=0,\Phi'_{1P_1}(P_1,k)\leqslant 0,\Phi'_{1P_1}(k,k)<0,\Phi_{1k}(P_1,k)>0,P_1>0$；

$\Phi_2(P_1)$表示中间层食物的功能性反应，且假定满足

(2)$\Phi_2(0)=0,\Phi_2(P_1)>0,P_1>0$，并且存在$\Gamma>0$，使得

(3)$\Phi_2(\Gamma)>\frac{r}{\sigma}$，且当$0<P_1<\Gamma$时，$\Phi_2'(P_1)>0$；当$P_1=\Gamma$时，$\Phi_2'(P_1)=0$；当$P_1>\Gamma$时，$\Phi_2'(P_1)<0$。$\Gamma$的存在是模拟最低层食物$P_1$所具有的群体防卫能力。

$\Phi_3(P_2)$表示最高层食物的功能性反应，且假定满足：

(4)$\Phi_3(0)=0,\Phi_3'(P_2)>0,P_2>0$。

在(1)～(4)的假定下，继续考察系统式(9.6.19)正平衡解的存在性，如果

(5)$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\in \mathrm{range}\Phi_3(P_2)$，那么，由式(9.6.19)第三个方程可知，一定存在唯一的$P_2^*>0$，使得

$$\Phi_3(P_2^*)=\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \tag{9.6.20}$$

如果

(6)$P_2^*\in \mathrm{Range}\,\frac{P_1\Phi_1(P_1,k)}{\Phi_2(P_1)},P_1>0$，那么，由(9.6.19)第一方程，根据隐函数定理可知，至少存在一个$P_1^*>0$满足

$$P_2^*=\frac{P_1^*\Phi_1(P_1^*,k)}{\Phi_2(P_1^*)} \tag{9.6.21}$$

再由式(9.6.19)第二个方程，解得

$$P_3^*=\frac{P_2^*[-r+\sigma\Phi_2(P_1^*)]}{\Phi_3(P_2^*)} \tag{9.6.22}$$

为使$P_3^*>0$，则r的取值范围必然满足

$$0<r<\sigma\Phi_2(P_1^*) \tag{9.6.23}$$

因此，由式(9.6.20)～式(9.6.23)可得

引理1 如果(1)～(4)和式(9.6.23)成立，那么，系统式(9.6.19)至少存在一个正平衡点(P_1^*,P_2^*,P_3^*)。

这里主要研究系统式(9.6.19)的Hopf分支问题。初值条件不重要，故忽略不计。另外，为方便起见，我们只考虑$d_1=d_3=0,d_2=d,l=\pi$，的情形，同时，对式(9.6.19)进行变换，令$u_i=P_i-P_i^*,i=1,2,3$，那么式(9.6.19)化为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial t}=m_{11}u_1+m_{12}u_2+f_1(u_1,u_2,u_3;r)\\
&\frac{\partial u_2}{\partial t}=d\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+m_{21}u_1+m_{22}u_2+m_{23}u_3+f_2(u_1,u_2,u_3;r)\\
&\frac{\partial u_3}{\partial t}=m_{32}u_2+f_3(u_1,u_2,u_3;r),(x,t)\in(0,\pi)\times R^+\\
&u_1(0,t)=u_1(\pi,t)=0,u_2(0,t)=u_2(\pi,t)=0,u_3(0,t)=u_3(\pi,t)=0
\end{aligned}\right\} \tag{9.6.24}$$

式中

$$m_{11}=\Phi_1(P_1^*,k)+P_1^*\Phi_1'(P_1^*,k)-P_2^*\Phi_2'(P_1^*)$$

$$m_{12}=-\Phi_2(P_1^*)<0,\quad m_{21}=\sigma P_2^*\Phi_2'(P_1^*)$$

$$m_{22}=[-r+\sigma\Phi_2(P_1^*)]\left[1-\frac{P_2^*\Phi_3'(P_2^*)}{\Phi_3(P_2^*)}\right]$$

$$m_{23} = -\Phi_3'(P_2^*) < 0$$

$$m_{32} = [-r + \sigma\Phi_2(P_1^*)]\frac{\sigma_2 P_2^* \Phi_3'(P_2^*)}{\Phi_3(P_2^*)} > 0$$

引入 $U=(u_1,u_2,u_3)^T$，$f=(f_1,f_2,f_3)^T$，$P^*=(P_1^*,P_2^*,P_3^*)$，式中 T 表示转置，$A_1(P^*)=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{32} & 0 \end{bmatrix}$，$A_2(P^*)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$A=A_1+A_2\Delta$，$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}$，于是，式(9.6.24)化为矩阵形式

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= AU + f(U;r), \\ U(0,t) &= U(\pi,t) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9.6.25}$$

式中 $f(U,r)$ 是连续可微的，且 $f(0)=0$，$D_U f(0)=0$ 和

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial P_1^2}u_1^2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial P_1 \partial P_2}u_2 u_1 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f_1}{\partial P_1^3}u_1^3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f_1}{\partial P_1^2 \partial P_2}u_1^2 u_2 + \cdots \\ f_2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial P_1^2}u_1^2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial P_1 \partial P_2}u_2 u_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial P_2^2}u_2^2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial P_2 \partial P_3}u_2 u_3 \\ &\quad + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f_2}{\partial P_1^3}u_1^3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f_2}{\partial P_1^2 \partial P_2}u_1^2 u_2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f_2}{\partial P_2^3}u_2^3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f_2}{\partial P_2^2 \partial P_3}u_2^2 u_3 + \cdots \\ f_3 &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_3}{\partial P_2^2}u_2^2 + \frac{\partial^2 f_3}{\partial P_2 \partial P_3}u_2 u_3 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f_3}{\partial P_2^3}u_2^3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f_3}{\partial P_2^2 \partial P_3}u_2^2 u_3 + \cdots, \end{aligned} \tag{9.6.26}$$

式中 f 的二阶和三阶偏导数：$\frac{\partial^2 f_1}{\partial P_1^2}$，$\frac{\partial^2 f_1}{\partial P_1 \partial P_2}$，$\frac{\partial^3 f_1}{\partial P_1^3}$，$\frac{\partial^3 f_1}{\partial P_1^2 \partial P_2}$，$\frac{\partial^2 f_2}{\partial P_1^2}$，$\frac{\partial^2 f_2}{\partial P_1 \partial P_2}$，$\frac{\partial^2 f_2}{\partial P_2^2}$，$\frac{\partial^2 f_2}{\partial P_2 \partial P_3}$，$\frac{\partial^3 f_2}{\partial P_1^3}$，$\frac{\partial^3 f_2}{\partial P_1^2 \partial P_2}$，$\frac{\partial^3 f_2}{\partial P_2^3}$，$\frac{\partial^3 f_2}{\partial P_2^2 \partial P_3}$，$\frac{\partial^2 f_3}{\partial P_2^2}$，$\frac{\partial^2 f_3}{\partial P_2 \partial P_3}$，$\frac{\partial^3 f_3}{\partial P_2^3}$ 和 $\frac{\partial^3 f_3}{\partial P_2^2 \partial P_3}$，通过计算，均可用 P_1^*，P_2^*，P_3^* 和 Φ_1，Φ_2'，Φ_3，Φ_1'，Φ_2'，Φ_3'，Φ_1''，Φ_2''，Φ_3'' 在 (P_1^*,P_2^*,P_3^*) 处的值表示出来。这样就把对系统式(9.6.19)所讨论的问题归结为研究式(9.6.24)或式(9.6.25)的 Hopf 分支问题。

2. 系统零解的稳定性和 Hopf 分支产生的条件

现在我们考察式(9.6.25)。根据半群理论可知，含扩散现象和群体防卫能力的简单食物链系统可以定义一个在

$$B = \{U \mid (u_1,u_2,u_3) \in D_A，且\ u_1,u_2,u_3\ 均为实的\}$$

上的光滑局部半流 F_t，式中 $D_A=\{u_i \in H^2[0,\pi] \mid u_i|_{x\{0,\pi\}}=0, i=1,2,3\}$，并且 $D_U F_t(0)$ 是无穷小生成元 $A=A_1+A_2\Delta$ 的紧半群，算子 $A: U \to AU = A_1 U + A_2 \Delta U$。取 $D_A=\{\sin nx, n=1,2,\cdots\}$，$x \in [0,\pi]$ 时，于是，式(9.6.25)在 $U=0$ 处的线性化部分

$$\frac{\partial U}{\partial t} = AU, \quad U(0) = U(\pi) = 0 \tag{9.6.27}$$

线性型零解的稳定性决定于相应线性化矩阵 A 的特征值的分布。设

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty}(\psi_{1n},\psi_{2n},\psi_{3n})^T \sin nx$$

是特征值 λ 所对应算子 A 的特征函数，所以

$$\begin{aligned} A\psi &= \sum_{n=1}^{\infty}[A_1(\psi_{1n},\psi_{2n},\psi_{3n})^T - n^2 A_2(\psi_{1n},\psi_{2n},\psi_{3n})^T]\sin nx \\ &= \lambda\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_{1n},\psi_{2n},\psi_{3n})^T \sin nx. \end{aligned}$$

为了使系统式(9.6.24)或式(9.6.25)有非平凡解,则必须有

$$\begin{vmatrix} m_{11}-\lambda & m_{12} & 0 \\ m_{21} & \overline{m}_{22}-\lambda & m_{23} \\ 0 & m_{32} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{9.6.28}$$

式中 $\overline{m}_{22}=m_{22}-dn^2, n=1,2,\cdots$。式(9.6.28)化为

$$\lambda^3+a_n\lambda^2+b_n\lambda+c=0, \quad n=1,2,\cdots, \tag{9.6.29}$$

式中 $a_n=-(m_{11}+\overline{m}_{22}), b_n=m_{11}\overline{m}_{22}-m_{12}m_{21}-m_{23}m_{32}, c=m_{11}m_{23}m_{32}$

如果

(7) $\Phi_2'(P_1^*)>0, P_2^*\Phi_3'(P_2^*)/\Phi_3(P_2^*)<1$,且 $-\sigma_2P_2^*\Phi_3'\Big/\left(1-\frac{P_2^*\Phi_3'}{\Phi_3}\right)<m_{11}<-\sigma\Phi_2\times\left(1-\frac{P_2^*\Phi_3'}{\Phi_3}\right)$,那么当 $r\in(0,\sigma\Phi_2(P_1^*))$,对于任意 n 有 $a_n>0, b_n>0, c>0$。考察

$$F_n(r,d)=\begin{vmatrix} a_n & c \\ 1 & b_n \end{vmatrix}=F_{n1}(-r+\sigma\Phi_2)^2+F_{n2}(-r+\sigma\Phi_2)+F_{n3} \tag{9.6.30}$$

式中

$$F_{n1}=-\left[m_{11}\left(1-\frac{P_2^*\Phi_3'}{\Phi_3}\right)+\sigma_2P_2^*\Phi_3'\right]\left(1-\frac{P_2^*\Phi_3'}{\Phi_3}\right)<0$$

$$F_{n2}=-(m_{11}-dn^2)\left[m_{11}\left(1-\frac{P_2^*\Phi_3'}{\Phi_3}\right)+\sigma_2P_2^*\Phi_3'\right]$$

$$+\sigma_2P_2^*m_{11}\Phi_3'-(\sigma P_2^*\Phi_2\Phi_2'-m_{11}dn^2)\left(1-\frac{P_2^*\Phi_3'}{\Phi_2}\right)$$

$$F_{n3}=-(m_{11}-dn^2)(\sigma P_2^*\Phi_2\Phi_2'-m_{11}dn^2)>0$$

同时,式(9.6.30)可以化为

$$F_n(r,d)=F_{n1}\left(-r+\sigma\Phi_2+\frac{F_{n2}}{2F_{n1}}\right)^2+\frac{4F_{n1}F_{n3}-F_{n2}^2}{4F_{n1}} \tag{9.6.31}$$

由式(9.6.30)和(9.6.31)可知,对任一固定 n,当 $r=\sigma\Phi_2+\frac{F_{n2}}{2F_{n1}}$ 时,那么

$$\max F_n(r,d)=F_n\left(\sigma\Phi_2+\frac{F_{n2}}{2F_{n1}},d\right)=\frac{(4F_{n1}F_{n3}-F_{n2}^2)}{4F_{n1}}>0 \tag{9.6.32}$$

另外,当 $r=\sigma\Phi_2$ 时,$F_n(\sigma\Phi_2,\sigma)=-(m_{11}-dn^2)(\sigma P_2^*\Phi_2\Phi_2'-m_{11}dn^2)>0$,而当 $r=0$ 时,有

$$F_n(0,d)=F_n^{(1)}d^2n^4+F_n^{(2)}dn^2+F_n^{(3)} \tag{9.6.33}$$

式中 $F_n^{(1)}=-m_{11}>0$

$$F_n^{(2)}=m_{11}\left[\sigma\Phi_2\left(1-\frac{P_2^*\Phi_3'}{\Phi_3}\right)+m_{11}\right]+\sigma\Phi_2\left[m_{11}\left(1-\frac{P_2^*\Phi_3'}{\Phi_3}\right)+\sigma_2P_2^*\Phi_3'\right]+\sigma P_2^*\Phi_2\Phi_2'>0$$

$$F_n^{(3)}=\sigma\sigma_2m_{11}P_2^*\Phi_2\Phi_3'-\left[\sigma\Phi_2\left(1-\frac{P_2^*\Phi_3'}{\Phi_3}\right)+m_{11}\right]\left[\sigma\Phi_2\left(m_{11}\left(1-\frac{P_2^*\Phi_3'}{\Phi_3}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sigma_2P_2^*\Phi_3'\right)+\sigma P_2^*\Phi_2\Phi_2'\right]$$

显然,$F(0,d)$ 是关于 d 和 n 严格单调增的函数。

假设 $F_n^{(3)}<0$,则有 $F_n(0,0)=F_n^{(3)}<0$,因此,对于任意给定的 n_0,一定存在 d_{n_0},使得

$$F_n^{(1)}(d_{n_0}n_0^2)^2+F_n^{(2)}(d_{n_0}n_0^2)+F_n^{(3)}=0 \tag{9.6.34}$$

由式(9.6.34)解得

$$d_{n_0}n_0^2 = \frac{-F_n^{(2)} + \sqrt{(F_n^{(2)})^2 - 4F_n^{(1)}F_n^{(3)}}}{4F_n^{(1)}} > 0 \tag{9.6.35}$$

引理 2 如果(1)～(7)和 $F_n^{(3)}<0$ 成立，且 $d\geqslant d_{n_0}$，则对于任意固定的 n_0，当 $r\in(0,\sigma\Phi_2)$ 时，系统式(9.6.25)的线性化矩阵的特征值具有严格的负实部。

因为 $F_{n_0}(\sigma\Phi_2,d)>0$，而当 $d>d_{n_0}$ 时，$F_{n_0}(0,d)\geqslant 0$，$F_{n_0}(r,d)$ 是关于 r 的二次函数，且 $F_{n_0 1}<0$，根据 Routh－Hurwitz 稳定性判定定理，引理 2 得证。

由于式(9.6.35)的右端与 n_0，d_{n_0} 无关，故当 $n_0=1,2,3,\cdots$ 时，则所对应的 $d_1>d_2>d_3>\cdots$。我们取使 $F_1(0,d_1)=0$ 的 d_1，于是，对任意 $d>d_1$，$n\geqslant 1$ 时必有 $F_n(0,d)\geqslant 0$，而 $F_n(\sigma\Phi_2,d)>0$，基于引理 2 同样的理由，可得以下定理。

定理 3 如果(1)～(7)和 $F_n^{(3)}<0$ 成立，且 $d\geqslant d_1$，$F_1(0,d_1)=0$，则对于任意 $r\in(0,\sigma\Phi_2)$，$n\geqslant 1$，系统式(9.6.24)的零解是渐近稳定的。

若 $d\in(0,d_1)$，则一定存在唯一的 r_c 使 $F_1(r_c,d)=0$，即 $a_1(r_c)b_1(r_c)=c(r_c)$（为方便，以下均用 a，b 分别表示 a_1，b_1）。因此，当 $r\in(r_c,\sigma\Phi_2)$ 时，对于任意 $n\geqslant 1$，A 的特征值具有严格的负实部，系统式(9.6.24)处于稳定状态；当 $r=r_c$ 时，$F_1(r_c,d)=0$ 即 $ab=c$，系统式(9.6.24)处于临界状态；当 $r\in(0,r_c)$ 时，至少有 $F_1(r,d)<0$，A 的特征值具有非负实部，系统式(9.6.24)处于不稳定状态。

我们选取 r 为系统的分支参数，$r=r_c$ 为分支值，令 $\mu=r-r_c$，于是 μ 也为分支参数，$\mu=0$ 为分支值。以下我们只分析 $\mu=0$ 的临界情形，即 $a(0)b(0)=c(0)$ 的情形。

根据卡丹公式，通过计算，式(9.6.29)的三个特征根分别为

$$\lambda_1 = \alpha(\mu) + i\omega(\mu) = -\frac{\beta_1+\beta_2}{2} - \frac{a}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(\beta_1-\beta_2)$$

$$\lambda_2 = \alpha(\mu) - i\omega(\mu) = -\frac{\beta_1+\beta_2}{2} - \frac{a}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(\beta_1-\beta_2)$$

$$\lambda_3 = \beta_1 + \beta_2 - \frac{a}{3}$$

由 $a(0)b(0)=c(0)$，通过计算，可得

$$\alpha(0) = \alpha(r_c) = 0 \tag{9.6.36}$$

$$\omega(0) = \omega_0 = \omega(r_c) = \sqrt{b} \tag{9.6.37}$$

和

$$\alpha'(0) = -\frac{(a^2 - 3\overline{m}_{22}a + b)\left(1 - \frac{P_2^*\Phi_3'}{\Phi_3}\right) - 3\sigma_2 P_2^*\Phi_3'}{6(a^2+b)} \tag{9.6.38}$$

$$\omega'(0) = \frac{\overline{m}_{22}b\left(1 - \frac{P_2^*\Phi_3'}{\Phi_3}\right) + \sigma_2 P_2^*\Phi_3'(m_{11}a - b)}{2\sqrt{b}(a^2+b)} \tag{9.6.39}$$

现在将以上的分析概括如下：

(1)对于 $n=1$，$d\in(0,d_1)$ 时，则 $\alpha(0)=0$，$\omega_0=\sqrt{b}>0$；

(2)对于任意 $n\geqslant 2$，则有 $F_n(r_c,d)>0$，因此，系统式(9.6.24)除有一对共轭纯虚根外，其余的特征值均有严格的负实部；

(3)如果 $(a^2-3\overline{m}_{22}a+b)\left(1-\frac{P_2^*\Phi_3'}{\Phi_3}\right)<3\sigma_2P_2^*\Phi_3'$，那么 $\alpha'(0)>0$，这表明 r 横过临界值 r_c

时，系统式(9.6.24)出现 Hopf 分支。

因此，根据 Hopf 分支理论，可得以下定理。

定理 4 假设(1)—(7)和 $F_n^{(a)}<0$ 成立，如果 $d\in(0,d_1)$，且 $(a^2-3\overline{m}_{22}a+b)\left(1-\frac{P_2^*\Phi_3}{\Phi_3}\right)<3\sigma_2P_2^*\Phi_3$，那么当 $r=r_c$ 时，系统式(9.6.24)产生 Hopf 分支。

3. Poincaré 正则形式及中心流形

本段首先把系统式(9.6.24)化为 Poincaré 正则形式，然后借此讨论中心流形的存在性。考虑扩张系统

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t}&=AU+f(U,\mu)\\ \dot{\mu}&=0\end{aligned}\right\}\tag{9.6.40}$$

式中 $(U,\mu)\in R^3\times R^1$，$A=A_1+A_2\Delta$。

设 $q=(q_1,q_2,q_3)^T\sin x$，$q^*=(q_1^*,q_2^*,q_3^*)^T\sin x$ 分别表示矩阵 $A(0)$，$A^T(0)$ 对应于本征值 $i\omega_0$，$-i\omega_0$ 的本征向量，且 $(q_1,q_2,q_3)^T=(q_{1r}+iq_{1i},q_{2r}+iq_{2i},q_{3r}+iq_{3i})^T$，$(q_1^*,q_2^*,q_3^*)^T=(q_{1r}^*+iq_{1i}^*,q_{2r}^*+iq_{2i}^*,q_{3r}^*+iq_{3i}^*)^T$，$Aq=i\omega_0q$ 和 $A^Tq^*=-i\omega_0q^*$，经计算，得

$$q_{1r}=1,q_{1i}=0,q_{2r}=-\frac{m_{11}}{m_{12}},q_{2i}=\frac{\sqrt{b}}{m_{12}},q_{3r}=\frac{m_{32}}{m_{12}},q_{3i}=\frac{a\sqrt{b}}{m_{12}m_{23}}\tag{9.6.41}$$

$$q_1^*=q_{1r}^*+iq_{1i}^*,q_{2r}^*=\frac{1}{m_{21}}(-m_{11}q_{1r}^*+\sqrt{b}\,q_{1i}^*),q_{2i}^*=\frac{1}{m_{21}}(-\sqrt{b}\,q_{1r}^*-m_{11}q_{1i}^*)$$

$$q_{3r}^*=\frac{m_{23}}{m_{21}\sqrt{b}}(\sqrt{b}\,q_{1r}^*+m_{11}q_{1i}^*),q_{3i}^*=\frac{m_{23}}{m_{21}\sqrt{b}}(-m_{11}q_{1r}^*+\sqrt{b}\,q_{1i}^*)\tag{9.6.42}$$

式中 $q_{1r}^*=\frac{2M}{(M^2+N^2)}$，$q_{1i}^*=\frac{2N}{(M^2+N^2)}$，而 $M=1+\frac{(m_{11}-a)(m_{11}^2-b)}{m_{11}m_{12}m_{21}}$，$N=\frac{2(-m_{11}+a)\sqrt{b}}{m_{12}m_{21}}$

根据 $ab=c$，可以验证 $\langle q^*,q\rangle=1$，$\langle q^*,\bar{q}\rangle=0$。如果 $\langle q^*,e\rangle=0$，可计算得 $e_2=\frac{\overline{m}_{22}}{m_{12}}e_1$，$e_3=-\frac{\overline{m}_{22}m_{32}}{m_{12}a}e_1$。若取 $e_1=\sin x$，则 $e=\left(1,\frac{\overline{m}_{22}}{m_{12}},-\frac{\overline{m}_{22}m_{32}}{m_{12}a}\right)^T\sin x$。

为了得到式(9.6.40)的 Poincaré 正则形式，必须进行变量代换，令 $U=P_0V$，即

$$V=P_0^{-1}U\tag{9.6.43}$$

$$P_0=[Req,-\mathrm{Im}q,\mathrm{e}]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -\frac{m_{11}}{m_{12}} & -\frac{\sqrt{b}}{m_{12}} & \frac{\overline{m}_{22}}{m_{12}}\\ \frac{m_{32}}{m_{12}} & -\frac{a\sqrt{b}}{m_{12}m_{23}} & -\frac{\overline{m}_{22}m_{32}}{m_{12}a}\end{bmatrix}\sin x\tag{9.6.44}$$

且

$$P_0^{-1}=\frac{1}{|P_0|}\begin{bmatrix}\frac{\overline{m}_{22}\sqrt{b}(b+m_{11}a)}{m_{11}m_{12}^2m_{23}} & \frac{\overline{m}_{22}^2b}{m_{11}m_{12}^2m_{23}} & \frac{\sqrt{b}}{m_{12}}\\ \frac{\overline{m}_{22}b(m_{11}-a)}{m_{11}m_{12}^2m_{23}} & \frac{b}{m_{12}m_{23}} & -\frac{a}{m_{12}}\\ \frac{m_{21}a\sqrt{b}}{\overline{m}_{22}m_{12}m_{23}} & \frac{a\sqrt{b}}{m_{12}m_{23}} & -\frac{\sqrt{b}}{m_{12}}\end{bmatrix}(\sin x)^{-1}$$

式中$|P_0| = -\sqrt{b}(a^2+b)/m_{12}^2 m_{23}$. 因此，式(9.6.40)化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &= P_0^{-1}AP_0V + G(V;\mu) \\ V(0,t) &= V(\pi,t) = 0\end{aligned}\right\} \tag{9.6.45}$$

式中$G(V;\mu) = P_0^{-1}f(P_0V;\mu)$. 由式(9.6.43)和式(9.6.44)计算得

$$L = P_0^{-1}AP_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_0 \end{bmatrix}, L^* = L^T = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 & 0 \\ -\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_0 \end{bmatrix}$$

式中$D_0 = a(m_{11}^2 a - \overline{m}_{22}b)/m_{11}(a^2+b)$, 所以式(9.6.45)具有所需要的 Poincaré 正则形式。

通过以上分析，根据中心流形定理可知，在V_1, V_2和μ空间的原点附近，且通过原点存在一族中心流形

$$C = \{(V,\mu) \mid (V,\mu) = (V_1,V_2,W(V_1,V_2,\mu);\mu), |(V_1,V_2,\mu)| < \delta\},$$

式中δ为充分小，W是共同对V_1, V_2和μ属于C^{L+2}的，且$W(V_1,V_2,\mu) = O(|V_1,V_2,\mu|^2)$。这一族中心流形在原点与$V_c \times R$相切，这里$V_c$是本征值$\pm i\omega_0$所对应的本征向量空间，它具有局部吸引和局部不变的特征。为简单计，我们引入流形片的概念即

$$C_\mu = \{V \mid (V,\mu) \in C, \mu \text{是常数}\}.$$

现在我们把式(9.6.45)限制到中心流形片$C_0(\mu=0)$上，为此，引入复值坐标，定义

$$z = \langle q^*, V \rangle, \quad V = W + zq + \overline{zq} \tag{9.6.46}$$

于是，系统式(9.6.45)由

$$\dot{z} = i\omega_0 z + g(z,\overline{z};\mu) \tag{9.6.47}$$

描述，式中$g = G(z,\overline{z},W(z,\overline{z},\mu);\mu)$, $G = \langle q^*, f(W+2\mathrm{Re}(zq);\mu)\rangle$

$$\dot{W} = LW + H(z,\overline{z},W(z,\overline{z},\mu);\mu) \tag{9.6.48}$$

式中$H = f(W+2\mathrm{Re}(zq);\mu) - 2\mathrm{Re}(qG)$, $H = (h_1,h_2,h_3)^T$, $W = (W_1,W_2,W_3)^T$. 且$\langle \mathrm{Re}q^*, W\rangle = 0$. $\langle \mathrm{Im}q^*, W\rangle = 0$, 同时，$g_z(0,0,\mu) = g_{\overline{z}}(0,0,\mu) = 0$, $W_z(0,0,\mu) = W_{\overline{z}}(0,0,\mu) = 0$

4. 分支周期解及其稳定性

下面将求出系统式(9.6.24)分支周期解的渐近形式，同时，还要推导它的稳定性的判据。我们考察式(9.6.47)和式(9.6.48)。

首先，把$W(z,\overline{z})$和$g(z,\overline{z})$在原点展开为关于z和$\overline{z}$的级数形式

$$g = \sum_{i+j=1}^{L+1} \frac{g_{ij}(x,0)}{i!j!} z^i \overline{z}^j + O(|z|^{L+2}) \tag{9.6.49}$$

$$W = \sum_{i+j=1}^{L+1} \frac{W_{ij}(x,0)}{i!j!} z^i \overline{z}^j + O(|z|^{L+2}) \tag{9.6.50}$$

为解决本节所提出的问题，只需计算g_{ij}, W_{ij}, $i+j=2$和g_{21}等系数。

应用式(9.6.43)和式(9.6.46)，经计算得

$$u_1 = [\zeta_{11}(z+\overline{z}) + i\zeta_{12}(z-\overline{z})]\sin x + W_1 + W_2 \tag{9.6.51}$$

$$u_2 = [\zeta_{21}(z+\overline{z}) + i\zeta_{22}(z-\overline{z})]\sin x + \left[-\frac{m_{11}}{m_{12}}W_1 - \frac{\sqrt{b}}{m_{12}}W_2 + \frac{\overline{m}_{22}}{m_{12}}W_3\right] \tag{9.6.52}$$

$$u_3 = [\zeta_{31}(z+\overline{z}) + i\zeta_{32}(z-\overline{z})]\sin x + \left[\frac{m_{32}}{m_{12}}W_1 - \frac{a\sqrt{b}}{m_{12}m_{23}}W_2 - \frac{\overline{m}_{22}m_{32}}{m_{12}a}W_3\right] \tag{9.6.53}$$

式中

$$\zeta_{11}=\frac{m_{12}+m_{32}}{m_{12}},\qquad \zeta_{12}=\frac{a\sqrt{b}}{\overline{m}_{12}m_{32}}$$

$$\zeta_{21}=\frac{\overline{m}_{22}m_{32}+m_{11}\sqrt{b}-m_{11}m_{12}}{m_{12}^{2}},\qquad \zeta_{22}=\frac{\overline{m}_{22}a\sqrt{b}-m_{12}b}{m_{12}^{2}m_{23}} \tag{9.6.54}$$

$$\zeta_{31}=\frac{m_{32}}{m_{12}}+\frac{m_{11}a\sqrt{b}}{m_{12}^{2}m_{23}}-\frac{\overline{m}_{22}m_{32}^{2}}{m_{12}^{2}a},\qquad \zeta_{32}=-\frac{ab+\overline{m}_{22}m_{32}\sqrt{b}}{m_{12}^{2}m_{23}}$$

由式(9.6.26)、(9.6.51)、(9.6.53)和(9.6.54),通过计算整理,得

$$\begin{aligned}f_i(z,\bar{z},0)=&[a_{11}^{(i)}(z+\bar{z})^2+a_{12}^{(i)}(z-\bar{z})^2+ia_{13}^{(i)}(z+\bar{z})(z-\bar{z})]\sin^2x\\&+[a_{21}^{(i)}(z+\bar{z})^3+a_{22}^{(i)}(z+\bar{z})(z-\bar{z})^2+ia_{23}^{(i)}(z+\bar{z})^2(z-\bar{z})\\&+ia_{24}^{(i)}(z-\bar{z})^3]\sin^3x+[a_{31}^{(i)}(z+\bar{z})+ia_{32}^{(i)}(z-\bar{z})]W_1\sin x\\&+[a_{33}^{(i)}(z+\bar{z})+ia_{34}^{(i)}(z-\bar{z})]W_2\sin x+[a_{35}^{(i)}(z+\bar{z})\\&+ia_{36}^{(i)}(z-\bar{z})]W_3\sin x+O(|z|^4),\ i=1,2,3\end{aligned} \tag{9.6.55}$$

式中$a_{11}^{(i)},a_{12}^{(i)},a_{13}^{(i)},a_{21}^{(i)},a_{22}^{(i)},a_{23}^{(i)},a_{24}^{(i)},a_{31}^{(i)},a_{32}^{(i)},a_{33}^{(i)},a_{34}^{(i)},a_{35}^{(i)}$和$a_{36}^{(i)},i=1,2,3$。通过较为复杂的计算,均可由$\zeta_{11},\zeta_{12},\zeta_{21},\zeta_{22},\zeta_{31}$和$\zeta_{32}$及$f_1,f_2,f_3$对于$(P_1,P_2,P_3)$的二阶和三阶偏导数表示出来。

再由式(9.6.24)和式(9.6.55),得

$$\begin{aligned}<q^*,f>=&\int_0^\pi[\bar{q}_1^*f_1+\bar{q}_2^*f_2+\bar{q}_3^*f_3]\sin x\,\mathrm{d}x\\=&\sum_{k=1}^{3}\Big\{\frac{4}{3}[a_{11}^{(k)}(q_{kr}^*-iq_{ki}^*)(z+\bar{z})^2+a_{12}^{(k)}(q_{kr}^*-iq_{ki}^*)(z-\bar{z})^2\\&+a_{13}^{(k)}(q_{ki}^*+iq_{kr}^*)(z+\bar{z})(z-\bar{z})]+\frac{3\pi}{8}[a_{21}^{(k)}(q_{kr}^*-iq_{ki}^*)(z+\bar{z})^3\\&+a_{22}^{(k)}(q_{kr}^*-iq_{ki}^*)(z+\bar{z})(z-\bar{z})^2+a_{23}^{(k)}(q_{ki}^*+iq_{kr}^*)(z+\bar{z})^2(z-\bar{z})\\&+a_{24}^{(k)}(q_{ki}^*+iq_{kr}^*)(z-\bar{z})^3]+[(q_{kr}^*a_{31}^{(k)}+q_{ki}^*a_{32}^{(k)})+i(q_{ki}^*a_{31}^{(k)}\\&-q_{kr}^*a_{32}^{(k)})]\hat{W}_1+[(q_{kr}^*a_{33}^{(k)}+q_{ki}^*a_{34}^{(k)})+i(q_{kr}^*a_{34}^{(k)}-q_{ki}^*a_{33}^{(k)})]\hat{W}_2\\&+[(q_{kr}^*a_{35}^{(k)}+q_{ki}^*a_{36}^{(k)})+i(q_{kr}^*a_{36}^{(k)}-q_{ki}^*a_{35}^{(k)})]\hat{W}_3\Big\}+O(|z|^4)\end{aligned} \tag{9.6.56}$$

式中$\hat{W}_j=\int_0^\pi W_j\sin^2x\,dx,j=1,2,3$。

由式(9.6.47)、(9.6.48)和(9.6.58),经计算得

$$\begin{aligned}h_j=&[(h_j^+)_{20}z^2+(h_j^+)_{02}\bar{z}^2+(h_j^+)_{11}z\bar{z}]\sin^2x+[(h_j^-)_{20}z^2+(h_j^-)_{02}\bar{z}^2\\&+(h_j^-)_{11}z\bar{z}]\sin x+O(|z|^3),\quad j=1,2,3\end{aligned} \tag{9.6.57}$$

式中$((h_j^+)_{20},(h_j^+)_{02},(h_j^+)_{11}$和$(h_j^-)_{20},(h_j^-)_{02},(h_j^-)_{11}$,通过计算整理,均可用$a_{11}^{(i)},a_{12}^{(i)},a_{13}^{(i)},a_{21}^{(i)},a_{22}^{(i)},a_{23}^{(i)},a_{24}^{(i)},a_{31}^{(i)},a_{32}^{(i)},a_{33}^{(i)},a_{34}^{(i)},a_{35}^{(i)}$和$a_{36}^{(i)},i=1,2,3$和$q_{kr}^*,q_{ki}^*,k=1,2,3$.表示出来。

下面将用正弦级数表示$\hat{W}_{ij},i+j=2$。

$\sin^2x=\sum_{n=1}^{\infty}I_n\sin nx$,

$$I_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x \sin^{\prime} nx \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n = 2,4,\cdots \\ \dfrac{8}{n\pi(4-n^2)} & n = 1,3,\cdots \end{cases} \tag{9.6.58}$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{1n} \sin nx, \quad \delta_{1n} = \begin{cases} 1, n = 1 \\ 0, n \neq 1 \end{cases} \tag{9.6.59}$$

于是,由式(9.6.57)~式(9.6.59),得

$$h_{20} = \sum_{n=1}^{\infty} [(h_1^+)_{20} I_n + (h_1^-)_{20}\delta_{1n}, (h_2^+)_{20} I_n \\ + (h_2^-)\delta_{1n}, (h_3^+)_{20} I_n + (h_3^-)_{20}\delta_{1n}]^T \sin nx \tag{9.6.60}$$

$$h_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} [(h_1^+)_{11} I_n + (h_1^-)_{11}\delta_{1n}, (h_2^+)_{11} I_n \\ + (h_2^-)_{11}\delta_{1n}, (h_3^+)_{11} I_n + (h_3^-)_{11}\delta_{1n}]^T \sin nx \tag{9.6.61}$$

$$h_{02} = \bar{h}_{20} \tag{9.6.62}$$

根据[55],有

$$[(\lambda i + \bar{\lambda} j)I - L]W_{ij}(\mu) = h_{ij}(\mu), \quad i + j = 2 \tag{9.6.63}$$

由式(9.6.57)~式(9.6.63),得

$$\hat{W}_{20} = \int_0^{\pi} W_{20} \sin^2 x \, \mathrm{d}x \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}[2i\omega_0 I - L_n]^{-1}[(h_1^+)_{20} I_n^2 + (h_1^-)_{20}\delta_{1n} I_n, (h_2^+)_{20} I_n^2 \\ + (h_2^-)_{20}\delta_{1n} I_n, (h_3^+)_{20} I_n^2 + (h_3^-)\delta_{1n} I_n]^T \tag{9.6.64}$$

$$\hat{W}_{02} = \overline{W}_{20}, \tag{9.6.65}$$

$$\hat{W}_{11} = \int_0^{\pi} W_{11} \sin^2 x \, \mathrm{d}x \\ = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2} L_n^{-1}[(h_1^+)_{11} I_n^2 + (h_1^-)_{11}\delta_{1n} I_n, (h_2^-)_{11} I_n^2 \\ + (h_2^-)_{11}\delta_{1n} I_n, (h_3^+)\delta_{11} I_n^2 + (h_3^-)_{11}\delta_{1n} I_n]^T \tag{9.6.66}$$

式中

$$L_n^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\overline{m}_{22}^2 \sqrt{b}}{m_{12}(a^2+b)} d(1-n^2) & \dfrac{\overline{m}_{22}^2 b}{m_{11} m_{12}(a^2+b)} d(1-n^2) + \omega_0 & \dfrac{\overline{m}_{22}^3 \sqrt{b}}{m_{11} m_{12}(a^2+b)} d(1-n^2) \\ \dfrac{m_{11} \sqrt{b}}{a^2+b} d(1-n^2) + \omega_0 & \dfrac{b}{a^2+b} d(1-n^2) & -\dfrac{\overline{m}_{22} \sqrt{b}}{a^2+b} d(1-n^2) \\ \dfrac{m_{11} a}{a^2+b} d(1-n^2) & \dfrac{a\sqrt{b}}{a^2+b} d(1-n^2) & D_0 - \dfrac{\overline{m}_{22} a}{a^2+b} d(1-n^2) \end{bmatrix} \tag{9.6.67}$$

因此,由式(9.6.49)、(9.6.56)、(9.6.64)~(9.6.67),可以算出

$$g_{20} = \sum_{k=1}^{3} \frac{4}{3}[(a_{11}^{(k)} q_{kr}^* + a_{12}^{(k)} q_{kr}^* + a_{13}^{(k)} q_{ki}^*) + i(-a_{11}^{(k)} q_{ki}^* - a_{12}^{(k)} q_{ki}^* + a_{13}^{(k)} q_{kr}^*)] \tag{9.6.68}$$

$$g_{02} = \sum_{k=1}^{3} \frac{4}{3}[(a_{11}^{(k)} q_{kr}^* + a_{12}^{(k)} q_{kr}^* - a_{13}^{(k)} q_{ki}^*) - i(a_{11}^{(k)} q_{ki}^* + a_{12}^{(k)} q_{ki}^* + a_{13}^{(k)} q_{kr}^*)] \tag{9.6.69}$$

$$g_{11} = \sum_{k=1}^{3} \frac{8}{3}[(a_{11}^{(k)} - a_{12}^{(k)})(q_{kr}^{*} - iq_{ki}^{*})] \tag{9.6.70}$$

$$g_{21} = \sum_{k=1}^{3} \Big\{ \frac{6\pi}{8}[(3a_{21}^{(k)} - a_{22}^{(k)})(q_{kr}^{*} - iq_{ki}^{*}) + (a_{23}^{(k)} - 3a_{24}^{(k)})(q_{ki}^{*} + iq_{kr}^{*})] + \sum_{l=1}^{3}[(q_{kr}^{*} - iq_{ki}^{*})(a_{3(2l-1)}^{(k)} - ia_{3(2l)}^{(k)})W_{20}^{(l)} + 2(q_{kr}^{*} - iq_{ki}^{*})(a_{3(2l-1)}^{(k)} + ia_{3(2l)}^{(k)})W_{11}^{(l)}]\Big\} \tag{9.6.71}$$

$$\mathrm{Im}(g_{20}g_{11}) = \frac{32}{9}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}[-a_{11}^{(k)}(q_{kr}^{*}q_{li}^{*} + q_{ki}^{*}q_{lr}^{*}) - a_{12}^{(k)}(q_{kr}^{*}q_{li}^{*} + q_{ki}^{*}q_{lr}^{*}) + a_{13}^{(k)}(q_{kr}^{*}q_{lr}^{*} - q_{ki}^{*}q_{li}^{*})](a_{11}^{(l)} - a_{12}^{(l)}) \tag{9.6.72}$$

由式(9.6.38)、(9.6.39)、(9.6.69)～(9.6.72)，计算得

$$C_1(0) = \frac{i}{2\sqrt{b}}\Big\{g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2\Big\} + \frac{1}{2}g_{21} \tag{9.6.73}$$

$$\mathrm{Re}C_1(0) = -\frac{1}{2\sqrt{b}}\mathrm{Im}(g_{20}g_{11}) + \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{2}g_{21}\Big) \tag{9.6.74}$$

$$\mathrm{Im}C_1(0) = \frac{1}{2\sqrt{b}}\Big[\mathrm{Re}(g_{20}g_{11}) - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2\Big] + \mathrm{Im}\Big(\frac{1}{2}g_{21}\Big) \tag{9.6.75}$$

由式(9.6.73)～式(9.6.75)，得

$$\mu(\varepsilon) = \mu_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3); \quad \mu_2 = \frac{-\mathrm{Re}C_1(0)}{\alpha'(0)} \tag{9.6.76}$$

$$T(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\sqrt{b}}[1 + \tau_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)], \quad \tau_2 = \frac{-[\mathrm{Im}C_1(0) + \mu_2\omega'(0)]}{\sqrt{b}} \tag{9.6.77}$$

$$\beta(\varepsilon) = \beta_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$$

$$\beta_2 = 2\mathrm{Re}C_1(0) = \frac{32}{9\sqrt{b}}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}[(a_{11}^{(k)} + a_{12}^{(k)})(q_{kr}^{*}q_{li}^{*} + q_{ki}^{*}q_{lr}^{*}) - a_{13}^{(k)}(q_{kr}^{*}q_{lr}^{*} - q_{ki}^{*}q_{li}^{*})](a_{11}^{(l)} - a_{12}^{(l)}) + \mathrm{Re}(g_{21}) \tag{9.6.78}$$

由式(9.6.43)、(9.6.46)和式(9.6.63)～式(9.6.66)，可得分支周期解的渐近形式如下

$$V_1 = 2\varepsilon\cos\frac{2\pi}{T}t + O(\varepsilon^2) \tag{9.6.79}$$

$$V_2 = -\frac{m_{11}}{m_{12}}2\varepsilon\cos\frac{2\pi}{T}t - \frac{\sqrt{b}}{m_{12}}2\varepsilon\sin\frac{2\pi}{T}t + O(\varepsilon^2) \tag{9.6.80}$$

$$V_3 = \frac{m_{32}}{m_{12}}2\varepsilon\cos\frac{2\pi}{T}t - \frac{a\sqrt{b}}{m_{12}m_{23}}2\varepsilon\sin\frac{2\pi}{T}t + O(\varepsilon^2) \tag{9.6.81}$$

所以，由 $P_i = P_i^* + u_i$，$U = P_0V$ 和式(9.6.79)～式(9.6.81)，得

$$P_1 = P_1^* + \Big[\frac{2(m_{12} + m_{32})}{m_{12}}\sqrt{\frac{r - r_c}{\mu_2}}\cos\frac{2\pi t}{T} - \frac{2a\sqrt{b}}{m_{12}m_{23}}\sqrt{\frac{r - r_c}{\mu_2}}\sin\frac{2\pi t}{T}\Big]\sin x + O(\varepsilon^2) \tag{9.6.82}$$

$$P_2 = P_2^* + \Big[2\Big(-\frac{m_{11}}{m_{12}} + \frac{m_{11}\sqrt{b}}{m_{12}^2} + \frac{m_{22}m_{32}}{m_{12}^2}\Big)\sqrt{\frac{r - r_c}{\mu_2}}\cos\frac{2\pi t}{T}$$

$$+2\left(\frac{b}{m_{12}^2}-\frac{\overline{m}_{22}a\sqrt{b}}{m_{12}^2 m_{23}}\right)\sqrt{\frac{r-r_c}{\mu_2}}\sin\frac{2\pi t}{T}\Bigg]\sin x+O(\varepsilon^2) \qquad (9.6.83)$$

$$P_3=P_3^*+\Bigg[2\left(\frac{m_{32}}{m_{12}}+\frac{m_{11}^2 m_{32}}{m_{12}^2\sqrt{b}}-\frac{\overline{m}_{22}m_{32}^2}{m_{12}^2 a}\right)\sqrt{\frac{r-r_c}{\mu_2}}\cos\frac{2\pi t}{T}$$

$$+2\left(\frac{m_{11}m_{32}}{m_{12}^2}+\frac{\overline{m}_{22}m_{32}\sqrt{b}}{m_{12}^2 m_{23}}\right)\sqrt{\frac{r-r_c}{\mu_2}}\sin\frac{2\pi t}{T}\Bigg]\sin x+O(\varepsilon^2)$$

$$(9.6.84)$$

根据以上的计算和分析，可得如下定理。

定理 5 如果定理 2 的条件成立，那么

(1)系统式(9.6.6)可以从平衡点(P_1^*,P_2^*,P_3^*)分支出一族小振幅周期解，其渐近形式为式(9.6.82)～式(9.6.84)，周期为式(9.6.77)；

(2)若$\frac{32}{9\sqrt{b}}\sum_{k,l=1}^{3}[(a_{11}^{(k)}+a_{12}^{(k)})(q_{lk}^*q_{ll}^*+q_{kl}^*q_{lk}^*)-a_{13}^{(k)}(q_{lk}^*q_{lk}^*-q_{kl}^*q_{kl}^*)](a_{12}^{(l)}-a_{11}^{(l)})>\mathrm{Re}(g_{21})$，则系统式(9.6.6)分支的小振幅周期解式(9.6.82)～式(9.6.84)是轨道渐近稳定的。否则，分支周期解就不稳定。

4. 例子

为了加深理解本段的结果，现在考虑含扩散及群体防卫的简单食物链的特殊系统

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial P_1}{\partial t}=P_1\left(1-\frac{P_1}{k}\right)-\frac{24P_1}{P_1^2+2P_1+16}P_2\\
&\frac{\partial P_2}{\partial t}=d\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2}+P_2\left(-r+\frac{12}{P_1^2+2P_1+16}\right)-\frac{P_2}{\frac{31}{24}+P_2}P_3\\
&\frac{\partial P_3}{\partial t}=P_3\left[-1+\frac{5P_2}{\frac{31}{24}+P_2}\right]\\
&P_1(0,t)=P_1(\pi,t)=P_1^*,\ P_2(0,t)=P_2(\pi,t)=P_2^*\\
&P_3(0,t)=P_3(\pi,t)=P_3^*
\end{aligned}\right\} \qquad (9.6.85)$$

式中$\Phi_1=1-\frac{P_1}{k}$，$\Phi_2=\frac{24P_1}{P_1^2+2P_1+16}$，$\Phi_3=\frac{P_2}{\frac{31}{24}+P_2}$，$\sigma=\frac{1}{2}$，$\sigma_1=1$，$\sigma_2=5$，$k=4$，$r$取为分支参数。

根据以上内容所得的结果，计算得

$$d_1=0.226294,\ d=0.1,\ d<d_1,\ r_c\in(0,1.161290)$$

$$\gamma_c=0.461468,\ P_1^*=3,\ P_2^*=0.322917,\ P_3^*=1.129921$$

$$\omega_0=0.776645,\ \alpha'(0)=0.305000>0,\ \omega'(0)=-0.524093<0$$

$$\Phi_2'(P_1^*)=0.174818>0,\ E_{0}^{(3)}=-0.215169<0$$

由以上计算结果可以看出，定理 2 中的条件全部满足，所以，系统式(9.6.85)在 $r_c=$ 0.461468 处产生 Hopf 分支。

再进行复杂的计算，得

$$\mathrm{Re}C_1(0)=-8.082493$$

$$\mathrm{Im}C_1(0)=-459.912880$$

$$T=8.090183[1+610.061889\varepsilon^2+O(\varepsilon^2)]$$

$$\beta = -16.144980\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) < 0$$

$$\varepsilon^2 \approx \frac{r - 0.461468}{26.499977}$$

因此，系统式(9.6.85)从平衡点$(3, \frac{31}{96}, 1.129921)$分支出轨道渐近稳定的小振幅周期解，其渐近形式为

$$P_1 = 3 - 0.079742\sqrt{r - 0.461468}\cos 0.776645t \sin x$$

$$+ 0.335497\sqrt{r - 0.461468}\sin 0.776645t \sin x + O\left(\frac{r - 0.461468}{26.499977}\right)$$

$$P_2 = \frac{31}{96} - 0.115544\sqrt{r - 0.461468}\cos 0.776645t \sin x$$

$$+ 0.049215\sqrt{r - 0.461468}\sin 0.776645t \sin x + O\left(\frac{r - 0.461468}{26.499977}\right)$$

$$P_3 = 1.129921 - 0.332190\sqrt{r - 0.461468}\cos 0.776645t \sin x$$

$$- 0.098714\sqrt{r - 0.461468}\sin 0.776645t \sin x + O\left(\frac{r - 0.461468}{26.499977}\right)$$

习 题 九

1. 讨论下列平面系统当参数$\mu \in R$变动时的相图的变化，并确定分支值μ_0。

(1)$\dot{x} = \mu - x^2, \dot{y} = -y$；

(2)$\dot{r} = r[\mu - (1 - r^2)], \dot{\theta} = 1$；

(3)$\dot{x} = \mu + x^2 - xy, \dot{y} = y^2 - x^2 - 1$。

2. 讨论系统

$$\dot{x} = f(x, \mu), x \in R, \mu \in R$$

当μ在$\mu_0 = 0$附近变化时平衡点的分支情况，其中$f(x, \mu)$分别取下面的形式：

(1)$f(x, \mu) = \mu x - x^2$；

(2)$f(x, \mu) = \mu^2 x + x^3$；

(3)$f(x, \mu) = \mu^2 a x + 2\mu x^3 - x^5$ （对不同的$a \in R$）。

3. 分别用LS方法和中心流形方法讨论系统

$$\dot{x} = \mu x + xy - x^3, \dot{y} = y + x^2 - y^2, (x, y) \in R^2$$

当参数μ在0附近变化时平衡点的分支情况。

4. 证明：设C^∞函数g满足

$$g(0,0) = g_x(0,0) = 0,$$

和

$$g_{xx}(0,0) \neq 0, g_\mu(0,0) \neq 0,$$

则$g(x, \mu)$与$h(x, \mu) = \varepsilon x^2 + \delta\mu$等价，$\varepsilon = \mathrm{sgn}\, g_{xx}(0,0)$，$\delta = \mathrm{sgn}\, g_\mu(0,0)$。

5. 求下列函数的普适开折及分支图。

(1)$x^3 - \mu$；

(2)$x^3 + \mu x^3 + \mu^2$.

6. 证明：

(1)$h = x^3 + \mu^2 + r\mu x = 0$，当$r \neq 0$时在$(x, \mu) = (0,0)$处有叉形分支；

(2)$H=x^3+\mu^2+r\mu x+a_1+a_2x$ 是 h 的一个普适开折。

7. 设 $f:R^3\times R\to R^3$ 由下式给出：

$$f(x,\mu)=\begin{bmatrix}\mu x_1-x_2^2+x_3^2\\ 3x_1^2-x_2^2+x_3\\ x_1^2+x_2^2+x_3\end{bmatrix}$$

应用 LS 方法求 $f(x,\mu)=0$ 在 $(x,\mu)=(0,0)$ 附近的静态分支解。

8. 证明系统

$$\dot{x}=y+o(|x|,|y|),\dot{y}=0(|x|,|y|)$$

可通过坐标变换化为规范形

$$\dot{u}=v+au^2+o(|u|^2,|v|^2),\dot{v}=bu^2+o(|u|^2,|v|^2),$$

或

$$\dot{u}=v+o(|u|^2,|v|^2),\dot{v}=au^2+buv+o(|u|^2,|v|^2).$$

9. 证明自治系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y+x[\mu-(x^2+y^2)]\\ \dot{y}&=x+y[\mu-(x^2+y^2)]\end{aligned}\qquad (x,y)\in R^2,\mu\in R$$

在 $\mu=0$ 处出现 Hopf 分支，并研究分支性态。

10. 研究下列系统当 μ 在 0 附近变化时的相图，并考虑能否用二维 Hopf 分支的有关定理解释（分支参数 $\mu\in R$）。

(1)$\begin{cases}\dot{r}=r(\mu-r^2)(2\mu-r^2)^2\\ \dot{\theta}=1\end{cases}$

(2)$\begin{cases}\dot{r}=\mu r(r+\mu)^2\\ \dot{\theta}=1\end{cases}$

11. 研究系统

$$\begin{cases}\dot{x}=\mu+x+y-\dfrac{1}{3}x^3\\ \dot{y}=\rho(a-x-by)\end{cases}\qquad (x,y)\in R^2,\mu\in R$$

其中 $a\in R$，$b,\rho\in(0,1)$ 都是固定常数，μ 为分支参数。

(1)证明对每个 $\mu\in R$，此系统都有唯一的平衡点 $(x^*(\mu),y^*(\mu))$。讨论此平衡点的定性性态随 μ 的变化。

(2)讨论此系统的 Hopf 分支问题。

12. 如果两个不同的常微分方程系统

$$\dot{x}=A(\mu)x+f(x,\mu)$$

和

$$\dot{y}=A(\mu)y+g(y,\mu)$$

有公共的平衡点即

$$x^*(\mu)=y^*(\mu)=0$$

在 $\mu=0$ 处它们都满足 Hopf 定理的假设，并且 f 和 g 有关于 $x^*(\mu)$ 和 $y^*(\mu)$ 的 Taylor 展开式（分别以 $x-x^*(\mu)$ 和 $y-y^*(\mu)$ 的形式），这两个展开式一直符合到包含立方项。对每一系统分别计算 μ_2，T_2 和 β_2 之值并进行比较。

第十章　浑沌的数学基础与应用

20 世纪 60 年代以来，浑沌研究的进展无疑是非线性科学最重要的成就之一。"浑沌"这一现象及有关的概念已渗透到数学、物理、化学、天文、生物、力学、经济、医学等领域，估计它对全部科学（包括自然科学、社会乃至经济）所起的作用将相当于微积分学在 19 世纪对数理、工程科学的影响。现在对浑沌的研究还在不断深入和发展中。

本章从浑沌现象和分析浑沌的数学方法入手，介绍浑沌的数学基础和应用。

§10.1　概　述

浑沌学是研究动力系统中一类复杂的非平庸行为（性态），这种行为称之为浑沌运动。所谓浑沌运动，在数学上，还没有一个统一的精确的定义，但在物理上可以看作是确定性的非线性动力系统出现的具有内在随机性的状态的变化过程。

给定一个动力系统，如果它的后一刻状态取决于前一刻状态，未来的行为取决于现在的行为，彼此之间的关系是确定的，便称之为确定性系统。反之，称为不确定性系统。地球绕日旋转，导弹沿设计的弹道飞行，是确定性系统；投掷硬币、布朗粒子无规行走，是不确定性系统。存在两类基本的不确定性：一种是随机性，另一种是模糊性。目前的动力学研究尚未涉及模糊性现象。所谓不确定系统是指随机系统，即前一刻与后一刻状态之间的关系有随机性、现在与未来之间在统计意义上具有因果联系。

动力学撇开具体过程的特殊起源、性质和环境，把系统抽象为某种数学方程来描述，通常认为系统随时间 t 是连续变化的。状态随时间连续改变的系统，称为连续系统，用连续数学方程描述，重要的物理过程大多用微分方程描述，生物学过程、经济学过程也越来越多地用微分方程来描述。比较简单的是常微分方程，可以刻划相互耦合的具有有限个自由度的时间演化过程。目前浑沌学研究主要是用常微分方程刻划的动力系统，过去人们公认，动力系统的随机性通过三种方式表现出来：方程中包含随机作用项、随机系数、随机初始条件（初值），浑沌学至少目前还不大研究这类系统。运动方程中既无随机项，又无随机系数，初值也是确定的，由这类运动方程描述的是确定性系统，浑沌学研究的主要是这类现象。

确定性连续动力系统的浑沌研究，已经找到许多适当的方程，最著名的是 E. N. Lorenz 于 1963年发现浑沌时研究过的方程组

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\sigma(x-y)\\ \frac{dy}{dt} &= rx-y-xz\\ \frac{dz}{dt} &= xy-bz\end{aligned}\right\}\qquad(10.1.1)$$

其中 σ 是 Prandtl 数，r 为 Rayleigh 数，b 无直接物理意义，式(10.1.1)称为 Lorenz 方程。

最简单的也许是 Rössler 方程

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -(y+z) \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= x + ay \\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= b + xz - cz
\end{aligned}\right\} \tag{10.1.2}
$$

此方程的特点是只有最后一个方程中含有非线性项。

当各种事件和结果仅在离散时间上(如按年、月或日)出现或被我们观察时,需要引进离散时间概念。在天文学中,如果只考察近点(非近点一般难以考察),天体的状态可以按年来描述。研究人口演化时,比较方便的办法是逐年而非连续地计算人口。对于国民经济的发展,一般地按年国民生产总值等指标来考察。用计算机处理数据,按离散的时间间隔采样,就把连续过程化为离散过程。从某个时刻开始,随着固定时刻 1,2,3,…,按照确定的规则把某一时刻的变量值与相邻时刻的变量值联系起来所得到的方程,叫做差分方程,它是描述离散动力系统的数学工具。最著名的例子是 Logistic 方程。经过适当的变量替换,这个方程可以表示为

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) \tag{10.1.3}$$

n 为离散时间变量,λ 记控制参数。(10.1.3)式表明,n 时刻的系统状态 x_n 完全决定了 $(n+1)$ 时刻的状态 x_{n+1},因而是确定性系统。这个方程有广泛的用途,最典型的例子是用它描述没有世代交叠的种群演化,知道第 n 代种群数即可精确预见第 $n+1$ 代的种群数。最近 20 年研究才发现,这个形式极为简单的动力系统具有异常丰富的动态特性。

另一类简单系统是圆圆映射:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + A - B\sin(2\pi\theta_n) \quad \bmod(1) \tag{10.1.4}$$

θ 代表单位圆上的角度,转一整圈的角度记为 1,超过 1 时去掉整数只留小数,这叫做以 1 为模,记作 mod(1)。式(10.1.4)可以模拟两个耦合非线性振子的许多复杂行为,可观察到锁相、分支及浑沌现象。

式(10.1.3)和式(10.1.4)均属于一维非线性迭代(一阶差分方程)系统,一维迭代的一般形式为

$$x_{n+1} = F(\lambda, x_n) \tag{10.1.5}$$

F 记非线性函数,λ 记参数。这类模型还可以模拟经济或社会系统,如用来描述由多种经济量产生的时间序列。若用 x 记单位时间间隔(采样间隔)内大脑记住信息比特数,则可用式(10.1.5)模拟学习过程的动态演化特性。

描述二维离散系统的著名方程是 Hénon 于 1976 年提出的模型

$$
\left.\begin{aligned}
x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n \\
y_{n+1} &= bx_n
\end{aligned}\right\} \tag{10.1.6}
$$

其中 $b \neq 0$($b=0$ 时退化为一维迭代(10.1.3))。

动力系统按变量之间的关系,划分为线性的与非线性的两类。线性系统最基本的特点是具有叠加性(图 10.1)。图 10.1 中,对系统施加一个作用 u,系统会作出相应的响应(行为)y,u 与 y 之间有一定的因果联系。以 S 记系统,以 u_1、u_2 记两个不同的输入作用,

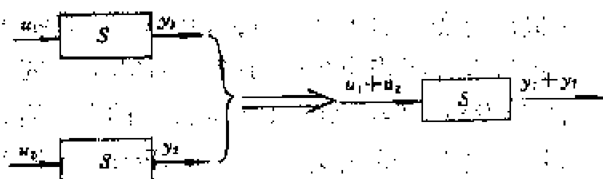


图 10.1 线性系统的叠加性

y_1、y_2 分别记它们所引起的响应行为。如果系统具有如下特性:即两个输入作用之和引起的行为响应等于它们分别引起的行为响应之和，则称这种特性为叠加性，称 S 为线性系统。不具有叠加性的系统是非线性系统。线性系统不可能出现浑沌。浑沌是非线性系统的通有行为(generic behaviour)，但也并非任何非线性都导致浑沌。浑沌学研究的是确定性非线性系统，前面提到的方程都属于这一类。注意，分段线性的系统总体上不属于线性系统，如帐篷映射，可以出现浑沌。

运动方程中以系数形式出现的常数称为系统的控制参数;以参数为轴张成的空间称为控制空间或参数空间。参数的不同取值对系统的动态特性有很大影响，控制参数的连续变化，在某些关节点上可能引起系统结构和行为的定性改变。浑沌动力学经常在参数空间中考察系统的演化。为了同时反映出参数和初始条件对动态特性的影响，浑沌学在由状态空间和参数空间构成的乘积空间中进行考察。

动力系统是从模型的状态空间到姿态空间的映射

$$\Phi: M \times R \rightarrow M$$

其中 $M\times R$ 是系统模型的状态空间，即系统在变化过程中所有可能状态的集合，而可微流形 M 是姿态空间。

对 M 中确定的初始点 $x\in M$，得到动力系统中一条轨线，它用偏映射表示为

$$\Phi_x: R \rightarrow M$$

如果取定时间间隔 $\Delta t=\tau$，从动力系统 Φ 得到的另一种偏映射 $\Phi_\tau: M\rightarrow M$ 称为动态映射，它表示任何给定 $x\in M$ 的下一个动态点 $\Phi_\tau(x)\in M$。

微分拓扑提供的数学方法之一，就是针对给出的动态映射 $f: M\rightarrow M$，有一种关于 f 映射的邻域或近傍的概念，建立 f 是否是结构稳定性(structural stability)的定义和检验技巧，这对于应用科学中出现的各种动力系统，判定它是否在结构上稳定是非常重要的。

值得注意的是，带有浑沌的动力系统常常是结构稳定的，而很多的古典的力学系统反倒不是结构稳定的。

已经有大量的例子说明，生物物种或细胞的生长过程、流体的湍流、激光的发射、经济系统、神经网络动态都在非线性系数"加强"到一定的情况以后，出现的浑沌。

一般的规律是:就可微流形 M，可以找到一个不可列的不变子集 Λ，使动态映射

$$f: \Lambda \rightarrow \Lambda$$

有无穷多个周期点，它们在 Λ 中稠。由于这些周期点(包括不动点在内)的不稳定性和排斥性就在 Λ 中 f 有一个非周期的稠轨道，从而构成 Λ 是 f 的一个浑沌集。

浑沌是关于非线性动力系统的整体性质的科学。应当指出，早在 19 世纪末，法国数学家 Poincaré 就曾预言过浑沌运动的一些行为，但由于客观条件的限制，他的预言没有引起更多的注意，直到 1963 年 Lorenz 第一次发现浑沌。从此以后，研究进展很快:1971 年，Ruelle 和 Takens 提出奇怪吸引子(Strange attractor)的名词;1975 年，李天岩和 Yoke 首先使用浑沌这个术语，并为学者所普遍接受;1976 年，May 研究了一维平方映射，在这个基础上，Feigenbaum 于 1978 年发现了倍周期分支走向浑沌的两个普适常数并引入了重整群思想，这是一个重大的发现，具有里程碑的意义。1980 年，Pomeau 和 Manneville 最早研究了 Lorenz 系统映射的阵发性，1982 年 Hirsch 和 Hu 等做了进一步的工作，概括出了通向浑沌的第二条典型道路是阵发性(Intermittency)现象。阵发性机理发生在一个切分支(鞍结分支)的邻域内，而倍周期分支则是叉形分支。另外，通向浑沌的第三条道路是准周期运动(Quasiperiodicity)的分支。准周期分

支道路与前面倍周期分支和阵发性道路相比，规律性了解得较小，但近年来已引起关注。

我国学者郝柏林等人研究了一个周期驱动的非线性振子的分支和浑沌行为，将周期驱动频率作为控制参数，采用分频采样方法来提高频 率的分辨力，取得了一批比 Lorenz 方程更为细致的结果。强迫 Brusselator 模型是继 Lorenz 模型后又一个能看到通向浑沌的各种道路并存的典型模型。我国学者在这方面的研究工作举世瞩目。

浑沌理论界已认识到：浑沌是确定性非线性系统的内在随机性，这种随机性是由系统对初值的敏感依赖性而产生的，这已成为科学共同体阐述浑沌机制的重要原理。另外，系统处于浑沌状态并非毫无规则、一片混乱。相反，这里存在着复杂而精致的几何结构，包含有更多的内在规律性。诸于微分支、周期窗口、自相似层次嵌套结构、周期轨道的排序等。浑沌研究的重大成果在于证明了，这些结构已为一大类非线性动力系统所普遍共有。

总之，浑沌现象是丝毫不带随机因素的固定规则所产生的。研究动力系统的浑沌机制在今天有更多的现实意义：它说明精确的预测从原则上讲是能够实现的，加上计算机的快速跟踪，就能够深入探讨各种强非线性系统的特征，开创了模型化的新途径。另外，浑沌的出现与"分支"(bifurcation)紧密相关，浑沌集又常常具有分数维特征，所以也与"分形"(fractal)有关。浑沌学正处于一个蓬勃发展的历史的新阶段中。

§10.2 浑沌的意义

一、动力系统的浑沌

数学上对于线性系统与弱非线性系统已经有了一系列的研究方法，实用上也大都有现成的计算机程序。动态映射直接是一种迭代过程，按理是更容易研究，但自然界的动态更多的是强非线性系统，尽管它的数学模型可能形式上很简单，依然可以随着所含参数的改变而呈现出强非线性，从而复杂性增加，常常出现浑沌的动态。

以最简单的动态映射为例，设一维动态映射

$$F_1:[0,1]\to[0,1]$$

定义为

$$F_1(x)=a\left(1-2\left|x-\frac{1}{2}\right|\right),0<a\leqslant 1 \tag{10.2.1}$$

也就是对所取的 a 常数，函数形式是

$$F_1(x)=\begin{cases}2ax, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2}\\ 2a-2ax, & \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases} \tag{10.2.2}$$

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$F_1(x)$ 是一个非常简单的弱非线性动力系统的离散模型，F_1 是一种最简单的动态映射，对任何给定的初始姿态 x_0，相继的计算如下

$$x_{n+1}=a\left(1-2\left|x_n-\frac{1}{2}\right|\right) \tag{10.2.3}$$

无论初态 x_0 取于何处($0\leqslant x_0\leqslant 1$)，动向或迭代都是使 x_n 趋向于不动点 $x=0$(因为 $F_1(0)=0$)。即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

而且这时也只有0点是F_1的不动点，但是，当式(10.2.1)的动态映射F_1中的系数常数a取值大于$\frac{1}{2}$时，非线性特征加强，不动点除$x=0$点外又多了另一个不动点x^*(即$x^*=F_1(x^*)$)(图10.2)。不动点恒落在$x_{n+1}=x_n$的对角线上。

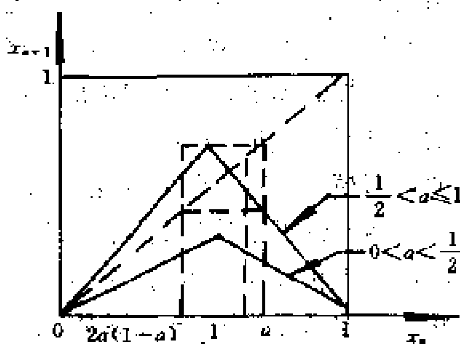


图10.2

为了说明F_1这样简单的动态模型具有非常复杂的动态，取$a=1$的情况来分析研究

$$F_1|_{a=1}:[0,1]\to[0,1],F_1(x)=\begin{cases}2x,0\leqslant x<\frac{1}{2}\\2-2x,\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\tag{10.2.4}$$

它有两个不动点：$x=0,x^*=\frac{2}{3}$。由于$F_1'(0)=2>1,|F_1'(x^*)|=2>1$，所以，这两个不动点都是排斥不动点，在$x^*=\frac{2}{3}$不动点附近，动点来回振荡达到最大边界$\frac{1}{2}$与$\frac{3}{4}$，小于$\frac{1}{2}$的动点两倍增长，最后跳到$\left(\frac{3}{4},1\right)$的区间，又折回$\left(0,\frac{1}{2}\right)$的区间。

事实上，我们得到动态映射$F_1|_{a=1}$的一个不变子集

$$\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{4},1\right]\subset[0,1]$$

即

$$F_1|_{a=1}:\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{4},1\right]\to\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{4},1\right]$$

令$S=\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{4},1\right]$，则$S\subset[0,1]$，且

$$F_1|_{a=1}:S\to S\tag{10.2.5}$$

然后在S中容易找到一个周期3的点

$$x_0=\frac{2}{9},x_1=F_1|_{a=1}\left(\frac{2}{9}\right)=\frac{4}{9},x_2=F_1|_{a=1}\left(\frac{4}{9}\right)=\frac{8}{9}$$

$$x_3=F_1|_{a=1}\left(\frac{8}{9}\right)=2-2\,\frac{8}{9}=\frac{2}{9}=x_0$$

从李天岩——James A. Yorke："周期3就有浑沌"的定理就知道在S中有任何周期的$F_1|_{a=1}$的周期点，周期点在S中稠分布，并且有非周期的轨线在S中稠，所以，S是$F_1|_{a=1}$的一个浑沌集。点集在S中稠是指点集任何两点之间，仍有点在S中。

也可以直接证明：在$S=\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{4},1\right]$中，周期2的点容易从

$$x_0=p_2,x_1=2p_2,x_2=2-2x_1=2-4p_2=p_2$$

得

$$p_2=\frac{2}{5}$$

周期3的点，从

$$x_0=p_3,x_1=2p_3,x_2=2x_1=4p_3$$
$$x_3=2-2x_2=2-2\cdot 4p_3=p_3$$

得

$$p_3 = \frac{2}{9}$$

一般的，周期 k 的点从

$$x_0 = p_k, x_1 = 2x_0 = 2p_k, \cdots$$
$$x_{k-1} = 2x_{k-2} = 2(2^{k-2}p_k) = 2^{k-1}p_k$$
$$x_k = 2 - 2x_{k-1} = 2 - 2 \cdot 2^{k-1}p_k = p_k$$

得

$$p_k = \frac{2}{2^k + 1}$$

所以，周期点充满于 S，任何两个周期点之间必找得出另一周期点，而且总有反复落在周期点之间的非周期点，从而说明 S 确为 $F_1|_{a=1}$ 这个动态映射的浑沌集。

我们还可以更深入的研究 F_1，仍取 $a=1$，分析一下它是怎样从一个不动点 x^* 派生出周期 2 的点，然后又怎样衍生出其它的周期点；同时说明，这种浑沌集构成的过程中，在初始点灵敏决定作用或强烈依赖初始取值的现象中表现出来的机制。

在取 x_0 以后，从式(10.2.3)的 $a=1$ 情况

$$x_{n+1} = 1 - 2\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \begin{cases} 2x_n, & 0 \leqslant x_n < \frac{1}{2} \\ 2 - 2x_n, & \frac{1}{2} \leqslant x_n \leqslant 1 \end{cases} \tag{10.2.6}$$

研究它的相继两次迭代的关系

$$x_{n+2} = F_1^2(x_n) \equiv F_1(F_1(x_n)) \tag{10.2.7}$$

从图 10.3 上来看，它等于将一个三角波变为两个三角波，它与对角线 $x_{n+2}=x_n$ 之交有四个点：$x=0, \bar{x}=\frac{2}{5}, x^*=\frac{2}{3}, \bar{\bar{x}}=\frac{4}{5}$，其中 x^* 仍是 $F_1|_{a=1}$ 的不动点，而 $\bar{x}, \bar{\bar{x}}$ 是 $F_1|_{a=0}$ 的一个周期 2 的周期点，因为

$$F_1|_{a=1}(\bar{x}) = \frac{4}{5} = \bar{\bar{x}}$$

$$F_1|_{a=1}(\bar{\bar{x}}) = \frac{2}{5} = \bar{x}$$

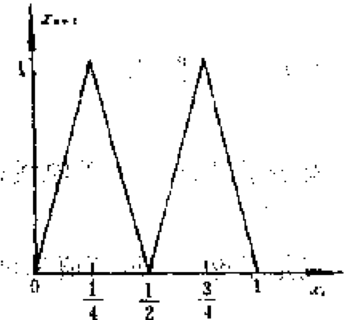


图 10.3

再研究 F_1^3，就可以得到一个新的周期 4 的 $F_1|_{a=1}$ 的周期点。如此周期倍增下去同样可以得到稠于 S 的周期点集，这是使 S 形成 $F_1|_{a=1}$ 的一个浑沌集的基础。

早在 1964 年，A. N. Sarkovskii 就已经指出一维连续映射在有周期 3 的周期点以后，就有任何整数 n 周期的周期点。后来，李天岩与 James A. Yorke 又在 1975 年重新证明了这个定理，1985 年与 1988 年 N. P. Bhatia 与 W. O. Egerland 引伸了结果，指出：一维连续函数的一个周期 4 轨道就有一个周期 3 轨道，从而有任何周期的周期轨道，所以，一维连续动态映射出现周期倍增的过程时，就出现任何周期的周期动态。

周期倍增以后产生的浑沌动态本质上符合李天岩——Yorke 定理的论证。

从上述的动态过程可以看出，产生周期倍增又因为这些周期点是排斥的，从而迫使那些非

周期点浑沌的随时分离、又随时靠近，造成初始点的微小差异，迭代若干次以后就明显地分离。例如，$F_1|_{a=1}$这个动态映射，经过 m 次迭代以后，x_{n-m}与 x_n 的关系

$$x_{n-m} = F_1^m(x_n) \equiv \underbrace{F_1(F_1(\cdots(F_1(x_n))\cdots)}_{m个} \tag{10.2.8}$$

在图示上形成 m 个三角波（图 10.4）。可见，只要初值差异在第一个波内横标，就有可能迭代从 x_n 所得 x_{n-m}落在[0,1]的任何地方，误差不超过规定的大小。例如，初值的微小不确定是 $\pm\varepsilon$，则经过 $m \sim \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ 的迭代，最终将使所迭代得到的值落在(0,1)中任何地方。若初值的不确定大小是 $\varepsilon \approx 10^{-12}$，则在这个误差容许范围内，取 $m \approx 40$ 就在(0,1)中不确定，这也就是浑沌动态灵敏依赖于初值的特征。

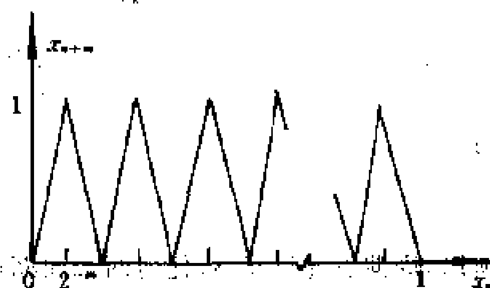


图 10.4

实用上，一旦我们发现初值的微小差异将构成动态过程中迅速分离，我们就要怀疑有浑沌的存在。要分析这种动态，我们可以将实验数据转为动态的离散数据，然后描出其光顺实验所得动态图示，从而得到可信的动态映射图示，就可以模仿上述关于 F_1 映射的研究方法。例如，对热管道的不同时间测得的数据是：$(t_1,T_1),(t_2,T_2),\cdots,(t_n,T_n),\cdots$，其中 $T_1,T_2,\cdots,T_n,\cdots$表示温度，那么关于温度的动态就有了一个离散数据：$(T_1,T_2),(T_2,T_3),(T_3,T_4),\cdots,(T_n,T_{n+1}),\cdots$用 T_n 表示横标，T_{n+1}是纵标，将数据用平面坐标点描出，按这些点光顺出一个动态映射曲线。

动态映射是动力系统的两种偏映射之一，最方便的理解方法是从微分方程

$$\dot{x} = f(x), x \in R^n, f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))^T \tag{10.2.9}$$

在整个实数时间都有意义，解值充满整个 R^n 空间，则(10.2.9)解值的全体可以用状态空间 $R^n \times R$ 到姿态空间 R^n 的映射表出

$$\Phi: R^n \times R \to R^n \tag{10.2.10}$$

对 $t=0$ 的取初态 $x_0 \in R^n$ 的偏映射

$$\Phi_{x_0}: R \to R^n \tag{10.2.11}$$

就表示过 x_0 的一条轨线；而取定时间 τ 的偏映射

$$\Phi_\tau: R^n \to R^n \tag{10.2.12}$$

就是不论初态取何值都可以从式(10.2.12)得知系统的姿态从任何 x_k 经 τ 时后到达的 x_{k+1}，即

$$x_{k+1} = \Phi_\tau(x_k) \tag{10.2.13}$$

通常将 Φ_τ 写成 F，称它是一个动态映射。

例如，某物种在 t 时的总数设为 $P(t)$，最简单的物种生长模型是 P 的变化率正比于 P：

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = kP(t) \tag{10.2.14}$$

其解是

$$P(t) = P(0)\mathrm{e}^{kt} \tag{10.2.15}$$

消除初态 $P(0)$的影响，由于

$$P(t+\Delta t) = P(0)\mathrm{e}^{k(t+\Delta t)} \tag{10.2.16}$$

用式(10.2.15)除之，得

$$P(t+\Delta t)=e^{k\Delta t}P(t) \tag{10.2.17}$$

这就是最简单的生物生长模型的动态映射

$$F:[0,+\infty)\to[0,+\infty),P_{n+1}=rP_n \tag{10.2.18}$$

$F(x)=rx,r=e^{k\Delta t},k>0$ 时,P 按(10.2.15)指数增长到无穷;$k<0$ 时,P 按(10.2.15)指数下降到零。或者说,$r>1$ 时,P 按(10.2.18)增长到无穷;$r<1$ 时,P 按(10.2.18)减小到零,这时的动力系统是

$$\Phi:R_+\times R_+\to R_+ \tag{10.2.19}$$

R_+表示$[0,+\infty)$,状态空间是 $R_+\times R_+$,姿态空间是 R_+。

我们开始引出的 F_1 也是一个比较简单的动态映射,这种简单数学模型具有非常复杂动态的特征,也同时说明了简单的数学模型也会有很强的非线性效应。

注意到任何一个动态映射式(10.2.13)都是通过一种迭代过程来研究它的不动点及其稳定性、周期点及其稳定性,以至周期倍增产生浑沌过程。从而,任何一个静态方程转化为迭代求解时,要求迭代映射具有收敛性就等价于视迭代为动态,要求迭代收敛于动态的不动点。所以,也只有决定动态不动点的吸引范围,在范围之内取迭代初始点,才会有收敛的效果。

我们已经知道,设 f 在 $I=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 上是一个二次可微函数,$f(a)>0,f(b)<0$,则有一个 $x_0\in I$ 使 $f(x_0)=0$,称 x_0 是 f 在 I 中的一个零点。设有一个正数 M 使

$$|f'(x)|\geqslant\frac{1}{M},f''(x)\leqslant 2M,(\text{对所有 } x\in I \text{ 成立}) \tag{10.2.20}$$

我们就可以用公式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},n=1,2,\cdots \tag{10.2.21}$$

定义一个序列$\{x_n\}$,就可以收敛于 x_0,这就是著名的 Newton 迭代方法。

用这种 Newton 法来确定多项式零点,初始点 x_1 必须充分接近多项式的一个零点 x_0。这样,Newton 迭代

$$x_{n+1}=N(x_n)\equiv x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{10.2.22}$$

就会收敛到 f 的所有零点 $Z(f)$中的一元,N 的作用相当于一个动态映射。如果初始点 x_1 不充分靠近 $Z(f)$时,就可能不收敛。某个迭代点可能落在 $Z(f')$——f' 的零点集合——之中,下一步迭代无法确定;或者迭代无穷的进行下去而没有任何收敛性。

1956 年,B. Barna 使用符合 S_1,S_2,S_3,对多项式函数 f 表出

$$S_1\equiv\{x\in R|N^n(x)\to Z(f),\text{当 } n\to\infty\text{时}\}$$

其中 $N^n(x)=N(N^{n-1}(x))$是 x 的第 n 次迭代;

$$S_2\equiv\{x\in R|\text{有一正整数 } m=m(x)\text{ 使 } x \text{ 的第 } m \text{ 次迭代落在 } Z(f')\text{中}\};$$

$$S_3\equiv R\backslash\{S_1\cup S_2\}\equiv\{R\text{ 中不属 } S_1 \text{ 或 } S_2 \text{ 的点 } x\}。$$

证明了:如果f 是一个高于三次且具有相异实根的多项式,则 S_3 是一个 Cantor 集。也就是说,这个 Cantor 集合 K 是 N 映射的一个不变集,它包含着 N 的所有各种周期的周期点,还有非周期的无穷序列点。

最简单的一种 Cantor 集合是三进位集合,它是在$[0,1]$中所有具有一个三进位展开

$$x=t_1\cdot 3^{-1}+t_2\cdot 3^{-2}+\cdots+t_n\cdot 3^{-n}+\cdots,t_n\neq 1$$

的 $x\in[0,1]$的集合。直观地说,它是把$[0,1]$相继的所有中间三分之一开区间去掉以后留下来

的点的集合。也就是，设

$$K_0 = [0,1]$$

$$K_1 = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right]$$

$$K_2 = \left(\left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\right) \cup \left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},1\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

从而 K_{n+1} 是 2^{n+1} 个按段非交各个长为 $3^{-(n+1)}$ 的闭区间之并，所以 Cantor 集 K 是

$$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$$

它是从闭集合[0,1]中去掉无穷个开集之后所得到的一个闭集，K_1 中去掉的长是 $\frac{1}{3}$，K_2 是在 K_1 中去掉的长是 $2\times\left(\frac{1}{9}\right)$，一般的是在 K_{n-1} 中去掉

$$2^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

所以，共去掉长为

$$\sum_{1}^{\infty} 2^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

因此 Canter 集合 K 的长度为零，但是还可以证明 K 有不可列个点，容易证明 K 是一个自稠密集，事实上，若 $x\in K$，对任给的 $\varepsilon>0$，有交集中

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap K$$

多于 x 的 K 中另外一点。因为，我们总可以选 n 使 $3^{-n}<\varepsilon$，由于现在 $x\in K$，所以 $x\in K_n$，它必属于 K_n 的 2^n 个区间之一。设 $x\in[a,b]$，且 $[a,b]\subset(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$，$a,b$ 都属 K，故至少还有 a,b 两端点之一异于 x，且属于 K。

从以上分析，K 的自稠密性，说明 K 的每一点都是 K 的极限点，K 是一个闭集，这样性质的集合称为完全集。所以，我们常常称 K 是一个 Cantor 密断集(discontinuum)。

K 是一个完全对称集，按 Lebesgue 无穷可加性的积分理论来说，它是一个 Lebesgue 测度为零的集合。但是，如果用分数维来说，它的维数 $n\doteq 0.630929\cdots$(见 § 10.6)，这种维数的不同定义所形成的差别正显示出现今数学方法建立于线性分解、线性可加性基础上的局限性。

我们这样对密断集 K 的分析，从静态方程求根转入 Newton 迭代方法；从计算上的迭代过程表现出动态映射 N，在 Barna 给出的条件下，证明 K 是 N 的一个浑沌不变集，可以比较 K 与非线性、分数维、浑沌不变集的关系，使我们对 K 这种非常有用的集合有一个深刻的印象，它将在以后各节中经常出现。

二、浑沌的定义

浑沌指的是动力系统的浑沌，也就是浑沌的动态完全由 $\Phi: M\times R\to M$ 所确定，而且能够用动态离散模型所表现的动态映射 $F=\Phi_t$ 来刻划，从而有动态的迭代过程

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

关于 $F_1(x)=a\left(1-2\left|x-\frac{1}{2}\right|\right)$，我们就是这样来分析它的各种动态特征的，我们发现了它在 $a>\frac{1}{2}$ 时，出现浑沌现象，这种简单数学模型具有非常复杂的动态就已经说明几点意义：浑沌是

一种“确定性”(deterministivity)现象；浑沌是一种强非线性动态；浑沌是相对于一些“不动点”“周期点”特定形式(distinct forms)的、一种未定形的交融于特定形式间的无序状态。

30 年来，在应用科学的各个领域逐渐发现了这种带有普遍性意义的浑沌现象。从数学上分析，强非线性动力系统常出现有浑沌现象，它的出现常伴有排斥性的不动点和周期点的存在，而不动点与周期点的排斥性又常常是从稳定到不稳定的动态演变而构成的。

数学上研究浑沌的发生发展过程有两个很典型的例子。

1. 二维马蹄形映射

1967 年，S. Smale 给出著名的马蹄形映射例子，开始形成系统研究浑沌的数学方法，而现在看起来，马蹄形的延长、弯成马蹄形的过程是与 F_1 相似的。

让我们再一次来分析 $F_1(x)$式(10.2.2)是怎样在$\frac{1}{2}<a\leqslant 1$ 时形成浑沌的。

$$F_1(x)=a\left(1-\frac{1}{2}\left|x-\frac{1}{2}\right|\right),0\leqslant x\leqslant 1 \text{ 在 } a=1 \text{ 时}$$

$$F_1|_{a=1}=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x<\frac{1}{2}\\ 2-2x, & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases} \tag{10.2.23}$$

相当于：(1)将 0 到 1 的区间均匀扩张它的原长为 2 倍；(2)将扩张了的区间部分(即[1,2]这一段区间)再折成一半回到原来的长度(图 10.5)，扩张性质就反映出邻近点的分离，所以其后果将灵敏地依赖于初始条件，而折回的性质就保持动态迭代生成序列的有界性，这正是浑沌动态序列的两大特征。

图 10.5

关于$\frac{1}{2}<a<1$ 的一般情况，扩张折叠以后就不会再有 $a<x<1$ 的 x 点出现(图 10.6(a))，而且经 F_1 扩张折回的点不会落在 0 到 $2a(1-a)$之间，除非 $a=1$ 时它折满了[0,1]区间外(图 10.6(b))所生成的序列最终将落在●

$$2a(1-a)<x<a \tag{10.2.24}$$

的范围之内(图 10.6(b))。

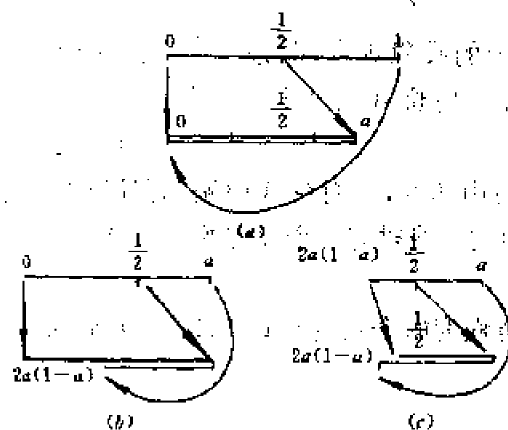


图 10.6

这种扩张折回所描述的 F_1 映射原理，类似的出现于二维平面上的一个正方形 $Q=ABCD$ 的拉长折回而弯成一个马蹄形，这就是著名的 Smale 马蹄形映射。

设 $Q=ABCD$ 是平面 R^2 中的一个正方形点集合

$$Q=\{x \mid |x_i|\leqslant 1, i=1,2\} \tag{10.2.25}$$

设 φ 是 Q 映入 R^2 的一种映射，它将 Q 映入一种马蹄形的集合(图 10.7)，用 Q_0 与 Q_1 表示 $Q\cap\varphi(Q)$的两个部分，写 $\varphi(A)=A'$，$\varphi(B)=B'$，$\varphi(C)=C'$，$\varphi(D)=D'$。用 P_0 与 P_1 表示逆象 $\varphi^{-1}(Q_0)$与 $\varphi^{-1}(Q_1)$(图

● 图 10.3 已经标出了这个范围。

10.8)。

设(1) φ在P_0与P_1内是线性映射；

(2) φ在AD边和BC边是膨胀，而在AB边和CD边收缩。

像$\varphi(Q_0)$表为图10.9中的阴影部分，而像$\varphi(Q_1)$是类似的，它是"平行"于$\varphi(Q_0)$的一种曲带域。集合$Q\cap\varphi^2(Q)$就由四个部分组成，每一部分是一个矩形(图10.10)；仿此，继续下去，我们就得到一个集合序列；它的第n个集合$Q\cap\varphi^n(Q)$将Q分裂为2^n个矩形部分，它们的垂直边都是等于AD长的定长，而水平边当$n\to\infty$时趋于零，所以集合

$$A^+ := \bigcap_{n\geq 0}\varphi^n(Q) \tag{10.2.26}$$

是一个Cantor集合$\Delta_1\subset AB$与AD边的乘积集合。

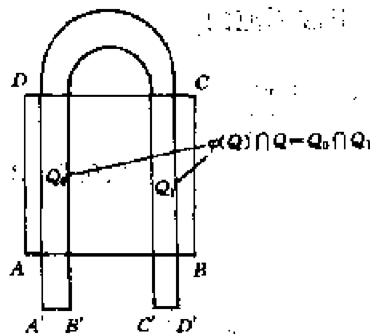


图10.7

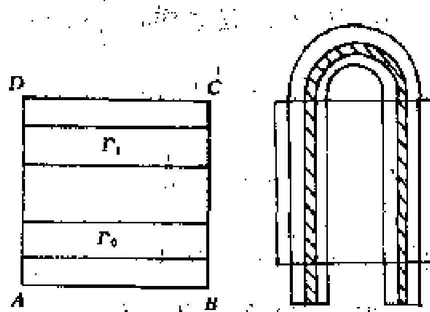
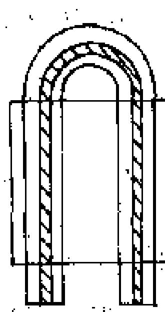


图 10.8


图10.9

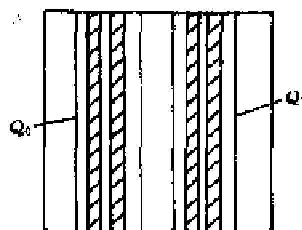


图10.10

再研究反向的逆映射的相继进行，就得到集合

$$Q\cap\varphi^{-n}(Q)$$

由于$Q\cap\varphi^{-1}(Q)=P_0\cup P_1$，所以相继得到的集合正是在$n>0$时所得集合旋转一个90°后表出的集合。因而与上述情况一样，集合

$$A^- := \bigcap_{n\leq 0}\varphi^n(Q) \tag{10.2.27}$$

是AB边乘以一个Cantor集合$\Delta_2\subset AD$的乘积集合。将式(10.2.26)与(10.2.27)的两个交集再相交就消去了AB，AD二边的作用，构成φ的一个不变集(invariant set)

$$\Lambda := \bigcap_{n\in Z}\varphi^n(Q) = A^+\cap A^- = \Delta_1\times\Delta_2 \tag{10.2.28}$$

其中Z是整数集合，这样一个集合是两个Cantor集合的乘积集合，即是一个二维平面中的Cantor集合，它是Q的一个闭的、无处稠的、零维子集。φ将映Λ到Λ，即

$$\varphi:\Lambda\to\Lambda \tag{10.2.29}$$

进一步分析(见§10.5)可以证明，Λ中有无穷多个φ的周期点，它们在Λ中稠，而且还有一个非周期的稠于Λ的轨道，所以，φ于式(10.2.29)表出的动态映射有一个浑沌的集合Λ。

2. 虫口偏微分方程的浑沌解

1981年，A. Lasota研究了细胞依赖于时间和分裂程度的个数的虫口(cell population)的偏微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+a(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}=f(x,u)\\ u(0,x)=v(x)\in C_+(\Delta)\\ (t,x)\in D=[0,\infty)\times\Delta,\Delta=[0,1]\end{cases} \tag{10.2.30}$$

其中$C_+(\Delta)$表示在Δ上所有正的一阶连续函数的集合，x表示虫口的分裂程度，$u(t_0,x_0)\delta x+$

$o(\delta x)$表示虫在 $t=t_0$ 时 x 值落在$[x_0, x_0+\delta x]$内的个数，系数 $a(x)$ 是表示分裂或繁殖 x 程度的速率，右边的函数 f 与虫的再生有关。

首先，由于式(10.2.30)的稳态方程

$$a(x)\frac{du}{dx} = f(x,u), x \in \Delta \tag{10.2.31}$$

有满足 $w_0(0)=u_0$ 的唯一解 $w_0(x)$，它就是式(10.2.30)解集合中的一个不动点。虫口偏微分方程初值问题的解集合是一种动力系统，它是从状态空间 $C_+(\Delta)\times[0,\infty)$映入姿态空间 $C_+(\Delta)$的一种映射

$$\begin{aligned} S: C_+(\Delta) \times [0,\infty) &\to C_+(\Delta) \\ (v(x),t) &\mapsto S_t v(t) = u(x,t) \end{aligned} \tag{10.2.32}$$

当取定 $t=\tau$ 时，

$$S_\tau: C_+(\Delta) \to C_+(\Delta) \tag{10.2.33}$$

就是式(10.2.32)的一个偏映射，它是 $C_+(\Delta)$集合上的一种动态映射。

由于现在 $t\in[0,\infty)$，所以它表示动力系统式(10.2.32)是一种半流(semiflow)，它是在无穷维函数空间 $C_+(\Delta)$上的一种半流，它的特征是

$$\begin{aligned} S_0 &= id(\text{恒等映射}) \\ S_t \cdot S_s &= S_{t+s} (t,s \geqslant 0) \end{aligned} \tag{10.2.34}$$

然后，可以证明

$$\begin{aligned} V_0 &= \{v \in C_+(\Delta) | v(o) = 0\} \\ V_w &= \{v \in V_0 | v(x) < w_0(x), x \in \Delta\} \end{aligned} \tag{10.2.35}$$

都是 S_t 的不变集，特别是对于不动点 $W_0(x)$有

$$S_t W_0(x) = W_0(x) \tag{10.2.36}$$

1983 年，P. Brunovsky 进一步修改了 A. Lasota 的论证方法，证明了 S_t 的所有周期点的集合在 V_w 中稠，并有一个 $v\in V_w$ 使 v 的轨道在 V_w 中稠，所以，V_w 是 S_t 的一个浑沌集(见§10.7)。

从以上两个例子，我们可以给出浑沌的定义。

定义　若 F 是在一个集合 X 上的映射，设在 X 中有一个集合 $\Lambda\subset X$ 使 Λ 是 F 的不变集：

$$F: \Lambda \to \Lambda$$

Λ 中有无穷多个 F 的周期点，这些周期点在 Λ 中稠，又有一个稠于 Λ 的 F 的非周期轨线，则称 Λ 是 F 的一个浑沌集。

三、实　例

1. 垂足三角形序列

1988 年，J. G. Kingston 与老几何学家 J. L. Synge 在美国数学月刊 8～9 月号上发表了"垂足三角形序列"文章，指出 1897～1925 年英国剑桥大学出版的 E. W. Hobson 所著平面三角学教科书上有一处关于垂足三角形序列递推式中的错误，加以改正，引伸出一些新的结果。接着，1990 年 Peter D. Lax 在美国数学月刊 5 月号上利用垂足映射给出垂足三角形序列的各态历经特征。

一个给定三角形 T 生成的三角形序列$\{T_n\}$，T_{n+1}是 $T_n(n\geqslant 0, T_0=T)$的垂足三角形，T_{n+1}的顶点是 T_n 三个高的垂足。设 A,B,C 是给定三角形的三个角，它的垂足三角形的三个角是

A',B',C'，则当 A,B,C 都是说角时，

$$A' = \pi - 2A, B' = \pi - 2B, C' = \pi - 2C \tag{10.2.37}$$

当 A 是钝角时

$$A' = 2A - \pi, B' = 2B, C' = 2C$$

当 B 是钝角时

$$B' = 2B - \pi, A' = 2A, C' = 2C \tag{10.2.38}$$

当 C 是钝角时

$$C' = 2C - \pi, A' = 2A, B' = 2B$$

Lax 称这样的映射

$$P: A,B,C \to A',B',C' \tag{10.2.39}$$

是垂足映射(pedal mapping)。

我们再对这种垂足映射做进一步的分析，先讨论一个单一的角 A 的垂足映射，然后得到类似的 B 角讨论，从各个非退化情况下出现的浑沌集，得到两个浑沌集的乘积集，它就表现出垂足三角形序列动态的浑沌集。

单一的 A 角，它的垂足映射是

A,B,C 都是锐角时　　$A' = \pi - 2A$

A 是锐角时　　$A' = 2A - \pi$　　(10.2.40)

B 或 C 是钝角时　　$A' = 2A$

令 $a = \frac{2}{\pi}A, a' = \frac{2}{\pi}A'$ 则(10.2.40)有简单形式

$$\begin{aligned} a' &= 2 - 2a \quad & 0 \leqslant a \leqslant 1 \\ a' &= 2a - 2 \quad & 1 \leqslant a \leqslant 2 \\ a' &= 2a \quad & 0 \leqslant a \leqslant 1 \end{aligned} \tag{10.2.41}$$

由此得到 A 角的垂足映射(图 10.11)

$$a' = \begin{cases} 2 - 2a \text{ 或 } 2a, & 0 \leqslant a \leqslant 1 \\ 2a - 2 & 1 \leqslant a \leqslant 2 \end{cases} \tag{10.2.42}$$

排除掉退化情况(图 10.11 中的虚线部分)，即那些最终将三角形退化为直线的情况，便得到 A 一角单值垂足映射(图 10-11 中的实线部分)。

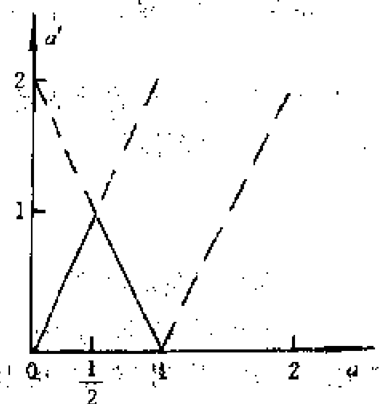


图 10.11

$$f_A(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \tag{10.2.43}$$

这正是 $F_1|_{a=1}$ 的情况式 (10.2.6)。我们已经知道它有一个浑沌集

$$S_A = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right] \subset [0,1]$$

类似地，关于 B 角，也有一个浑沌集

$$S_B = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right] \subset [0,1]$$

所以，我们有了垂足三角形序列动态的浑沌集

$$S = S_A \times S_B \tag{10.2.44}$$

2. 物种存活数的生长模型

在不考虑存活环境的限制条件下，单一物种(species)的存活数 $P(t)$ 的变化率将是正比于现时的物种总数，所以容易用微分方程表示出这种生长模型是

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = kP(t) \tag{10.2.45}$$

它的解组是

$$P(t) = P(o)\mathrm{e}^{kt} \tag{10.2.46}$$

它就是一种最简单的动力系统

$$\begin{aligned} &\Phi: R_+ \times R_+ \to R_+ \ (R_+ \text{是非负实数集}) \\ &(P_0, t) \mapsto P_0 \mathrm{e}^{kt} \end{aligned} \tag{10.2.47}$$

若 $k>0$，它是一种指数增长的生长模型。当 $t\to\infty$ 时，$P(t)\to\infty$，物种总数出现爆炸；若 $k<0$，当 $t\to\infty$ 时，则 $P(t)\to 0$ 物种消灭。

如何从式(10.2.46)得到动力系统的动态映射，可取 $\Delta t = t_{n+1} - t_n$，讨论动态离散序列 $P_0 = P(0), P_1 = P(t_1), \cdots, P_n = P(t_n), P_{n+1} = P(t_{n+1}), \cdots$ 从

$$P_{n+1} = P(0)\mathrm{e}^{k(t_n+\Delta t)}, P_n = P(0)\mathrm{e}^{kt_n}$$

得

$$P_{n+1} = \mathrm{e}^{k\Delta t} P_n \tag{10.2.48}$$

写成

$$P_{n+1} = \lambda P_n \tag{10.2.49}$$

当 $k>0$ 时，$\lambda = e^{k\Delta t} > 1$；$k<0$ 时，$\lambda = e^{k\Delta t} < 1$；所以物种生长模型的无限制条件下的动态映射是

$$F(x) = \lambda x, x \geqslant 0 \tag{10.2.50}$$

这是一个典型的半流式动态映射，纯粹从式子上来分析，零($x=0$)是它唯一的一个不动点，$\lambda<1$(即 $|F'(0)|<1$，且注意现在 $0<\lambda<1$)时，动态是整体的收敛于吸引不动点 $x=0$；$\lambda>1$ 时，动态是整体发散于无穷的。

更接近事实的生长模型应对式(10.2.45)加以修改。生长有一个极限值 L 的限制，当 $P(t)$ 超过 L 时，虫口(population)数下降，环境被存活虫口挤满，没有足够食物养活，所以只在 $P(t) < L$ 时，虫口继续增长，故生长模型应该选为

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = kP(t)(L - P(t)) \tag{10.2.51}$$

$P=L$ 时，$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=0$；$P>L$ 时，$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}<0$；$P<L$ 时，$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}>0$。将式(10.2.51)经过积分变数变换，分部积分方法可以得解

$$P(t) = \frac{LP_0\mathrm{e}^{Lkt}}{L - P_0 + P_0\mathrm{e}^{Lkt}} \tag{10.2.52}$$

特别是取 $L=1$ 时，虫口数就是一个百分数。在取 $L=1$ 后，用式(10.2.52)表出 $P_{n+1} = P(t_{n+1}) = P(t_n + \Delta t)$，$P_n = P(t_n)$，就可以得

$$P_{n+1} = \mathrm{e}^{k\Delta t} \frac{1 - P_0 + P_0\mathrm{e}^{kt_n}}{1 - P_0 + P_0\mathrm{e}^{kt_{n+1}}} P_n \tag{10.2.53}$$

再小范围的应用式(10.2.49)就得到生长动态映射

$$P_{n+1} = rP_n(1 - P_n) \tag{10.2.54}$$

这种从微分方程到动态映射的转化工作，十分有用，通过这种转化，就可以具体分析系统的不动点与周期点的分布，并可直接从这种非线性映射探讨映射中的非线性参数达到的“强”度以后就会有浑沌出现。所以，通常把式(10.2.54)这种形式的方程称为逻辑化方程(logistic equation)或计算化方程。

通常把动态映射式(10.2.54)写成

$$F_2(x) = 4bx(1-x), 0 < b \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{10.2.55}$$

或写成

$$F_2(x) = rx(1-x), 0 < r \leqslant 4, 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{10.2.56}$$

它与前面所讨论的 $F_1(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处有类似之处，F_1，F_2 都在 $x=\frac{1}{2}$ 达到极大值；F_1 是在 $x=\frac{1}{2}$ 出现尖形状极大，F_2 在 $x=\frac{1}{2}$ 有一光滑圆转的极大(图 10.12)。

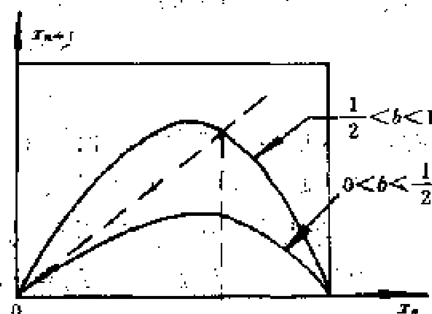


图 10.12

当 $0<b<\frac{1}{2}$ 时，(x_n, x_{n+1}) 图示中的对角线 $x_n=x_{n+1}$ 只在 $x_n=0$ 处成立，即 $x_n=0$ 是计算化方程

$$x_{n+1} = 4bx_n(1-x_n)$$

的一个零点；同时，$x=0$ 也是动态映射的一个零点；当 $\frac{1}{2}<b<1$ 时，(x_n, x_{n+1}) 图中的对角线 $x_n=x_{n+1}$ 交出动态映射的两个零点

$$x = 0, x^* = 1-(4b)^{-1} = \frac{r-1}{r} \tag{10.2.57}$$

它们是动态的两个不动点，也就是初始点选为一个不动点时，相继映射给出的动态使它不动。我们最感兴趣的就是这种不动点是否对于小扰动有稳定的性质。

设 $\bar{x}$ 是动态映射 F 的一个不动点

$$\bar{x} = F(\bar{x}) \tag{10.2.58}$$

F 有一阶连续导数，则当 $\bar{x}$ 有一小扰动 δ_n 给出

$$x_n = \bar{x} + \delta_n \tag{10.2.59}$$

映射 F 给出

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

得到

$$\bar{x} + \delta_{n+1} = F(\bar{x} + \delta_n)$$

的 Taylor 展开近似式

$$F(\bar{x} + \delta_n) \approx F(\bar{x}) + F'(\bar{x})\delta_n$$

就有

$$\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} \approx F'(\bar{x}), F' = \frac{dF}{dx} \tag{10.2.60}$$

故若 $|F'(\bar{x})|>1$，则近 $\bar{x}$ 的点在 F 作用下的像，从 $\bar{x}$ 相继的远离，所以不动点 $\bar{x}$ 是不稳定的；若 $|F'(\bar{x})|<1$，则近 $\bar{x}$ 的点收敛于 $\bar{x}$，所以不动点 $\bar{x}$ 是稳定的。

例如，在 §10.2(一)中，我们已经对 F_1 使用了这个道理，在 $x\neq\frac{1}{2}$ 时，$|F_1'(x)|=2a$，故当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，F_1 的唯一不动点 $\bar{x}=0$ 是稳定的，x_n 当 $n\to\infty$ 时，趋于 $\bar{x}=0$；当 $\frac{1}{2}<a<1$ 时，两个

不动点 $\bar{x}=0$ 与 $\bar{x}=\frac{2a}{2a+1}$ 都是不稳定的不动点，也就是都是排斥的不动点。

关于 F_2，从式(10.2.55)得知 $F_2'(0)=4b$，所以，当 $b<\frac{1}{4}$(或 $r<1$)时，不动点 $\bar{x}=0$ 是一个稳定不动点，而当 $b>\frac{1}{4}$(或 $r>1$)以后，$\bar{x}=0$ 这不动点恒是不稳定的不动点；但是，在 $b>\frac{1}{4}$ 以后，另一个不动点 $x^*=1-(4b)^{-1}=\frac{r-1}{r}$，式(10.2.57)出现，而且因为

$$F_2'(x^*) = 4b - 8bx|_{x=1-\frac{1}{4b}} = 2(1-2b) \qquad (10.2.61)$$

它在 $\frac{3}{4}>b>\frac{1}{4}$(即 $1<r<3$)时，$|F_2'(x^*)|<1$，所以

$$x^* = 1-(4b)^{-1}$$

在 $\frac{1}{4}<b<\frac{3}{4}$($1<r<3$)时，是一个稳定的不动点。从而

$$0<b<\frac{1}{4},(0<r<1)\text{时},x_n\to 0$$

$$\frac{1}{4}<b<\frac{3}{4},(0<r<3)\text{时},x_n\to x^*=1-\frac{1}{4b}=\frac{r-1}{r} \qquad (10.2.62)$$

0是一个排斥不动点。

在 $b>\frac{3}{4}$，$(r>3)$以后，$x=0$，$x=x^*$ 两个不动点都是排斥的不动点。

事实上，在 $\frac{3}{4}<b<1$($3<r<4$)时，$x=0$，$x=x^*$ 的排斥、不稳定性迫使其它点的动态发生两种情况：一种是跳到更远处，一种是滞留产生新的周期点。后者可以从 $x_{n+2}=F_2^2(x_n)=F_2(F_2(x_n))$ 明显的看出它将有4个不动点

$$x_1=0,x_2=\frac{r-1}{r}=1-\frac{1}{4b}=x^*$$

$$x_3=\frac{r+1+\sqrt{r^2-2r-3}}{2r},x_4=\frac{r+1-\sqrt{r^2-2r-3}}{2r} \qquad (10.2.63)$$

它相对于 F_2 而言，就等于有一个二周期序列 $e,f,e,f,\cdots$，使

$$F_2(e)=f,F_2(f)=e,F_2^2(e)=e,F_2^2(f)=f$$

就 F_2^2 的相对于参数 b 的变化而言，当 $r<3$(如取 $r=2.719$)时，x^* 是 F_2^2 的稳定不动点，但 $r>3$(如取 $r=3.416$)时，x^* 是 F_2^2 的不稳定不动点(图10.13)，使 F_2^2 相对于对角线发生波折，从而产生新的不动点 e 和 f。

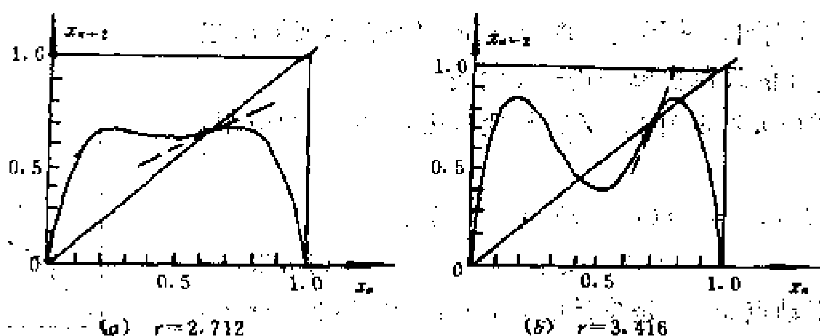


图10.13

关于 $e,f,e,f,\cdots$ 序列的稳定性问题，取 $x_n=e+\delta_n$，$x_{n+2}=e+\delta_{n+2}$ 应有

$$e+\delta_{n+2}=F_2^2(e+\delta_n)=F_2(F_2(e+\delta_n))$$

Taylor 展开式给出

$$\frac{\delta_{n+2}}{\delta_n} \approx F'_2(e)F'_2(f) = (F_2^2(e))' = (F_2^2(f))'$$

特别是，对不动点 x^*，就有

$$(F_2^2(x^*))' = (F'_2(x^*))^2$$

所以，在 x^* 随 b 的增大而失去稳定性以后，F_2^2 在 x^* 的斜率大于 1(图 10.13(b))，这时 F_2^2 就与 $x_{n+2}=x_n$ 新交出 e,f。它们开始出现时，$(F_2^2(e))'=(F_2^2(f))'=1$，随着 b 的增加，斜率下降，所以，在 b 稍稍超过 $\frac{3}{4}$ 时，所生序列交叉收敛于 $e,f,e,f,\cdots$，而当 b 再增大时，斜率再下降，最后当 $b=0.862\cdots$时，$(F_2^2(f))'$ 变为小于 -1，e,f 循环就不稳定。类似地，我们就进一步讨论映射

$$x_{n+4} = F_2^2[F_2^2(x_n)] \equiv F_2^4(x_n)$$

当 e,f 循环失去稳定性后，出现四点循环 $g,h,i,j,g,h,i,j,\cdots$。然后给出八点循环、十六点循环……。并且，b 值的变化宽度使 2^k 点循环稳定随着 k 而减少，以至当 $k\to\infty$时

$$\frac{b_k - b_{k-1}}{b_{k+1} - b_k} \to 4.669201\cdots \tag{10.2.67}$$

b_k 值是 2^k 点循环分支出 2^{k+1} 点循环的值，不过，当 $k\to\infty$ 时，$b_k\to 0.892\cdots$。1978 年，M. J. Feigenbaum曾就分支无穷序列的这个聚点

$$b_\infty = 0.892\cdots$$

论证了它的万有不变性。

在近 b_∞的 b 值且正好超过 b 时，由 F_b 生成的轨道看起来好似当 b 从上趋于 b_∞时出现了周期 2^p 随 $p\to\infty$的紊乱(noisy)循环。所谓"周期 2^p 的紊乱循环"，是指在 $0<x<1$ 中 2^p 个不相交区间内的轨道会在一种序贯次序中出现，所以在 2^p 迭代后轨道常常回到同一区间；另一方面，在这些区间中的一个区间上取一种初始条件，$F_b^{2^p}$ 生成的点将在这个区间中浑沌。再当 b 增大时，这些区间就互相成对合并，紊乱的 2^p 循环变为 2^{p-1} 紊乱循环，这是在 b 超过一个临界值 $\bar{b}_p$ 而出现的事，而且 $\bar{b}_p$ 也符合式(10.2.64)的同一关系，特别是在 b 趋过 $\bar{b}_1$ 时，浑沌运动就在一个单一连通范围中进行。

我们已经知道，从生长的微分方程模型导出它的动态映射式(10.2.56)，即

$$F_r(x) = rx(1-x), 0 < r \leqslant 4 \tag{10.2.65}$$

它表现出从[0,1]映射自身的一种映射

$$F_r:[0,1] \to [0,1], 0 < r \leqslant 4 \tag{10.2.66}$$

对于这种模型，我们可以从形式上将[0,1]的限制打消或同时也把 r 整数上界为 4 的限制去掉来进一步讨论。

首先，把式(10.2.66)的定义域与变量去掉[0,1]的限制，研究

$$F_r(x) = rx(1-x), 0 < r \leqslant 4$$
$$-\infty < x < +\infty \tag{10.2.67}$$

则当 $r>1$ 时，不动点 $\bar{x}=0$ 是排斥的，而且 $x<0$ 时，当 $n\to\infty$，$F_r^n(x)\to-\infty$；$x>1$ 时，当 $n\to\infty$，$F_r^n(x)\to-\infty$。所以式(10.2.67)不落在[0,1]中的点的模型扩展都有趋向$-\infty$的特别驯服的性质(图 10.14)，因此，这种二次函数族的所有值得注意的动态

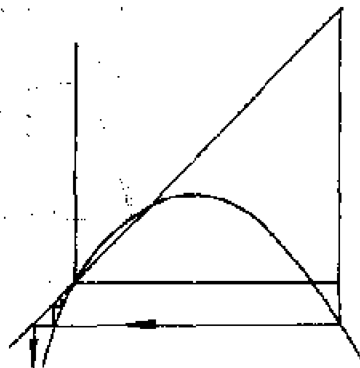


图 10.14

都在单位区间 $I=[0,1]$内。

注意到，当 $1<r<3$ 时，$\bar{x}=0$ 是一个排斥不动点，$p_r=\frac{r-1}{r}$是一个吸引不动点。因为 $F_r'(0)=r>1$，$|F_r'(p_r)|=|2-r|<1$，而且可以证明

$$p_r=\frac{r-1}{r} \tag{10.2.68}$$

的吸引区间是$(0,1)$，因为

(1)当 $1<r<2$ 时，若 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$，当 $x\neq p_r$，立即有(图 10.15)

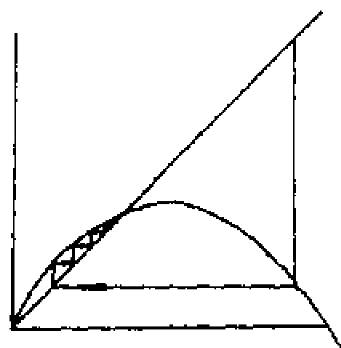


图 10.15

$$|F_r(x)-p_r|<|x-p_r|$$

故当 $n\to\infty$时

$$F_r^n(x)\to p_r$$

若 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，则 $F_r(x)$落在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$中，故又转上述情况，即当 $n\to\infty$时

$$F_r^n(x)=F_r^{n-1}(F_r(x))\to p_r$$

(2)当 $2<r<3$ 时，这时，$\frac{1}{2}<p_r<1$，设 $\hat{p}_r$ 是$\left(0,\frac{1}{2}\right)$中的一点，它被 F_r 映上 p_r，则容易看出 F_r^2 就将区间$[\hat{p}_r,p_r]$映到$\left[\frac{1}{2},p_r\right]$，故对所有 $x\in[\hat{p}_r,p_r]$，当 $n\to\infty$时，$F_r^n(x)\to p_r$；若 $x\in \hat{p}_r$，总有 $k>0$ 使

$$F_r^k(x)\in[\hat{p}_r,p_r]$$

故又当 $n\to\infty$时，$F_r^{k+n}(x)\to p_r$；另外$(p_r,1)$映入$(0,p_r)$，所以，当 $0<x<1$，恒有

$$\lim_{n\to\infty}F_r^n(x)=p_r.$$

(3)$r=2$ 时，$p_r=\frac{1}{2}$，从图 10.16 立即可见有

$$\lim_{n\to\infty}F_r^n(x)=p_r,x\in(0,1)$$

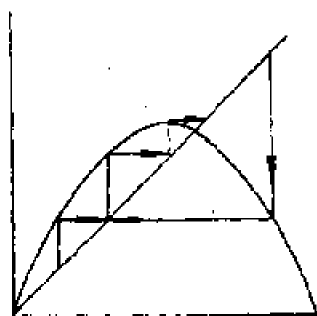


图 10.16

故有式(10.2.68)。

其次，单就$[0,1]$分析 F_r，但是将 r 的限制放宽，讨论

$$F(x)\equiv F_r(x)=rx(1-x),x\in[0,1],r>4 \tag{10.2.69}$$

这时，它仍在 $x=\frac{1}{2}$处出现极大值，但是极大值

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{r}{4}>1 \tag{10.2.70}$$

所以，F 对$[0,1]$中某些点经过一次迭代计算后将超出 $x=1$。如果我们把这些经过一次迭代超出 $x=1$ 的点的集合表为 A_0，那么，A_0 显然是中心在$\frac{1}{2}$的一个开集，且当 $x\in A_0$ 时，$F(x)>1$。直接再用式(10.2.69)迭代没有意义，因为 $F(x)$不在$[0,1]$内，即使将 F 的定义扩张为$(-\infty,+\infty)$，对于 $x\in A_0$，必有 $F^2(x)<0$，且

$$F^n(x)\to-\infty$$

也没有什么动态研究，所以我们要从[0,1]中消去这一部分 A_0 集合。

进一步分析，设

$$A_1 = \{x \in I | F(x) \in A_0\}$$

若 $x \in A_1$，则 $F^2(x) > 1, F^3(x) < 0$，所以 $F^n(x) \to -\infty$。归纳论述：设

$$A_n = \{x \in A_{n-1} | F^n(x) \in A_0\} \tag{10.2.71}$$

即

$$A_n = \{x \in I | F^i(x) \in I, \text{当 } i \leqslant n; \text{但 } F^{n+1}(x) \notin I\} \tag{10.2.72}$$

所以，A_n 是那些经过 $n+1$ 次迭代计算，从[0,1]曳出的所有原在[0,1]中的点，如果 $x \in A_n$，则 x 最终的轨道要趋向 $-\infty$，这都是因为 $r > 4$ 以后才会出现的现象，所以，我们对 $r > 4$ 的情况，讨论式(10.2.69)那些始终不会迭代后超出 $I = [0,1]$ 范围的点，这些点是

$$\Lambda = I - (\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) \tag{10.2.73}$$

即 Λ 是 F 的一个不变集

$$F: \Lambda \to \Lambda, \Lambda \subset [0,1] \tag{10.2.74}$$

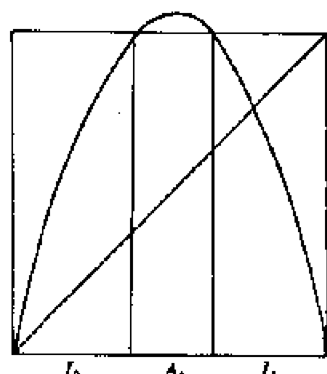


图 10.17

由于 A_0 是中心在 $\frac{1}{2}$ 的一个开区间，$I - A_0$ 是两个闭区间，I_0 在左边，I_1 在右边(图 10.17)，并且 F 是将 I_0 与 I_1 单调映上 I，在 I_0 上，F 是单调升；在 I_1 上，F 是单调降。所以从

$$F(I_0) = F(I_1) = I$$

就又在 I_0 和 I_1 两个区间中各有一个中间的开区间，由 F 映入 A_0，用 A_1 表示这一对区间。

再看 $I - (A_0 \cup A_1)$，它由 4 个闭区间组成，F 将它们每一个单调映上 I_0 或单调映上 I_1，所以 F^2 就将这 4 个闭区间的每个映上 I。因此，在 $I - (A_0 \cup A_1)$ 中，四个区间的每一个都有一个开区间为 F^2 映上 A_0，在这些开区间中的点经过 F 的三次迭代后从 I 溢出，我们把这些点的集合称为 A_2，随后的情况就是 F^2 把 4 个区间的交叉的单调升、单调降的作用。

照这样作用下去，A_n 将由 2^n 个不相交的开区间组成，从而

$$I - (A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_n)$$

由 2^{n+1} 个闭区间组成，因为 $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$；其次，$F^{n+1}$ 把这些闭区间的每一个闭区间单调映上 I，而且 F^{n+1} 在这些闭区间上是上升、下降交叉作用，所以 F^{n+1} 的图示正好是在 I 上有 2^n 个峰，因此，F^n 的图示至少有 2^n 次穿过 $y = x$ 线，这也就是说 F^n 至少有 2^n 个不动点，或者说，F 的 n 周期点由 I 中的 2^n 个点组成。

这样的 Λ 构造使我们想起 Cantor 三进位集，那时，我们是把[0,1]的中间三分之一的开区间去掉，又相继的留下的每一个闭区间的中间三分之一开区间去掉，最后形成中间三分集的模式。现在，同样也是把一个闭区间集合的中间各个开区间去掉。所以，一般的说，一个集合 Λ，如果它是 $I = [0,1]$ 的一个闭的，完全不连通的，完全的子集，称 Λ 是一个 Cantor 集。Cantor 三进位集是一种最简单的 Cantor 集。

完全不连通是指它不再含任何区间，一个完全集(perfect)的每一点都是集合中其它点的聚点或极限点。

现在我们来证明：当 $r > 2 + \sqrt{5}$ 时，Λ 是一个 Cantor 集合。

首先要使 r 大到当 $x \in I_0 \cup I_1$ 时，$|F'(x)| > 1$，可以检验得知 $r > 2 + \sqrt{5}$ 时就可以做到这

一点。显然，用这样的下界来规定 r 已经是大了些的，因为我们的目的是对 $x\in\Lambda$ 有 $\lambda>1$ 使

$$|F'(x)|>\lambda$$

当

$$r>2+\sqrt{5} \tag{10.2.75}$$

可以保证，其实只要 $r>4$ 以后就可以了，只是检验时要多些手续。

从链导法得知

$$|(F^n)'(x)|>\lambda^n, x\in\Lambda \tag{10.2.76}$$

由此我们肯定"Λ 不含区间"。事实上，如果 Λ 含有区间，就可选 $x,y\in\Lambda, x\neq y$ 使闭区间 $[x,y]\subset\Lambda$。这样就对所有 $\alpha\in[x,y]$，$|(F^n)'(\alpha)|>\lambda^n$，选 n 使

$$\lambda^n|y-x|>1$$

从中值定理得知

$$|F^n(y)-F^n(x)|\geqslant\lambda^n|y-x|>1$$

这说明 $F^n(y)$ 或 $F^n(x)$ 至少有一个在 I 之外，这与 Λ 构成矛盾，故 Λ 是完全不连通的。

由于 Λ 是一个闭区间套起来的交，故 Λ 是闭的(闭集的无穷个之交仍是闭集)。今证 Λ 是完全的。首先注意到，每一个 A_k 的任何端点都在 Λ 中，而且这些点最终将被 F 映到 O 处的不动点，所以它们在迭代下留在 I 中。若 $p\in\Lambda$ 是孤立的，每一个近傍点在 F 的迭代下必离开 I，这样的点必属于某个 A_k，从而有 A_k 的端点序列收敛于 p，但是这些端点必都映到 O 点，故都在 Λ 中，p 就不是孤立的；或者，所有近傍的点都在 p 的一个被剔除掉的邻域中，它们被 F 终将映出 I，所以 p 是剔除邻域的端点，设被 F^n 映到 O，而所有其他在 p 的邻域中的点映到负实轴。那么 F^n 在 p 有一极大，故 $(F^n)'(p)=0$，再从链导法，知道对某 $i<n$，必是

$$F'(F^i(p))=0$$

所以 $F^i(p)=\frac{1}{2}$，故 $F^{i+1}(p)\notin I$，且 $F^n(p)\to-\infty$，这与 $F^n(p)=0$ 的所设矛盾。故至少当 $r>2+\sqrt{5}$ 时，Λ 是一个 Cantor 集。事实上，还可以证明，当 $r>4$ 时，Λ 是一个 Cantor 集。

§10.3 符号动力系统

在§10.2 中所论述的 Newton 迭代都遇有 Cantor 集，它们反映出 Λ 与 S_3 都是浑沌不变集。要证明这一点，都要引用符号动力系统，然后从符号动力系统的浑沌性，Cantor 集合又与它拓扑共轭，就知道 Λ 与 S_3 分别是 F 与 N 的浑沌不变集。

一、符号动力系统

用 N 个符号单向或双向构成序列所形成的序列空间，完全可以等价地表现出动态模型的本质关系。现在我们要用 0,1 两个符号单向构成序列 $\{s_i\}$，以它为元 $s=(s_0s_1s_2\cdots)$ 构成一个序列空间(sequence space)。

$$\Sigma_2=\{s=(s_0s_1s_2\cdots)\,|\,s_j=0\text{ 或 }1\} \tag{10.3.1}$$

来讨论生长模型的不变集合 Λ。

现在，我们可以将 Σ_2 构成一个度量空间，度量空间是拓扑空间的一种，有了度量拓扑就可以有近傍和邻域的概念。

对于 Σ_2 中任何二点

$$s = (s_0 s_1 s_2 \cdots) \text{ 与 } t = (t_0 t_1 t_2 \cdots)$$

它们距离定义为

$$\mathrm{d}(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \tag{10.3.2}$$

由于$|s_i - t_i|$或是 0 或是 1，所以式(10.3.2)右边的无穷级数受控于几何级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$$

所以式(10.3.2)右边的无穷级数总是收敛的。

其次，指出式(10.3.2)定义的左边二元函数就是 Σ_2 上的一种度量，因为

(1)非负性　对任何 $s,t \in \Sigma_2$，$\mathrm{d}(s,t) \geqslant 0$ 而且 $\mathrm{d}(s,t)=0$ 当且仅当 $s=t$，即对所有 i，$s_i=t_i$；

(2)对称性　由于$|s_i-t_i|=|t_i-s_i|$，故恒有 $\mathrm{d}(s,t)=\mathrm{d}(t,s)$；

(3)三角不等式　若 $r,s,t \in \Sigma_2$，则用$|r_i-s_i|+|s_i-t_i| \geqslant |r_i-t_i|$故恒有

$$\mathrm{d}(r,s) + \mathrm{d}(s,t) \geqslant \mathrm{d}(r,t)$$

对 Σ_2 中一点 $x \in \Sigma_2$ 而言，定义 x 的半径为 $\varepsilon>0$ 的 d 球是集合

$$B_\varepsilon(x,d) = \{y \in \Sigma_2 \mid \mathrm{d}(x,y) < \varepsilon\} \tag{10.3.3}$$

而所谓度量空间(Σ_2,d)的一个子集 U 是一个开集，是指对每一点 $x \in U \subset \Sigma_2$ 都有一个 $\varepsilon>0$ 使

$$x \in B_\varepsilon(x,\mathrm{d}) \subset U \subset \Sigma_2 \tag{10.3.4}$$

那末，Σ_2 就是一个拓扑空间，因为容易证明：

(1)空集$\varnothing$与整个集合 Σ_2 都是开的；

(2)任意多个开集的并是开的；

(3)任何有限多个开集的交集是开的。

事实上，这种 d－球有一种很简便的确定方法。只要现在 Σ_2 中二元的开首一些符号一样，就彼此很相近，因为设 $x,y \in \Sigma_2$，且当 $i=0,1,\cdots,n$ 时 $x_i=y_i$，则 $\mathrm{d}(x,y) \leqslant \frac{1}{2^n}$；反之，若$\mathrm{d}(x,y) < \frac{1}{2^n}$，则在 $i \leqslant n$ 时，$x_i=y_i$。

有了开集和相近的概念，我们就可以定义一种移位(Shift)映射：它就是将第一个元去掉，各元(符号)向左移一位，得到的一一映射

$$\sigma: \Sigma_2 \to \Sigma_2 \tag{10.3.5}$$

$$(s_0 s_1 s_2 \cdots) \mapsto \sigma(s_0 s_1 s_2 \cdots) = (s_1 s_2 s_3 \cdots)$$

容易证明 σ 是一个连续映射：设 $\varepsilon>0$，$s=(s_0 s_1 s_2 \cdots)$，取 n 使$\frac{1}{2^n}<\varepsilon$，则令 $\delta=\frac{1}{2^{n+1}}$，若 $t=(t_0 t_1 t_2 \cdots)$满足 $\mathrm{d}(s,t)<\delta$，则当 $i \leqslant n+1$ 时，$s_i=t_i$，所以，在 $i \leqslant n$ 时，$\sigma(s)$与 $\sigma(t)$的第 i 个元当 $i \leqslant n$ 时是一样的，故知当 $\mathrm{d}(s,t)<\delta=\frac{1}{2^{n+1}}$时

$$\mathrm{d}[\sigma(s),\sigma(t)] \leqslant \frac{1}{2^n} < \varepsilon \tag{10.3.6}$$

这就说明 σ 在 s 点连续的。

移位映射 σ 可以直接用来研究周期点，周期点在序列空间 Σ_2 中对应于一个重复 n 个元的序列

$$s = (s_0 \cdots s_{n-1} s_0 \cdots s_{n-1} s_0 \cdots s_{n-1} \cdots) \tag{10.3.7}$$

按 σ 的作用，自然有$\sigma^n(s)=s$，并且有 2^n 个关于 σ 周期为 n 的周期点，每一个周期点是由长为 n

的 0,1 的 2^n 种有限排列之一生成的。由此可见，关于一般动态映射 F，只要能建立一种 σ 与 F 的一一关系，所有 σ 的周期点性质就是 F 的周期点性质。这就是我们为什么要研究与移位映射拓扑共轭的映射的缘故。

Σ_2 中有 σ 的最终周期点和最终不动点是很明显的，而且 σ 的周期点集合构成 Σ_2 的一个稠子集，因为 Σ_2 中任何一点

$$s = (s_0s_1s_2\cdots)$$

都可以定义 Σ_2 中 σ 的周期点序列

$$\tau_n = (s_0s_1\cdots s_ns_0\cdots s_n\cdots)$$

则从 $d(\tau_n,s)\leqslant\frac{1}{2^n}$，可知 $\tau_n\to s$(当 $n\to\infty$)。

在 Σ_2 中，除了是 σ 的一些周期点或最终周期点外，Σ_2 中任何一个非重复元的序列就不会是 σ 的周期点，而且在 Σ_2 中还有 σ 的非周期轨道在 Σ_2 中稠的扫遍。也就是说，这种轨道的闭包就是 Σ_2 本身。换句话说，在 Σ_2 中有些点，它们的轨道(即在 σ 作用下)任意近于 Σ_2 中任何一个给定元(序列)，例如，相继把长为 $n,n+1,\cdots$ 等等的所有 0,1 的数列块排成的

$$S^* = (\underbrace{01}_{\text{第一块}}\ |\ \underbrace{00011011}_{\text{第二块}}\ |\ \underbrace{000001\cdots}_{\text{第三块}}\ |\ \cdots)$$

σ 的某次迭代就可以对任何一个给定序列任意多位数的一致。

从上所论，Σ_2 这个对 σ 而言的不变集就是一种浑沌集。特别是，我们把具有稠轨道的映射称为拓扑可传性(topologically transitive)。

二、拓扑共轭

如何将移位映射与生长模型

$$F_r(x) = rx(1-x)$$

在 r 充分大(或 $r>4$，或已证的 $r>2+\sqrt{5}$)时联系起来？我们在§10.2中已经知道，在 F(即 $F\equiv F_r, r>4$)迭代下，除了在一个 Cantor 集合 $\Lambda\subset[0,1]$中的那些点以外，所有在 R 中的点都将趋于$-\infty$，所以，要完全描述 F 的动态只要了解 F 在 Λ 上的限制，而且 Λ 是 F 的一个不变集。

首先，由于

$$\Lambda\subset I_0\cup I_1$$

若 $x\in\Lambda$，则 x 的整个轨道恒落在 Λ 中，所以，这个轨道上的每一点必在 I_0，I_1 这两个区间之一的中间，从而可以规定：x 的路线(itinerary)是一个序列

$$s(x) = s_0s_1s_2\cdots\cdots \qquad (10.3.8)$$

其中

$$s_j = 0，若\ F^j(x)\in I_0$$
$$s_j = 1，若\ F^j(x)\in I_1 \qquad (10.3.9)$$

所以，x 的路线是 0,1 的一个无穷序列，也就是 $s(x)$是在序列空间 Σ_2 中的一个点，这样就有了一个映射

$$S:\Lambda\to\Sigma_2 \qquad (10.3.10)$$

关于这个映射我们有两个定理：S 是一个同胚映射；S 是一个使 F 与 σ 联系起来的共轭映射。

定理 1 若 $r>2+\sqrt{5}$，则 S 是一个同胚映射。

证明

(1)首先证明 S 是一一的。

设 $x,y\in \Lambda, x\neq y$，有 $S(x)=S(y)$，则对每个 n，$F^n(x)$ 与 $F^n(y)$ 落在 $\frac{1}{2}$ 的同一边，从而 F 在 $F^n(x),F^n(y)$ 间的区间上是单调的。所以，在这个区间中的所有点仍在 $I_0\cup I_1$ 中，这是和 Λ 是完全不连通的性质相矛盾的。

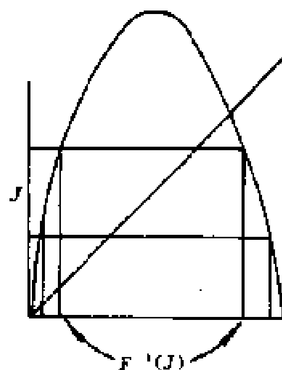


图 10.18

(2)S 是映上的。

设 $J\subset I$ 是一个闭子区间，令

$$F^{-n}(J)=\{x\in I\,|\,F^n(x)\in J\}$$

特别是 $F^{-1}(J)$ 表示 J 的前象，而且 $F^{-1}(J)$ 是由两个子区间组成，一个在 I_0 中，一个在 I_1 中(图 10.18)。

现设在 Σ_2 中

$$s=(s_0s_1s_2\cdots)$$

要指出有 $x\in \Lambda$ 使

$$S(x)=s$$

定义

$$\begin{aligned}I_{s_0s_1\cdots s_n}&=\{x\in I\,|\,x\in I_{s_0},F(x)\in I_{s_1},\cdots,F^n(x)\in I_{s_n}\}\\&=I_{s_0}\cap F^{-1}(I_{s_1})\cap\cdots\cap F^{-n}(I_{s_n})\end{aligned}$$

验证 $Is_0\cdots s_n$ 当 $n\to\infty$ 时，形成一个非空闭区间的套序列。事实上，由于

$$I_{s_0s_1\cdots s_n}=I_{s_0}\cap F^{-1}(I_{s_1\cdots s_n})$$

所以归纳得知 $I_{s_1\cdots s_n}$ 是一个非空子区间，而且如上论述，$F^{-1}(I_{s_1\cdots s_n})$ 由两个闭区间组成，一个在 I_0 中，一个在 I_1 中，所以

$$I_{s_0}\cap F^{-1}(I_{s_1\cdots s_n})$$

是一个单一闭区间。

这些区间是套着的，因为

$$I_{s_0s_1\cdots s_n}=I_{s_0\cdots s_{n-1}}\cap F^n(I_{s_n})\subset I_{s_0s_1\cdots s_{n-1}}$$

故而 $\bigcap\limits_{n\geqslant 0}I_{s_0s_1\cdots s_n}$ 非空。若 $x\in\bigcap\limits_{n\geqslant 0}I_{s_0s_1\cdots s_n}$，则 $x\in I_{s_0},F(x)\in I_{s_1}$ 等等，所以

$$S(x)=(s_0s_1\cdots)$$

这就说明 S 是映上的。

(3)S 的连续性

任选 $x\in\Lambda$，$S(x)=(s_0s_1s_2\cdots)$。设 $\varepsilon>0$，取 n 使

$$\frac{1}{2^n}<\varepsilon$$

讨论(2)中所论子区间 $It_0t_1\cdots t_n$，对所有可能的组合 $t_0t_1\cdots t_n$。这些子区间是非交的，Λ 含在它们的并中，但是，共有 2^{n+1} 个这样的子区间，$I_{s_0s_1\cdots s_n}$ 是其一，所以，我们可以选 δ 使

$$|x-y|<\delta,$$

而且 $y\in\Lambda$ 后就有 $y\in I_{s_0s_1\cdots s_n}$，从而 $S(y)$ 和 $S(x)$ 在它们的首 $n+1$ 项是一样的，故从式(10.3.6)得知

$$d[S(x),S(y)]<\frac{1}{2^n}<\varepsilon$$

这就证明了 S 的连续性，容易检验 S^{-1} 也是连续的，所以 S 是一个同胚映射。

定理 1 说明了集合 Λ 与 Σ_2 的一一对应性，而 S 的更为重要性质是给出 F 在 Λ 上与 σ 在 Σ_2 上的一种等价关系，这就是定理 2。

定理 2 $S\circ F=\sigma\circ S$

证明

一个在 Λ 中的点 x 可唯一的用它的路线 $S(x)$ 决定的区间套序列

$$\bigcap_{n\geq 0} I_{s_0s_1\cdots s_n}$$

所定义，而

$$I_{s_0s_1\cdots s_n}=I_{s_0}\cap F^{-1}(I_{s_1})\cap\cdots\cap F^{-n}(I_{s_n})$$

故 $F(I_{s_0s_1\cdots s_n})$ 可写成

$$I_{s_1}\cap F^{-1}(I_{s_2})\cap\cdots\cap F^{-n+1}(I_{s_n})=I_{s_1\cdots s_n}$$

但是 $F(I_{s_0})=I$，所以有

$$SF(x)=SF(\bigcap_{n\geq 0} I_{s_0s_1\cdots s_n})=S(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_1\cdots s_n})=(s_1s_2\cdots)=\sigma S(x)$$

即

$$S\circ F=\sigma\circ S.$$

这种能用同胚映射 S 使定理 2 成立的关系，称 F 与 σ 是拓扑共轭的(topologically conjugate)。

三、浑沌与结构稳定性

从上面的分析，$r>2+\sqrt{5}$ 时关于

$$F(x)=rx(1-x)$$

的论述比较 $3<r<4$ 时论证 F 从周期倍增产生浑沌更为严格，它把 F 在不变子集 $\Lambda\subset[0,1]$ 这个 Cantor 集合上的动态用共轭的符号动态映射，证明出 Λ 确为 F 的一个浑沌集，这种证明结果是符合我们的在 § 10.2 中所给出的浑沌定义的。

不仅如此，在 § 10.2 中我们介绍的 Newton 迭代法所出现的浑沌 Cantor 集，原来也是用符号动力系统证明的。

由此可见 Λ 集是 F 的一个浑沌集包含三点要求：

(1) Λ 是 F 的一个不变集，即 $F:\Lambda\to\Lambda$；

(2)在 Λ 中有 F 的稠于 Λ 的周期点；

(3)在 Λ 中有 F 的稠于 Λ 的非周期轨线。

容易看出，一个 F 的浑沌集 Λ 还有一个推论性质：初始点具有灵敏性，即开始二点相差很小，最终可以相距很大，这种性质从李天岩—James A. Yorke 定理，或符号动力系统的构造很容易看出。而关于周期倍增最终出现浑沌从本质上说也是李—Yorke 定理的引伸结果，自然也就有初始点灵敏性的性质。

另外，我们还可以把非周期稠轨道用拓扑可传性表述。

若 $f:J\to J$ 对任何一对开集 $U,V\subset J$ 有 $k>0$ 使

$$f^k(U)\cap V\neq\varnothing$$

则称 f 是拓扑可传的。

所以，我们也可以用下述定义来描述一个浑沌映射。

设 V 是一个集合，$F:V\to V$ 称为在 V 上是浑沌的，若：

(1)f 有在初始条件上的灵敏依赖性；

(2)f 是拓扑可传的；

(3)f 的周期点在 V 中稠。

还可以再举一个常见的圆周上映射的浑沌例子。在单位圆周 S^1 上的映射

$$\begin{aligned} f:S^1 &\to S^1 \\ \theta &\mapsto 2\theta \end{aligned} \tag{10.3.11}$$

它在 S^1 上二点之间的弧角距离，经过 f 的迭代加倍远离，所以 f 在初始条件上是灵敏依赖的；S^1 上任何一个小弧段，经过某 $k>0$ 次的 f^k 最终将膨胀到整个 S^1，所以 f 具有拓扑可传性。由于

$$f^n(\theta) = 2^n\theta \tag{10.3.12}$$

所以 θ 是 f 的周期 n 的周期点当且仅当对某整数 k 有 $2^n\theta=\theta+2k\pi$，也就是当且仅当

$$\theta = \frac{2k\pi}{2^n-1},(k\text{ 是整数},0\leqslant k\leqslant 2^n) \tag{10.3.13}$$

所以关于 f 周期 n 的周期点就是 1 的 2^n-1 次根，这样，对所有可能的 n 来说，周期点的集合显然是在 S^1 上稠的。

很有趣的，我们从这种圆周上的浑沌映射，经过两次拓扑共轭的关系，可以证明

$$F_4(x) = 4x(1-x) \tag{10.3.14}$$

是在 $I=[0,1]$ 上浑沌的。

设 $g(\theta)=2\theta$ 是上述的在 S^1 上的映射。定义

$$\begin{aligned} h_1:S^1 &\to [-1,1] \\ \theta &\mapsto h_1(\theta) = \cos\theta \end{aligned}$$

h_1 正是从 S^1 到 X 轴的投影，再设

$$q(x) = 2x^2 - 1$$

就有

$$h_1\circ g(\theta) = \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = q\circ h_1(\theta)$$

即

$$h_1\circ g = q\circ h_1$$

也就是 h_1 给出 q 与 g 的拓扑共轭关系。

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{g} & S^1 \\ h_1\downarrow & & \downarrow h_1 \\ [-1,1] & \xrightarrow{q} & [-1,1] \\ h_2\downarrow & & \downarrow h_2 \\ [0,1] & \xrightarrow{F_4} & [0,1] \end{array}$$

另外，用 $h_2(t)=\frac{1}{2}(1-t)$ 又可以给出 q 与 F_4 的拓扑共轭关系，因为

$$\begin{aligned} F_4\circ h_2(t) &= 4\left(\frac{1}{2}(1-t)\right)\left(1-\frac{1}{2}(1-t)\right) \\ &= 1-t^2 = \frac{1}{2}(1-(2t^2-1)) = h_2\circ q(t) \end{aligned}$$

所以有

$$h_2 \circ h_1 \circ g = F_4 \circ h_2 \circ h_1$$

即

$$h \circ g = F_4 \circ h, h = h_2 \circ h_1$$

可知 F_4 是与 g 拓扑共轭的。现在已知 g 是一个浑沌映射，故 F_4 也是在[0,1]上浑沌的。

按以上的讨论容易看出，能产生浑沌的一维动态映射是无穷无尽且难以分类的，虽然像上述的 F_4 从 $g(\theta)=2\theta$ 浑沌的一类，如此分类以后可简化一些独立证明手续，但是不同的拓扑共轭类还是十分复杂的。

我们之所以必要对浑沌现象如此重视，还因为浑沌本身存在的顽固性。也就是说，一旦浑沌在某一系统中产生，它就会在该系统的一个受扰的邻近，仍然是使各个稍稍变形的系统依然有浑沌，这就是浑沌系统的结构稳定性。

这种现象正如我们已经指出的那样，往往很多典型的古典力学模型是结构不稳定的。

以一般的动态映射

$$F: V \to V \tag{10.2.15}$$

而论，如果把所有的从 V 映入 V 这个不变集上的映射的集合表为 $\mathscr{F}(V)$，则 $F \in \mathscr{F}(V)$，如果我们对集合

$$X = \mathscr{F}(V) \tag{10.2.16}$$

给出一种拓扑结构，就有开集和邻域的概念，然后，我们说 F 是在 X 中结构稳定的是指：在 X 中有 F 的一个邻域 $\mathscr{N}$ 使每一个 $G \in \mathscr{N}$ 都有一个映射使 G 与 F 拓扑共轭。

就一维来说，设 f 与 g 是两个在 R 上的映射，f 与 g 的 C^0—距离，表为 $d_0(f,g)$，定义为

$$d_0(f,g) = \sup_{x \in R} |f(x) - g(x)| \tag{10.3.17}$$

而 C^r—距离 $d_r(f,g)$ 定义为

$$d_r(f,g) = \sup_{x \in R} (|f(x) - g(x)|, |f'(x) - g'(x)|, \cdots, |f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)|) \tag{10.3.18}$$

相应的就给出 C^0—近旁，C^r—近旁(C^r—close)意义。

设 $f: J \to J$，若 $\varepsilon > 0$ 使有 $d_r(f,g) < \varepsilon$ 的各个 $g: J \to J$ 都有 f 拓扑共轭于 g 的性质，则称 f 是在 J 上 C^r—结构稳定的。

现在，我们来论证：二次映射

$$F_r(x) = rx(1-x) \tag{10.3.19}$$

这个生长模型，当 $r > 2+\sqrt{5}$ 时，C^2 结构是稳定的。

我们已经知道，F_r 在 $r > 2+\sqrt{5}$ 时，除了在 Λ 这个 Cantor 集合上的点，F_r 是拓扑共轭于移位映射之外，其它的点都将动态趋向 $-\infty$。

现证 F_r 在 $r > 2+\sqrt{5}$ 时，C^2 结构是稳定的。

在 $r > 2+\sqrt{5}$ 时，在 $I_0 \cup I_1$ 上有 $|F'_r(x)| > 1$，将有 $\varepsilon > 0$ 使当 g 中 $C^2-\varepsilon$ 近于 F_r 时，g 就有 F_r 一样的动态，因为首先选 ε_1 足够小，使当 g 是 $C^2-\varepsilon_1$ 近于 F_r 时，$g'' < 0$，即 g 的图示下凹，这显然是可能的。因为 $F''_r = -2r$；其次选 $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ 足够小使当 g 是 $C^1-\varepsilon_2$ 近于 F_r 时，则 g 有两个不动点 α 与 β，它们满足

(1)$\alpha < \beta$；(2)$g'(\alpha) > 1$；(3)$g'(\beta) < -1$。

能够选 ε_2 使 g 至多有两个不动点是由于 g 图示的凹性，而 g 至少有两个不动点是由于 g 是 C^0

近于 F_r。最后关于 g' 在不动点上的条件则是由 g 到 F_r 的 C^1 距离所决定。

注意到 g 有唯一的临界点 C，并存在点 α'，β' 使 $g(\alpha')=\alpha$，$g(\beta')=\beta$，而且 α 与 α' 所起的作用和 0 与 1 对 F_r 的作用一样。

最后，我们可以选 $\varepsilon<\varepsilon_2$ 使当 g，$C^2-\varepsilon$ 近于 F_r 时，则 $g^{-1}(\alpha')$ 由 a_0, a_1 一对点组成，而且当 $x\in[\alpha,a_0]\cup[a_1,\alpha']$ 时，

$$|g'(x)|>1$$

所以，若 g 是 $C^2-\varepsilon$ 近(从而有 $C^0-\varepsilon$ 与 $C^1-\varepsilon$ 近)于 F_r 时，g 的图示在 $[\alpha,\alpha']$ 区间上就有 F_r 图示的所有定性性质。

更为重要的是，F_r 与 g 有相同的动态。因为当 $x<\alpha$ 时，$g^n(x)\to-\infty$；类似地，若 $x>\alpha'$ 或 $x\in(a_0,a_1)$，也是 $g^n(x)\to-\infty$；而且类似于我们在论述生长模型时的方法，对 (a_0,a_1) 的逆像进行归纳讨论，就得知除了那些在一个 Cantor 集合 Λ_g 上的点以外，所有其他的点都将在 g 的迭代下最终趋向 $-\infty$，而在 Λ_g 上，g 再又是拓扑共轭于移位的自同构映射。

要证明 F_r 与 g 拓扑共轭，即

$$F_r\sim g$$

还必须构造基本定义域以使 F_r 与 g 二者能够定义出一种共轭性，办法是：首先选

$$x_0<\min(g^2(c),F_r^2(c)),$$

则容易看出 $(F_r(x_0),x_0)$ 与 $(g(x_0),x_0)$ 分别是 F_r 在 R^- 上与 g 在 $(-\infty,\alpha)$ 上的基本定义域。共轭性可以定义在 $(F_r(x_0),x_0)$ 上，然后由

$$h\circ F_r=g\circ h$$

扩张到整个 R^-。然后将 h 扩张到区间 $(1,\infty)$，最后扩张到每一个 A_n。

应该注意到的是在 A_0 上的取值，因为 F_r 在这个区间是二对应于一的，一旦 h 能在 $R-\Lambda$ 上完全定义，就可使 h 为一种同胚映射唯一的扩张到 Λ。

经过这样的同胚扩张，就可以使在 Λ_g 上的 g 与在 Λ 上的 F_r 拓扑共轭。

更重要的问题是：什么情况下，一个给定映射不是结构稳定的？一种映射失去结构稳定性的主要辨别方法之一是它没有双曲性。

例如，$F(x)=x(1-x)$，即 F_r，$r=1$ 时的情况，注意到 $F(0)=0$，$F'(0)=1$，所以 0 是一个非双曲不动点。又如，$F_\varepsilon(x)=x-x^2+\varepsilon$，显然 $F_\varepsilon(x)$ 是 $C^r-\varepsilon$ 近于 F 的，当 $\varepsilon>0$ 时，F_ε 有两个不动点，但是当 $\varepsilon<0$ 时，F_ε 就没有不动点，所以 F_ε 与 F 没有完全一样的动态，从而 F 不是结构稳定的。

一个具有双曲不动点的映射 f 是局部结构稳定的。也就是说，在双曲不动点有一个邻域与一个 $\varepsilon>0$，在这个邻域上，映射 g 是 $C^1-\varepsilon$ 近于 f 时，在这个邻域上，f 是拓扑共轭于 g 的。

著名的 Hartman 定理指出：

设 p 是 f 的一个双曲不动点，且设 $f'(p)=\lambda$，$|\lambda|\neq0,1$，则有 p 的邻域 U 和 $0\in R$ 的邻域 V 以及一个同胚映射 $h:U\to V$，把 U 上的 f 与 V 上的线性映射 $L(x)=\lambda x$ 共轭起来。所以，一个近一双曲不动点的映射常是局部拓扑共轭于它的导函数，这就是我们对拓扑共轭的共轭函数只要求同胚而不要求微分同胚的原因。

事实上，如果 h 是一个微分同胚，则

$$g=h\circ f\circ h^{-1}$$

在 $h(p)$ 有一个不动点，但是

$$g'(h(p))=h'(f(p))\cdot f'(p)\cdot(h^{-1})'(h(p))$$

$$=h'(p)\cdot\lambda\cdot\frac{1}{h'(p)}=\lambda$$

这样，因子 λ 在不动点为可微分的共轭映射保留下来，但是更好的是不必考虑不动点的因子，在不同因子下，映射具有相同的动态，岂不更具有普遍意义。所以，拓扑共轭的较弱概念更为适用。

§10.4 Li—Yorke 定理

我们已经知道动力系统的浑沌，它的产生和构造是直接与周期点的产生和分布有关。周期点常常从不动点由稳定到不稳定以后经过分支而出现，一再的分支形成周期倍增以至稠分布的周期点。而且从另一个方面来看，周期 3 的存在是使周期点稠分布的关键。

早在 1964 年，A. N. Sarkovskii 就给出以周期 3 为首的周期之间的关系。1977 年，P. Stefan 修正了他的一些证法，而 1975 年李天岩与 J. A. Yorke 给出的"周期 3 就有浑沌"的定理，又一次对此作了证明和发展，1985、1988 年，N. P. Bhatia 和 W. O. Egerland 又发展了这些理论。

一、Sarkovskii 定理

作为一种准备以及强调周期 3 的点的重要性，我们先证明

定理 1 设 $f:\mathrm{R}\to R$ 是连续的，f 有一个周期 3 的周期点，则 f 有所有其它周期的周期点。

证明 依赖于两个基本观察，它的详细论证还将在本节第二部分中以引理的形式出现。

(1)若 I,J 是两个闭区间，$I\subset J$，而且还有 $f(I)\supset J$，则 f 在 I 中有一个不动点。这是中值定理的一种简单推理(图 10.19)。

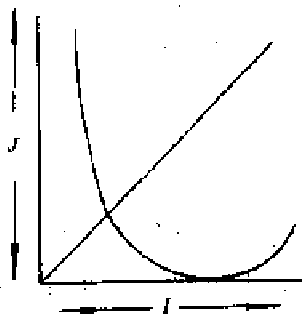


图 10.19

(2)设 $A_0,A_1,\cdots,A_n$ 是 n 个闭区间，且$f(A_i)\supset A_{i+1},i=0,\cdots,n-1$，则至少有 A_0 的一个子区间 J_0 映上 A_1，在 A_1 上有一子区间映上 A_2，故有一个子区间 $J_1\subset J_0$ 有

$$f(J_1)\subset A_1,f^2(J_1)=A_2 \qquad (10.4.1)$$

继续下去，我们就能找到一个套区间序列，顺序的映入 A_i，从而就有一点 $x\in A_0$，对所有 i 有

$$f^i(x)\in A_i \qquad (10.4.2)$$

称 $f(A_i)$覆盖了 A_{i+1}。

定理 1 的证明

设 $a,b,c\in R$ 且设 $f(a)=b,f(b)=c,f(c)=a$。

并设

$$a<b<c \qquad (10.4.3)$$

仅有的其它可能性是 $f(a)=c$，它可以类似地处理。

设 $I_0=[a,b],I_1=[b,c]$，并注意我们现在的设定将使

$$f(I_0)\supset I_1 \text{ 且 } f(I_1)\supset I_0\cup I_1 \qquad (10.4.4)$$

f 的图示说明在 b 与 c 之间必然有 f 的一个不动点。类似地，在 a 与 b 之间 f^2 必然有一个不动点，而且容易看出，在这些点中至少有一个点具有周期 2。故所有偶数周期点存在。

归纳的定义：一种区间套序列

$$A_0, A_1, \cdots, A_{n-2} \subset I_1 \tag{10.4.5}$$

使 $A_0=I_1$，由于 $f(I_1)\supset I_1$，故有一个子区间 $A_1\subset A_0$，使 $f(A_2)=A_1$，所以

$$f^2(A_2) = A_0 = I_1$$

继续下去，我们就找到一个子区间

$$A_{n-2} \subset A_{n-3} 使 f(A_{n-2}) = A_{n-1}$$

从上述观察(2)得知：

若 $x\in A_{n-2}$，则 $f(x), f^2(x), \cdots, f^{n-1}(x)\in A_0$，而且

$$f^{n-2}(A_{n-2}) = A_0$$

现在，因为

$$f(I_1) \supset I_0$$

故有一个子区间

$$A_{n-1} \subset A_{n-2} 使 f^{n-1}(A_{n-1}) = I$$

最后，因为 $f(I_0)\supset I_1$ 有 $f^n(A_{n-1})\supset I_1$，所以 $f^n(A_{n-1})$ 覆盖了 A_{n-1}。于是从观察(1)得知 f^n 在 A_{n-1} 中有一个不动点 p。

我们肯定 p 实际上是有一个素周期 n。因为 p 的首 $n-2$ 次迭代落在 I_1 中，而第 $n-1$ 次迭代落在 I_0 中，而且第 n 次迭代再出现 p。若 $f^{n-1}(p)$ 在 I_0 的内部，则容易看出 p 有素周期 n；若 $f^{n-1}(p)$ 落在边界上，则 $n=2$ 或 3，现在只研究 $n>3$ 的情况，故属于前一论述的结果。

S. Smale 和 R. Willians 曾特别对生长模型

$$f(x) = 3.839x(1-x) \tag{10.4.6}$$

用 Sarkovskii 定理进行分析。由一个简单的计算器，容易检验有 f 的一个周期 3 吸引轨道，以 6 位小数表示是

$$a_1 = .149888$$

$$a_2 = .489172$$

$$a_3 = .959299$$

而且近似的有 $(F^3)'(a_i)\approx -.78$，这样一个周期点的存在可以严格用手计算证实。先简单地找出 a_1 附近的一个小区间，它由 F^3 映射到自身之内且导数处处小于 1，然后可以完全精确地求得三周期点。根据 Sarkovskii 定理，F 应有所有周期的周期点，但仔细分析起来，除了三周期外，F 是没有吸引性的，所以在实用上用计算器找不出这些周期点。那么，这些其它的周期点究竟如何分布，就要引用符号动态更为一般的概念，有限型的子移位的方法才能确定。

定理 1 相当于 Sarkovskii 定理的一个预备定理，Sarkovskii 定理的主要内容是：把三周期与其它周期出现的关系按在 R 上的连续映射，将自然排列为

$$3\rhd 5\rhd 7\cdots\rhd 2.3\rhd 2.5\rhd\cdots\rhd 2^2\cdot 3\rhd 2^2.5\rhd\cdots$$

$$\cdots\rhd 2^3\cdot 3\rhd 2^3.5\rhd\cdots\cdots\rhd 2^3\rhd 2^2\rhd 2\rhd 1 \tag{10.4.7}$$

因此可以有

定理 2 设 $f:R\to R$ 连续，f 有素周期 k 的一个周期点，若 $k\rhd l$ 于(10.4.7)中成立，则 f 也有周期 l 的周期点。

证明 对于两个闭区间 I_1, I_2，引用符号 $I_1\to I_2$ 表示 $f(I_1)$ 覆盖 I_2。若能有

$$I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_n \to I_1$$

则定理 1 的观察(1)指出在 I_1 中有 f^n 的一个不动点。

首先，设 f 有一个周期 n 的周期点 x，n 是奇数，$n>1$。若 f 没有小于 n 的奇数周期的周期点，令 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 x 的轨道上从左数到右的点，注意 f 怎样置换 x_i，显然是有

$$f(x_n)<x_n$$

选择能使 $f(x_i)>x_i$ 的最大 i，设 I_1 是区间 $[x_i,x_{i+1}]$，由于 $f(x_{i+1})<x_{i+1}$，所以 $f(x_{i+1})\leqslant x_i$，故有

$$f(I_1)\supset I_1 \text{ 于是 } I_1\to I_1$$

由于 x 不具有周期 2，从而不会有

$$f(x_{i+1})=x_i \text{ 以及 } f(x_i)=x_{i+1}$$

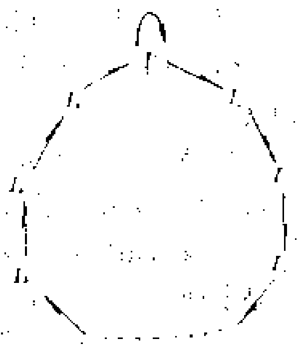


图 10.20

所以，$f(I_1)$ 至少包含另一个形如 $[x_j,x_{j+1}]$ 的区间，称它为 I_2。因此 $I_1\to I_2$，继续下去，就选得 $I_3,\cdots,I_k$ 使 $f(I_j)\supset I_{j+1}$，因为 n 是奇数，就不会在 I_1 的一边的 x_i 多于另一边，故 x_i 必在 f 作用有些改变所在边，有些不改变。故而对某 k 有

$$f(I_k)\supset I_1$$

因此有

$$I_1\to I_2\to\cdots\to I_k\to I_1$$

选最小的 k 使其成立者，即除掉 $I_1\to I_1$ 之外，从 I_1 到 I_1 的最短路径(图 10.20)。



图 10.21

现若 $k<n-1$，则有一个环路 $I_1\to I_2\to\cdots\to I_k\to I_1$ 或 $I_1\to\cdots\to I_k\to I_1\to I_1$ 给出 f^m 的一个不动点，m 是奇数且 $m<k$，这一点必是 $<k$ 的素周期，因为 $I_1\cap I_2$ 仅由一点组成，而这点有周期 $>m$。所以，$k=n-1$(图 10.21)。

但是 k 是所得的最小整数，对任何一个

$$j>l+1,$$

不会有 $I_l\to I_j$，所以 x 的轨道在 R 中的顺序仅有图 10.21 中所示的两种可能情况，所以，我们可能把图 10.20 扩张到图 10.22，关于 n 奇数的 Sarkovskii 定理就立即得到。周期大于 n 就由形如

$$I_1\to\cdots\to I_{n-1}\to I_1\to\cdots I_1$$

循环给出，而较小的偶数周期就由

$$I_{n-1}\to I_{n-2}\to I_{n-1}$$
$$I_{n-1}\to I_{n-4}\to I_{n-3}\to$$
$$I_{n-2}\to I_{n-1}$$

等等给出。在 n 是偶数时，首先注意到 f 必有一个周期 2 的点，这从上述论证方法使 f 作用下一些 x_i 改变所在一边，有些不改变，根据 $I_{n-1}\leftarrow I_{n-2}$ 与 $I_{n-1}\to I_{n-2}$。如果不是这种情况，则所有的 x_i 都必须改变所在的一边，所以 $f[x_1,x_i]\supset[x_{i+1},x_n]$ 以及 $f[x_{i+1},x_n]\supset[x_1,x_i]$，那么从定理 1 的观察就知道在 $[x_1,x_i]$ 中产生一个周期 2 点(图 10.22)。

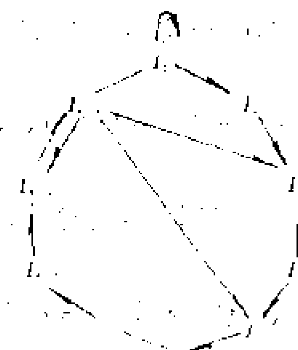


图 10.22

关于 $n=2^m$ 的定理情况，令 $k=2^l,l<m$。

讨论

$$g = f^{\frac{k}{2}}$$

由所设条件，g 有一周期 2^{m-l+1} 的周期点，所以 g 有周期 2，这一点对 f 而言有周期 2^l。最后 $m = p \cdot 2^m$，p 是奇的情况，可以简化为上述两类，得到证明。

值得注意的是，Sarkovskii 定理仅是对一维空间的一种结论，它甚至对圆周上的映射也不成立。例如，一个将圆周上所有点旋转 120°的映射，它使所有的点都是周期 3 的周期点，但是没有其它任何周期的周期点。

另外，Sarkovskii 定理还包含着很多推论：

(1)如果 f 有一个周期点，它的周期不是 2 的一个乘幂，f 就必然有无穷多个周期的周期点；

(2)如果 f 仅有有限多个周期的周期点，则 f 必有周期为 2 的幂次的周期，从 Sarkovskii 序(10.4.7)来说，周期倍增的性质表现出反向序列的发展；

(3)在 Sarkovskii 序中，周期 3 是最大的周期，所以它就说明了所有其他周期的存在性，这正是定理 1 所阐述的；

(4)Sarkovskii 定理的反定理也成立，即有周期 p 的周期点而无序在 p 之前的周期的映射。

二、Li—Yorke 定理

我们已经引用过 Li—Yorke 定理"周期 3 就有浑沌"，同时定出 F_1 在 $a=1$ 时的浑沌不变集

$$S = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right]$$

Li—Yorke 定理包括了 Sarkovskii 定理的预备定理，提出一种四点分布关系，着重分析了浑沌集与周期点的关系。下面我们将完整的介绍 1975 年美国《数学月刊》发表的这个定理，然后加以引伸。

引理 1 设 $G: I \to R$ 是连续的，I 是一个区间，对于任何一个紧区间 $I_1 \subset G(I)$（即 I_1 是一个闭且有界的区间），则有一个紧区间 $Q \subset I$ 使 $G(Q) = I_1$。

证明 设 $I_1 = [G(p), G(q)]$，$p, q \in I$，若 $p < q$，r 是$[p, q]$中使 $G(r) = G(p)$ 的最后一点，s 是在 r 之后使 $G(s) = G(q)$ 的第一点，则 $G([r, s]) = I_1$。类似地，可证 $p > q$ 的情况。

引理 2 设 $F: J \to J$ 连续，$[I_n]_{n=0}^{\infty}$ 是一个紧区间的序列，对所有 n，$I_n \subset J$ 且 $I_{n+1} \subset F(I_n)$，则有一个紧区间 Q_n 的序列，使

$$Q_{n+1} \subset Q_n \subset I_0, F^n(Q_n) = I_n (当\ n \geqslant 0)$$

对任一个 $x \in Q = \bigcap Q_n$，及所有 n 有

$$F^n(x) \in I_n$$

证明 定义 $Q_0 = I_0$，则 $F^0(Q_0) = I_0$，若 Q_{n-1} 已定义，使 $F^{n-1}(Q_{n-1}) = I_{n-1}$，则

$$I_n \subset F(I_{n-1}) = F^n(Q_{n-1})$$

从引理 1 得知，$G \equiv F$ 在 Q_{n-1} 上应有一个紧区间

$$Q_n \subset Q_{n-1}\ 使\ F^n(Q_n) = I_n$$

故从归纳法得引理 2。

引理 3 设 $G: J \to R$ 连续，$I \subset J$ 是一个紧区间，若 $I \subset G(I)$，则有一点 $p \in I$ 使 $G(p) = p$。

证明 令 $I = [\beta_0, \beta_1]$，在 I 中选 α_0, α_1 使

$$G(\alpha_0)=\beta_0, G(\alpha_1)=\beta_1$$

从而 $\alpha_0-G(\alpha_0)\geqslant 0, \alpha_1-G(\alpha_1)\leqslant 0$,故 $G(\beta)-\beta$ 必对 I 中某 β 为零,即当 $\beta=p$ 时 $G(p)-p=0, p=G(p)$。

和定理 1 中的基本观察(1)(2)比较起来,引理 3 就包括了(1),引理 2 就是(2),$F(I_i)$覆盖了 I_{i+1}。李天岩—James A. Yorke 给出以下定理。

定理 3 设 J 是一个区间,$F: J\to J$ 连续,设有一点 $a\in J$ 使 $b=F(a), c=F^2(a)$以及 $d=F^3(a)$满足

$$d\leqslant a<b<c \text{ 或 } d\geqslant a>b>c \tag{10.4.8}$$

则 T_1:对每一个 $k=1,2,\cdots$,在 J 中有 F 的一个周期 k 的周期点;

T_2:有一个不可列集 $S\subset J$,S 不含周期点,但满足:

(1)对每两个 $p,q\in S, p\neq q$ 有

$$\limsup_{n\to\infty}|F^n(p)-F^n(q)|>0 \tag{10.4.9}$$

$$\liminf_{n\to\infty}|F^n(p)-F^n(q)|=0 \tag{10.4.10}$$

(2)对每一个 $p\in S$ 及周期点 $q\in J$ 有

$$\limsup_{n\to\infty}|F^n(p)-F^n(q)|>0 \tag{10.4.11}$$

证明 设在 $d\leqslant a<b<c$ 下证明定理,而 $d\geqslant a>b>c$ 的情况,证法类似,故此略去。

令

$$K=[a,b], L=[b,c] \tag{10.4.12}$$

T_1 的证明:

设 k 是一个正整数,当 $k>1$ 时,令

$$\{I_n\}\text{ 是区间 } I_n=L, n=0,1,\cdots,k-2$$
$$I_{k-1}=K \tag{10.4.13}$$

并归纳的,周期的定义 $I_{n+k}=I_n, n=0,1,2,\cdots$。

当 $k=1$ 时,对所有 n,令 $I_n=L$,设 Q_n 是引理 2 中证明的序列,现在 $Q_k\subset Q_0, F^k(Q_k)=Q_0$ 故从引理 3 得知 $G=F^k$,在 Q_k 中有一个不动点 p_k,显然,p_k 不会是 F 的周期小于 k 的,否则应有 $F^{k-1}(p_k)=b$,这与 $F^{k+1}(p_k)\in L$ 矛盾,故 p_k 点是 F 的周期 k 的一个周期点。

T_2 的证明

设 $\mathscr{U}$ 是区间序列 $M=KM_n\}_{n=1}^{\infty}$的集合

$$M_n=K \text{ 或 } M_n\subset L \text{ 且 } F(M_n)\supset M_{n+1} \tag{10.4.14}$$

若 $M_n=K$,则 n 是一个整数的平方,且

$$M_{n-1}, M_{n+2}\subset L \tag{10.4.15}$$

注意到,若 n 是一个整数的平方,则 $n+1$,$n+2$ 就肯定不是,所以式(10.4.15)的最后要求是多余的。

当 $M\in\mathscr{U}$ 时,设 $P(M,n)$表示在$\{1,2,\cdots,n\}$中使 $M_i=K$ 的 i 的个数。

现在,对每一个

$$r\in\left(\frac{3}{4},1\right)$$

选 $M^r=\{M_n^r\}_{n=1}^{\infty}$是 $\mathscr{U}$ 中的一个序列,它使

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(M^r,n^2)}{n}=r \tag{10.4.16}$$

令

$$\mathscr{U}_0 = \left\{ M^r \mid r \in \left(\frac{3}{4},1\right) \right\} \subset \mathscr{U}$$

则因当 $r_1 \neq r_2$ 时 $M^{r_1} \neq M^{r_2}$，所以，$\mathscr{U}_0$ 是一个不可列集，而对每一个 $M^r \in \mathscr{U}_0$，从引理 2 知道有一个 x_r 点，对所有 n

$$F^n(x_r) \in M_n^r$$

令

$$S = \left\{ x_r \mid r \in \left(\frac{3}{4},1\right) \right\} \tag{10.4.17}$$

则 S 也是一个不可列集。

当 $x \in S$ 时，令 $P(x,n)$ 表示在 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中使

$$F^i(x) \in K$$

的 i 的个数，而且不会有 $F^k(x_r)=b$，因为 x_r 将最终有周期 3，这与式(10.4.15)矛盾，所以 r 对所有 n，

$$\rho(x_r,n) = P(M^r,n) \tag{10.4.18}$$

而且

$$\rho(x_r) = \lim_{n\to\infty} \frac{P(x_r,n^2)}{n} = r \tag{10.4.19}$$

现证明：当 $p,q \in S$，$p \neq q$ 时，就有无穷多个 n 使

$$F^n(p) \in \mathrm{K}, F^n(q) \in L \tag{10.4.20}$$

反之亦然。事实上，可设

$$\rho(p) > \rho(q)$$

则 $P(p,n)-P(q,n) \to \infty$，故必然有无穷多个 n 使式(10.4.20)成立。

式(10.4.9)的证明：由于 $F^2(b)=d \leqslant a$，F^2 连续，故有 $\delta>0$ 使对所有

$$x \in [b-\delta,b] \subset K$$

有

$$F^2(x) < \frac{b+d}{2}$$

若 $p \in S$，且 $F^n(p) \in \mathrm{K}$，则式(10.4.15)给出

$$F^{n+1}(p) \in L, F^{n+2}(p) \in L$$

所以

$$F^n(p) < b - \delta$$

若 $F^n(q) \in L$，则 $F^n(q) \geqslant b$，故

$$|F^n(p) - F^n(q)| > \delta$$

从式(10.4.20)得知，对任何 $p,q \in S$，$p \neq q$，就有式(10.4.9)

$$\limsup_{n\to\infty} |F^n(p) - F^n(q)| \geqslant \delta > 0$$

式(10.4.11)的证明类似于此。

式(10.4.10)的证明：因为 $F(b)=c$，$F(c)=d \leqslant a$，可选 $[b^n,c^n]$，$n=0,1,2\cdots$ 使

(1) $[b,c]=[b^0,c^0] \supset [b^1,c^1] \supset \cdots \supset [b^n,c^n] \supset \cdots$；

(2) 对所有 $x \in (b^{n+1},c^{n+1})$ 有 $F(x) \in (b^n,c^n)$；

(3)$F(b^{n+1})=c^n, F(c^{n+1})=b^n$。

令 $A=\bigcap_{n=0}^{\infty}[b^n,c^n], b^*=\inf A, c^*=\sup A$

则从(3)得

$$F(b^*)=c^*, F(c^*)=b^*$$

今特选定 M^r，使当 $k=n^2,(n+1)^2$ 时，$M_k=K$，则当

$$\left.\begin{array}{ll} & k=n^2+(2j-1)\text{时}, M_k=[b^{2n-(2j-1)},b^*] \\ \text{而} & k=n^2+2j\text{ 时}, M_k=[c^*,c^{2n-2j}]\end{array}\right\} j=1,\cdots,n$$

对于其它不是整数平方的 k，设 $M_k=L$。

这样选取是符合式(10.4.14)和式(10.4.15)的要求的。我们还可以选 M^r 满足式(10.4.16)。由于 $\rho(x)$ 可视为

$$F^{n^2}(x)\in K$$

关于 n 的极限，故对任何的 $r^*, r\in\left(\frac{3}{4},1\right)$，总有无穷多个 n 使当 $k=n^2,(n+1)^2$ 时，

$$M_k^r=M_k^{r^*}=K.$$

设 $x_r\in S, x_{r^*}\in S$，由于当 $n\to\infty$ 时 $b^n\to b^*, c^n\to c^*$，故对任意的 $\varepsilon>0$，总有 N 使当 $n>N$ 时

$$|b^n-b^*|<\frac{\varepsilon}{2}, |c^n-c^*|<\frac{\varepsilon}{2}$$

故当 $n>N$ 对于 $k=n^2,(n+1)^2$ 时，$M_k^r=M_k^{r^*}=K$，我们就有

$$F^{n^2+1}(x_r)\in M_k^r=[b^{2n-1},b^*]$$

而且 $F^{n^2+1}(x_r), F^{n^2+1}(x_{r^*})$ 都属于$[b^{2n-1},b^*]$，所以

$$|F^{n^2+1}(x_r)-F^{n^2+1}(x_{r^*})|<\varepsilon$$

而且有无穷多个 n 具有此性质，故得式(10.4.9)

$$\liminf_{n\to\infty}|F^n(x_r)-F^n(x_{r^*})|=0$$

Li—Yorke 定理提出了区间自身映射类的"浑沌"一词，它是一篇奠基的文章，说明：实函数 f 在有任意大周期的点和一个不可列集 S 使 $x_0,y_0\in S, x_0\neq y_0$

$$\limsup_{n\to\infty}|f^n(x_0)-f^n(y_0)|>0$$

$$\liminf_{n\to\infty}|f^n(x_0)-f^n(y_0)|=0$$

时，f 就是浑沌的，在 Li—Yorke"周期 3 就有浑沌"这个结果以后，很多人讨论了出现浑沌的周期条件，最好的就是"周期 $p\neq 2^n$ 时就有浑沌"。

实际上，Li—Yorke 定理不仅指出"周期 3"，而且对给定函数 f，一点以及随后的三点满足一种"四点"不等式。他们指出，在这种情况下就会有一个三周期从而就有浑沌。

1986 年，Bhartia 与 Egerland 给出定义：

函数 $f:R\to R$ 的一个 Li—Yorke 点是满足一种 Li—Yorke 不等式

$$x_3<x_0<x_1<x_2 \text{ 或 } x_3>x_0>x_1>x_2 \tag{10.4.21}$$

的点 $x_0\in R$。其中 $x_1=f(x_0), x_2=f^2(x_0), x_3=f^3(x_0)$

由此得到一些重要结果：

(1)若 f 连续，有一个三周期点，则 f^3 有一个 Li—Yorke 点；

(2)若 f 连续且有一个 Li—Yorke 点，则 f 至少有两个不同的三周期点；

(3)点集 $A=\{x_0|x_3<x_0<x_1<x_2\}$，$B=\{x_0|x_1<x_2<x_0<x_3\}$与 $C=\{x_0|x_2<x_3<x_0<x_1\}$或都是空集或都不是空集，对于所有不等号反向仍成立；

(4)下面四种陈述是等价的：

1)f 有一个周期 $p\neq 2^n$ 点；

2)存在 $m\geq 1$ 使 f^m 有一个周期 3 的点；

3)f^{2m}有 Li—Yorke 点；

4)f^{2m}至少有两个三周期点。

1988 年，Bhartia 与 Egerland 又在美国数学会刊上发表了"Sarkovskii 定理的深入研究"一文，从 Li—Yorke 四点集论述到四周期为首的排列，从而再论了 Sarkovskii 定理。

由于一个连续函数 $f:R\to R$ 的四周期轨道就可以给出一个三周期轨道，所以就对每一个 $n=1,2,\cdots$，给出一个 n 周期轨道。当然，这种轨道与 Sarkovskii 排序中的四周期轨道不是同一结构。这就是定理所未阐明的"型问题"(type—problem)。

设 $f:R\to R$ 连续，$x_0\in R$，如果 x_0 有一个预轨道$(x_0,x_{-1},\cdots,x_{-n})$使

$$x_0<x_{-n}<x_{-(n-1)}<\cdots<x_{-2}<x_{-1}$$

或

$$x_0>x_{-n}>x_{-(n-1)}\cdots>x_2>x_{-1}$$

则称 f 有一个 n 阶环路；若 x_0 有一个无穷预轨道$(x_0,x_{-1},\cdots,x_{-n},\cdots)$使

$$x_0<\cdots<x_{-n}<x_{-(n-1)}<\cdots<x_{-2}<x_{-1}$$

或

$$x_0>\cdots>x_{-n}>x_{-(n-1)}>\cdots>x_{-2}>x_{-1}$$

则称 f 有一个无穷环路。若 $x_0=x_{-n}$则称 $n-1$ 阶环路是一个 n 周期循路。

周期轨道与环路各表为 $P(k)$，$L(k)$，则 Sarkovskii 定理指出

$$P(3)\Rightarrow P(5)\Rightarrow P(7)\Rightarrow\cdots\Rightarrow$$
$$P(2.3)\Rightarrow P(2.5)\Rightarrow P(2.7)\Rightarrow\cdots\Rightarrow$$
$$P(2^2.3)\Rightarrow P(2^2.5)\Rightarrow P(2^2.7)\Rightarrow\cdots\Rightarrow$$
$$\cdots\Rightarrow\cdots$$
$$P(2^3)\Rightarrow P(2^2)\Rightarrow P(2)\Rightarrow P(1)$$

而 Bhartia－Egerland 精确化定理指出：

$$L(\infty)\Rightarrow\cdots\Rightarrow L(5)\Rightarrow L(4)\Rightarrow L(3)\Leftrightarrow$$
$$P(3)\Rightarrow P(5)\Rightarrow P(7)\Rightarrow\cdots\Rightarrow$$
$$L^2(\infty)\Rightarrow\cdots\Rightarrow L^2(5)\Rightarrow L^2(4)\Rightarrow L^2(3)\Leftrightarrow$$
$$P(2.3)\Rightarrow P(2.5)\Rightarrow P(2.7)\Rightarrow\cdots$$
$$L^{2^2}(\infty)\Rightarrow\cdots\Rightarrow L^{2^2}(5)\Rightarrow L^{2^2}(4)\Rightarrow L^{2^2}(3)\Leftrightarrow$$
$$P(2^2.3)\Rightarrow P(2^2.5)\Rightarrow P(2^2.7)\Rightarrow\cdots$$
$$\cdots$$
$$\cdots\Rightarrow P(2^3)\Rightarrow P(2^2)\Rightarrow P(2)\Rightarrow P(1)$$

其中 $P^n(k)$，$L^n(k)$，$L^n(\infty)$表示 f^n 有一 k 周期轨道，k 周期循路及无穷环路。

§10.5 马蹄形映射

一、线性系统

设 T 是 R^n 的任一个线性自同态(endomorphism)映射，可以把 T 视为 R^n 上的一个向量场，称它是一个线性向量场，它所对应的常微分方程是

$$\dot{x} = T(x) \tag{10.5.1}$$

其中 $x\in R^n$。这时，我们可以立即写出它所表现的积分流(integral flow)，因为 R^n 上的线性空间 $L(R^n)$是一种 Banach 空间，它是用无穷级数的表达形式来说明的，也就是，令

$$\exp(tT) = id + tT + \frac{1}{2}t^2T^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^nT^n + \cdots \tag{10.5.2}$$

id 表示 R^n 上的恒等映射，$t\in R$。这个级数对有 t 和 T 是就 T 的范数收敛的，T 的积分流 Φ 就是

$$\Phi(x,t) = \exp(tT)(x) \tag{10.5.3}$$

这只要形式上逐项微分可验证，若偏映射

$$\Phi_t: R^n \to R^n$$

是随 t 光滑改变的一个线性自同构映射(Automorphism)，Φ 就是线性的当且仅当它的速度向量场是线性的。

例1 若 $T=a(id)$对某 $a\in R$ 定义，则

$$\exp(tT) = id + at(id) + \cdots + \frac{1}{n!}(at)^n(id)^n + \cdots$$

$$= \left(1 + at + \cdots + \frac{1}{n!}(at)^n + \cdots\right)id = e^{at}id$$

例2 若 T 有矩阵表示$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，则 T^2 有矩阵表示$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$。从而 $\exp(tT)$级数终止于 $id+tT$ 的有限形式。

我们可以定义关于线性流的线性等价概念。设 Φ 与 Ψ 是各具速度 S 与 $T(S,T\in L(R^n))$ 的线性流，若对某 $a\in R, a>0$ 和某线性自同构 h，使图

$$\begin{array}{ccc} R^n \times R & \xrightarrow{\Phi} & R^n \\ h\times a \downarrow & & \downarrow h \\ R^n \times R & \xrightarrow[\Psi]{} & R^n \end{array}$$

可变换使用，即对所有$(x,t)\in R^n\times R$ 有

$$h\Phi(x,t) = \Phi(h(x), at)$$

则称 Ψ 是线性等价于 Φ 的，写成

$$\Psi \sim L\Phi \tag{10.5.4}$$

等价地说

$$\Psi \sim L\Phi \text{ 当且仅当 } S = a(h^{-1}Th) \tag{10.5.5}$$

所以，将线性流按线性等价分类的问题是与将 $L(R^n)$按相似性(线性共轭)分类一样的，而后者

已为实 Jordan 典型理论所解决，它的要点如下：

每一个 $T\in L(R^n)$ 相似于线性自同态 $T_j\in L(V_j)$，$j=1,\cdots,q$ 的一个直和

$$T_1\oplus\cdots\oplus T_q,$$

此时 $V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_q$ 是 R^n 的某种直和分解。而且对 V_j 的某个基底，T_j 的矩阵取形式为

$$M_j=\begin{bmatrix}\lambda_j & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_j & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_j\end{bmatrix}\tag{10.5.6}$$

其中的 $\lambda_j\in C$. 对每一个 M_j，它有两种可能：

(1)$\lambda_j\in R$，此时 M_j 的元是实数，T_j 是连带于 T 的 $\dim V_j$ 重复特征值 λ_j 的线性自同态；

(2)$\lambda_j=a+ib$，$a,b\in R$，$b>0$，此时 M_j 的元是实 2×2 子矩阵

$$\lambda_j=\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix},I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},0=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

T_j 是连续于 T 的 $\frac{1}{2}\dim V_j$ 对重复共轭特征值 λ 与 $\bar{\lambda}_j$ 的线性自同态。这里可以有多于一个 T_j 具有相同的特征值 λ_j，数值 $\dim V_j$ 与对应的特征值 λ_j(或 $\lambda_j,\bar{\lambda}_j$)决定了 T 的相似类。

因此，T 的积分流 Φ 可以分解为

$$\Phi_1\oplus\cdots\oplus\Phi_q$$

其中

$$\Phi_j(x_j,t)=\exp(tT_j)(x_j)$$

且 $x=(x_1,\cdots,x_q)\in V_1\oplus\cdots\oplus V_q=R^n$ 对应于 V_j 上列之基底

$$(\Phi_j)_t:V_j\to V_j$$

有矩阵

$$N_j=\mathrm{e}^{at}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{ibt} & t\mathrm{e}^{ibt} & \cdots & \cdots & \cdots & \dfrac{x^{m-1}\mathrm{e}^{ibt}}{(m-1)!}\\ 0 & \mathrm{e}^{ibt} & t\mathrm{e}^{ibt} & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathrm{e}^{ibt} & t\mathrm{e}^{ibt}\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \mathrm{e}^{ibt}\end{bmatrix}\tag{10.5.7}$$

其中 $\lambda_j=a-ib$，$a,b\in R$ 且若 $b>0$，$\left(\dfrac{t^r}{r!}\right)\mathrm{e}^{ibt}$理解为 2×2 块阵

$$\frac{t^r}{r!}\begin{bmatrix}\cos bt & -\sin bt\\ \sin bt & \cos bt\end{bmatrix}$$

例如，若 $\dim V_j=4$，$\lambda_j=i$，则

$$M_j=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$N_j = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & t\cos t & -t\sin t \\ \sin t & \cos t & t\sin t & t\cos t \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

在 $a<0, b=0, \dim V_j=2$ 的情况，平面 V_j 中的相迹表如图 10.23 所示。每一个轨道都以 0 点为其唯一 ω—极限点。通常 x 点对 f 的 ω 集定义为

$$\omega(x) = \bigcap_{n\in N} \{f^r(x) | r \geqslant n\} \tag{10.5.8}$$

利用相似变换，我们可以把对应于具负实部的特征值 ξ_j 的所有子空间的直和表为 V_-，在这个子空间上的向量场是等价于向量场 $-id$ 的流。从而，在 R^n 一个子空间上的任何两个线性压缩流都是流等价的；类似地，对于正实部特征值，得到一个子空间 V_+ 上的向量场，它是等价于向量场 id 的。



图 10.23

还有实部为零的特征值所对应的线性子空间 V_0。

若 $V_0=\{0\}$，则 $R^n=V_+\oplus V_-$，向量场 T 就是对应于 R^n 上具矩阵

$$I_r \oplus - I_s = \operatorname{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1)$$

的向量场，$r=\dim V_+$，$s=\dim V_-$。这样一个向量场 T 称为一个"双曲线性向量场"，它的积分流 Φ 称为一个"双曲线性流"。这种向量场常标以 $EL(R^n)$ 符号，表示它们是基本的(elementary)线性向量场。

关于 V_0 上的分析，1973 年 N. H. Kuiper 给出的主要结果是：

若 Φ 与 Ψ 是 R^n 的线性自同态 S 与 T 给出的线性流，它们的特征值都有零实部，则 Φ 拓扑等价于 Ψ 当且仅当 Φ 是线性等价于 Ψ。

在 R^n 上具分解 $U_-\oplus U_-\oplus U_0$ 与 $V_+\oplus V_-\oplus V_0$ 的两个线性流是拓扑等价的当且仅当 $\Phi|U_0$ 线性等价于 $\Psi|V_0$，$\dim U_+=\dim V_+$，$\dim U_-=\dim V_-$。

例 3　R 上的线性流。

实线 R 的任一线性自同态是对某实数 a 的形式

$$x \mapsto ax$$

a 就是映射的特征值。所以，映射是一个双曲向量场当且仅当 $a\neq 0$。积分流是

$$\Phi_t x = t \cdot x = xe^{at} \tag{10.5.9}$$

所以，相对于这个线性流来说，它的特征值是 e^{at}，于是，映射是一个双曲流当且仅当 $e^{at}\neq 1$。所以，关于 R 上的线性流，恰有三种拓扑等价类，各对应于 $a<0, a=0$ 和 $a>0$ 的情况(图 10.24)。



图 10.24

例 4　R^2 上的线性流。

关于一个实 2×2 矩阵的实 Jordam 型共有下列三种形式

$$(1)\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix},(2)\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},(3)\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \tag{10.5.10}$$

其中 λ,μ,a,b 是实数，$b>0$，对应的特征值是 λ,μ 和 $a\pm ib$。

所以，R^2 上一个线性向量场是双曲的当且仅当

$$(1)\lambda\mu \neq 0,(2)\lambda \neq 0,(3)a \neq 0$$

从而有三种双曲流的拓扑等价类。图 10.25 给出这些类型的标准形式

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

各称为正常结点、非正常结点和焦点。

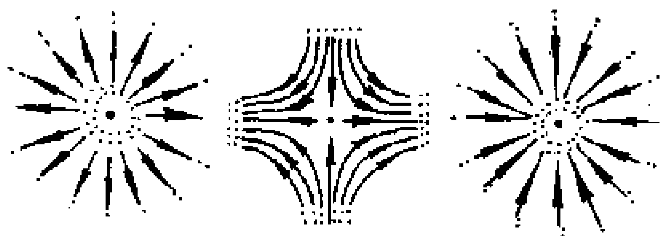


图 10.25

还有五类非双曲线性流：

第一种情况 $\mu=0$ 给出三类，各对应于 $\lambda<0$、$\lambda=0$ 与 $\lambda>0$。若 $\lambda=0$ 就是平凡流，另外两类如图 10.26 所示，这种流都是乘积流(product flow)。

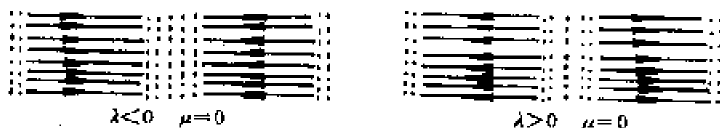
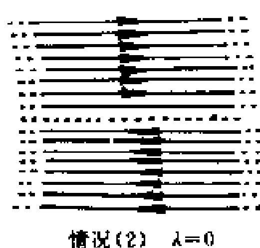


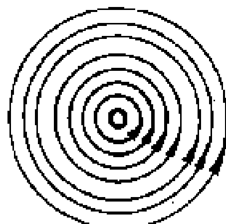
图 10.26

另外两种情况是不可化约流，(10.5.10)中的(2)$\lambda=0$ 以及(3)$a=0$(图 10.27)。

设 $L:R^3\to R^3$ 是一个线性映射，且用矩阵 A 表示出 $Lx=Ax$，则存在一个 3×3 矩阵 G 使 $G^{-1}AG$ 具有下列四种标准形式



情况(2) $\lambda=0$



情况 3 $a=0$

图 10.27

$$(1)\begin{bmatrix}\alpha & -\beta & 0\\ \beta & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix},(2)\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \mu & 0\\ 0 & 0 & \eta\end{bmatrix}$$

$$(3)\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{bmatrix},(4)\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} \tag{10.5.11}$$

这里的线性映射是指的线性流而不是向量场，那么，就有

命题 设 $L:R^3\to R^3$绝对值小于 1 的所有特征值，则对所有 $x\in R^3$，当 $n\to\infty$时，$L^n(x)\to0$。

证明 我们知道，0 恒是线性映射的一个不动点，如果它有一个绝对值小于 1 的特征值，它就有一个对应的方向，在这个方向上的点吸向原点。

现在，我们可将式(10.5.11)共轭转换为

$$(1)(2)(3)'\begin{bmatrix}\lambda & \epsilon & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{bmatrix},(4)'\begin{bmatrix}\lambda & \epsilon & 0\\ 0 & \lambda & \epsilon\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix},\ \epsilon\neq$$

然后讨论实值函数

$$\mathrm{V}(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \tag{10.5.12}$$

就可以肯定存在 $\nu<1$ 使当 $\varepsilon>0$ 足够小时有

$$\mathrm{V}\circ L(x) \leqslant \nu\mathrm{V}(x) \tag{10.5.13}$$

从而，当 $x\neq0$ 时，$\mathrm{V}\circ L^n(x)\leqslant\nu^n\mathrm{V}(x)$，故当 $n\to\infty$时，$\mathrm{V}\circ L^n(x)\to0$。但是 $\mathrm{V}(x)=0$，当且仅当 $x=0$，所以 $L^n(x)\to0$。

关于式(10.5.13)的证明，以(4)′而论，从 $|xy|\leqslant x^2+y^2$ 得

$$V \circ L(x) = \lambda^2(x^2 + y^2 + z^2) + \epsilon^2(y^2 + z^2) + 2\lambda\epsilon(xy + yz)$$
$$\leqslant (\lambda^2 + \epsilon^2)(x^2 + y^2 + z^2) + 2|\lambda\epsilon|(|xy| + |yz| + |xz|)$$
$$\leqslant (\lambda^2 + \epsilon^2 + 4|\lambda\epsilon|)(V(x))$$

故可选 ϵ 足够小，使 $\nu = \lambda^2 + 4|\lambda\epsilon| + \epsilon^2$ 时不等式成立。其它情况类似，得证。

由这个命题得到一般映射的线性化方法。

命题中构造的函数称为一个 Liapunov 函数，概念化的这种函数是：

定义 1 设 $F: R^n \to R^n$ 是一个微分同胚映射，$V: R^n \to R$ 是关于 F 的中心在 P 的一个 Liapunov函数，如果

(1)若 $x \neq P$ 时，$V(x) > 0$；

(2)$V(p) = 0$；

(3)$V \circ F(x) \leqslant V(x)$，等式成立当且仅当 $x = p$。

由此定义，可知它适用于 p 是 F 的不动点即

$$F(p) = p$$

的一般映射，若当 $x \neq p$ 时

$$V \circ F(x) < V(x) \tag{10.5.14}$$

称 V 是一个严格的 Liapunov 函数，则用上述命题中的证明，直接表示：对所有在 p 的一个邻域中的 x，当 $n \to \infty$ 时，

$$F^n(x) \to p \tag{10.5.15}$$

二、马蹄形映射

我们在 §10.2 中已经介绍了马蹄形映射是怎样在平面 R^2 中正方形

$$Q = \{x \mid |x^i| \leqslant 1, i = 1,2\} \tag{10.5.16}$$

由映射 φ 将它映成一种马蹄形的集合。并且从

$$\Lambda^+ := \bigcap_{n \geq 0} \varphi^n(Q), \Lambda^- := \bigcap_{n < 0} \varphi^n(Q) \tag{10.5.17}$$

得到集合

$$\Lambda := \bigcap_{n \in Z} \varphi^n(Q) = \Lambda^+ \cap \Lambda^- = \Delta_1 \times \Delta_2 \tag{10.5.18}$$

$\Delta_1 \subset AB$ 是一个 Cantor 集合，$\Delta_2 \subset AD$ 也是一个 Cantor 集合。这样 Λ 是两个 Cantor 集合的积，所以，它是 Q 的一个闭的无处稠的零维子集。

对每一点 $x \in \Lambda$，连带给出一个双向序列

$$(\alpha_n(x))_{n=-\infty}^{+\infty} \tag{10.5.19}$$

它的元是 0 或 1，按法则取为

$$\alpha_n(x) = \begin{cases} 0, 若\ \varphi^n(x) \in Q_0 \\ 1, 若\ \varphi^n(x) \in Q_1 \end{cases} \tag{10.5.20}$$

Q_0, Q_1 就是 $Q \cap \varphi(Q)$ 的两个部分矩形，这种对应是一一对应。

类似于 §10.3 中所讨论的单向符号序列，现在无穷乘积集合

$$X = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \{0,1\}_n = \{x = (\alpha_n) \mid \alpha_n = 0 或 1, n \in Z\} \tag{10.5.21}$$

中，我们引入积拓扑，按坐标收敛的一种拓扑，这就是一个具度量为

$$\rho(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Z^{-|n|} |\alpha_n - \beta_n|, x = (\alpha_n), y = (\beta_n) \tag{10.5.22}$$

的一个紧度量空间。

再一次用

$$S:X\to X \tag{10.5.23}$$

表示向左移位：若 $x=(\alpha_n)$，则

$$S(x)=(\beta_n)\text{，此中 }\beta_n=\alpha_{n+1} \tag{10.5.24}$$

它是空间 X 的一个同胚映射，而且 S^{-1} 是向右的移位映射。

定理 1 (1)集合 Λ 是 φ 不变集；

(2)动力系统(Λ,φ)是拓扑共轭于式(10.5.21)、(10.5.24)给出的系统(X,S)。

证明 (1)$\varphi(\Lambda)=\varphi(\bigcap_{n\in Z}\varphi^n(Q))=\bigcap_{n\in Z}\varphi^{n+1}(Q)=\Lambda$；

(2)在 Λ 中的每一点 $x=(x_1,x_2)\in\Lambda$ 完全由数 $\alpha_n(x)$，$n\in Z$ 所决定；那些 $n\geqslant 0$ 的对应数定义了坐标 x_1，那些 $n<0$ 所对应的数定义了 x_2，容易检验映射

$$x\mapsto(\alpha_n(x))$$

是 Λ 映上 X 的一个同胚映射。又从 $\alpha_n(x)$的定义我们有

$$\alpha_n(\varphi(x))=\alpha_{n+1}(x)$$

所以系统(Λ,φ)与(X,S)是共轭的。

如果我们在马蹄形映射例子中，改变在 φ 上的一些如下条件，整个的推理依然成立，即集合 $\Lambda:=\bigcap_{n\in Z}\varphi^n(Q)$是同胚于 X 的，对于系统(Λ,φ)定理 1 成立。

(1)将 φ 在 $Q_0\cup Q_1$ 上线性的要求改为集合 $Q\cap\varphi^n(AD)$与 $Q\cap\varphi^n(BC)$对于 $n\in Z^+$ 是一致 C^1 有界的，即对变量 x_2 的函数图的那些集合对 n 有一致有界的导数；

(2)$Q\cap\varphi^n(AD)$不与 $Q\cap\varphi^n(BC)$相交，同样的对 AB 与 AD 也是如此；

(3)φ 在平行于 AB 的线段上压缩，在平行于 AD 的线段上膨胀。

后来，Z. Nitecki 于 1971 年给出如下陈述：

马蹄形映射 $C^1-\Omega-$稳定，其中

$$\Omega=\Omega(\varphi)\cap Q.$$

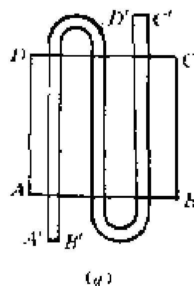
这里的 $\Omega(\varphi)$是相对于微分同胚 φ 的所有非游荡点的集合，φ 是在流形 M 上的映射，一点 $x\in M$ 称为游荡的(wandering)，当且仅当有 x 的一个邻域 U 使

$$\bigcup_{|n|>0}\varphi^n(U)\cap U=\varnothing \tag{10.5.25}$$

不是游荡的点 $x\in M$，称为非游荡的。

这样，所谓 $C^1-\Omega-$稳定就是说：

若 Ψ 是一个 C^1 近于 φ 于 Q 内的微分同胚映射，则 Ψ 于其在 Q 中非游荡点集上的限制是拓扑共轭于{0,1}序列空间中的移位映射。



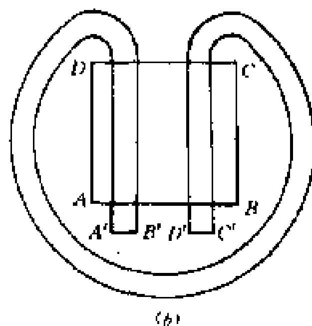


图 10.28

进一步分析，若 $Q\cap\varphi(Q)$是由多于 2 个部分，例如 m 个部分组成，则如上处理方法，仍然可以得到一个定义为两个 Cantor 型集合的积的 $\varphi-$不变集 $\Lambda\subset Q$，而且使(Λ,φ)系统拓扑共轭于系统(X,S)，这里的

$$X=\prod_{n=-\infty}^{+\infty}\{1,\cdots,m\}_n \tag{10.5.26}$$

S 是向左的移位映射。所以，集合 $\varphi(Q)$可以有各种不同的形状(图 10.28)。

马蹄形现象以一种很自然的形式出现

于很多动力系统，生长模型在 $r>4$ 的情况（见§10.2）正是一种一维的特例。所以，值得再进一步来分析它的内在机制。

设 M 是一个紧流形，且设 $\varphi\in \mathrm{Diff}^r(M)$，即 φ 是一种 r 阶连续可微于 M 上的映射。

定义 2 一点 $x\in M$ 称为 φ 的一个同宿点(homoclinic point)当且仅当对某异于 x 的双曲周期点 p

$$x\in W^+(p)\cap W^-(p) \tag{10.5.27}$$

以紧 Riemann 流形 M 来说，它在 M 上有一个度量 ρ，则

$$\begin{aligned}W^+(p)&=\{x\in M\mid \lim_{n\to+\infty}\rho(\varphi^n(p),\varphi^n(x))=0\}\\ W^-(p)&=\{x\in M\mid \lim_{n\to-\infty}\rho(\varphi^n(p),\varphi^n(x))=0\}\end{aligned} \tag{10.5.28}$$

再若在 x 的 M 切空间不相切的有 $W^+(p)$，$W^-(p)$ 交于 x，则 x 称为一个横截(transversal)同宿点。

1892～1899 年间，Poincaré 首先在他的天体力学著作中认识到这种同宿点的存在，而且他还指出一旦这种同宿点存在以后，它将使轨道复杂起来。60 年代，Smale 等人进一步作了研究，图 10.29 就是一种同宿点出现后所引起的复杂轨道形式。

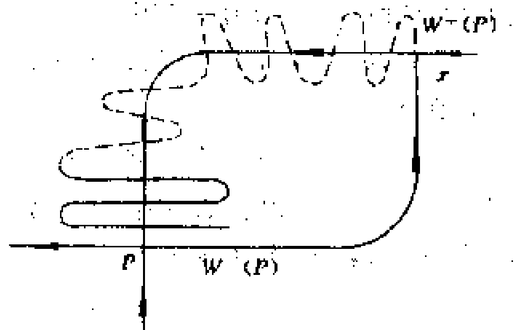


图 10.29

事实上，如果一个系统有一个横截同宿点，它就必然出现马蹄形现象。

马蹄形现象是浑沌现象的一种中心概括，它包括生长模型的特例，它本身又从符号双向动态系统表现出浑沌特征，又从横截同宿点性质推广到一般情况。

至于双向符号动态系统 X 的浑沌性是与单向符号动态系统 Σ_2 一样的，它有稠的周期点分布，且有稠轨道，而马蹄形映射于 Λ 上又拓扑共轭于 X 上的移位映射，所以马蹄形映射 φ 在不变集 Λ 上构成浑沌。

正如§10.2 中所讨论的生长模型式(10.2.67)在 $r>2+\sqrt{5}$ 时所论证的 Cantor 集合 Λ 是一个浑沌集一样，F_2 在 $\Lambda\subset[0,1]$ 上是浑沌的，而在[0,1]的其它点 $x\in[0,1]$的其它点 $x\in[0,1]\backslash\Lambda$ 上的迭代最终将趋于 $-\infty$，所以都属于整体稳定范围。现在，马蹄形映射在它原域 Q 正方形中的其它点，迭代以后最终也是整体稳定的。

事实上，马蹄形映射在正方形域 Q 反复迭代所形成的不变集 Λ，应该还要考虑 $Q\backslash\Lambda$ 的点在马蹄形映射 φ 作用下最终是如何趋向。这样，我们把 φ 的定义域完整划成三部分组成：一个边长为 1 的中心部分的正方形 S（即相当于 Q），两个在 S 两边的半圆。整个的 D 域像一个运动场（图 10.30）。

马蹄形映射整个运动场域 D 到它的内部：在 S 垂直部位以因子 $\delta<1/2$ 压缩，而在水平部位以因子 $1/\delta$ 膨胀质 S 拉长变窄，然后将它又放进整个运动场 D 域形成一个马蹄形（图 10.31）。

半圆域 D_1 与 D_2 被压缩成映入 D_1 的图示部分，这样，$\varphi(D)\subset D$ 且 φ 是一一的；但是由于 φ 不是映上(onto)，所以，φ^{-1} 不是在整个运动场 D 域上有定义。

S 的前像是由两个垂直向矩形 v_0，v_1 组成，可以把它们看成是由 $\varphi(S)\cap S$ 的两个水平部分 H_0，H_1 线性映上的，而且 v_0，v_1 的宽是 δ，它也是 H_0，H_1 的高（图 10.32）。

从 φ 在 S 上的线性性，φ 在 S 中保持垂直线与水平线不变其垂直性与水平性，这样，若 h

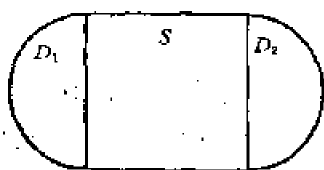


图 10.30

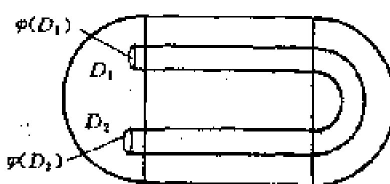


图 10.31

是 S 的一个水平线段，它的像也是落在 S 中，则 $\varphi(h)$ 的长度是一个因子 $\frac{1}{\delta}$ 乘上 h 的长度，类似的，若 v 与 $\varphi(v)$ 是在 S 中的垂直线段，则 $\varphi(v)$ 为一 δ 因子缩短。

另外，φ 在 D_1 上压缩，所以 φ 在 D_1 中有唯一不动点 p，且对所有

$$q \in D_1, \lim_{n\to\infty}\varphi^n(q) = p$$

而 $\varphi(D_2)\subset D_1$，所以在 D_2 中的所有轨道也具有收缩于 p 的特征，因此，若 $q\in S$，有某 $k>0$ 使

$$\varphi^k(q) \notin S$$

图 10.32

则必是

$$\varphi^k(q) \in D_1 \cup D_2$$

所以恒有

$$\varphi^n(q) \to p$$

这就是我们只要讨论不变子集 Λ 的原因：

$$\Lambda = \{q \in S \mid \varphi^k(q) \in S, 对所有 k \in Z\}$$

由于 Λ 有 Ω—稳定性，总体 $\varphi: D\to D$ 很显然与生长模型式(10.3.19)一样，也具有结构稳定性。

事实上，我们还可以在球面 S^2 上类似地讨论马蹄形映射，包括重要的 Smale 马蹄形映射在内的一个例子，就是 S^2 的一种微分同胚映射 f，它满足结构稳定性的充分条件：

公理 A (1) f 的非游荡集 $\Omega=\Omega(f)$ 是双曲的，且 $\Omega=\overline{\mathrm{Per}(f)}$，即 f 周期点在 Ω 中稠；

(2)横截性条件。

非游荡集 $\Omega=\Omega(f)$ 由三个基本集合组成：Ω_1 是一个排斥不动点，Ω_3 是一个吸引不动点，Ω_2 是一个 Cantor 集合，其中周期鞍点是稠的。在球面的北极我们放了一个双曲发点 Ω_1，整个北半球 H_+ 包括赤道都属于不稳定流形 $W^u(\Omega_1)$，所以，若 H_- 表示南半球面，则

$$f(H_-)\subset \mathrm{Int}H_-(H_-的内部)$$

现在来描述 f 在 H_- 的作用。映射 l 是线性的，以一种压缩因子 $0<\lambda<\frac{1}{4}$ 来压缩水平线，以一种膨胀因子 $\mu>4$ 来胀开垂直线；映射 q 扭曲矩形 $l(Q)$ 在它的中间部位以形成一个马蹄形 F，将它移动位置如图 10.33。从而，$Q\cap f(Q)$ 有两个矩形部分 $\tilde{R}_1$ 与 $\tilde{R}_2$，它们是在 Q 中矩形 R_1 与 R_2 的像。在矩形 R_1 与 R_2 中，微分同胚是仿射的，即一种带有平移的线性映射，用 λ 将水平线压缩，用 μ 将垂直线伸长，最后在盘 $\tilde{D}_1=fD_1$ 的中心，我们放置一个双曲吸引不动点 Ω_3 且 $\tilde{D}_1\subset W^s(\Omega_3)$。

让我们来分析集合 $\Omega=\Omega(f)$。若 $x\in H_{+}$ 且 x 不是北极，则 x 是游荡的，因为它属于发点的不稳定流形；若 $x\in \bar{D}_1$ 且 $x\neq\Omega_3$，则 x 是游荡的，因为它属于一个吸点的稳定流形。若 $x\in D_1$，则 $f(x)\in\bar{D}_1$，且 x 是游荡的；若 $x\in D_2$，则 $f(x)\in D_1$，x 又是游荡的。所以，当 $x\in H_{-}$ 且 $x\neq\Omega_3$，则 x 仅当它的轨道完全含在 Q 中时才是非游荡的。因此，若 $x\in\Omega$ 且 $x\neq\Omega_1$，$x\neq\Omega_3$，就有

$$x\in\bigcap_{n\in Z}f^nQ=\Lambda$$

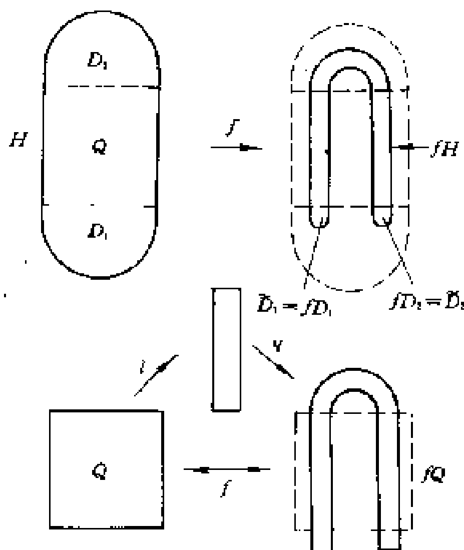


图 10.33

我们来描述集合 Λ：由于 $Q\cap fQ$ 有两个矩形部分，$Q\cap fQ\cap f^2Q$ 有四个矩形部分，如此等等。系统地说，Q；$Q\cap fQ=\tilde{R}_1\cup\tilde{R}_2$；$Q\cap fQ\cap f^2Q=\tilde{R}_{11}\cup\tilde{R}_{12}\cup\tilde{R}_{21}\cup\tilde{R}_{22}$ 等等，矩形的下标方法是

$$f\tilde{R}_1\cap Q=\tilde{R}_{11}\cup\tilde{R}_{12},\tilde{R}_{11}\subset\tilde{R}_1,\tilde{R}_{12}\cap\tilde{R}_1=\varnothing$$

类似的
$$f\tilde{R}_2\cap Q=\tilde{R}_{21}\cup\tilde{R}_{22},\tilde{R}_{21}\cap\tilde{R}_2=\varnothing,\tilde{R}_{22}\subset\tilde{R}_2$$

一般的
$$\tilde{R}_{\sigma_1\cdots\sigma_p\sigma_{p+1}}\subseteq f\tilde{R}_{\sigma_1\cdots\sigma_p}$$

且若

$$\tilde{R}_{\sigma_1\cdots\sigma_p\sigma_{p+1}}\subset\tilde{R}_{\sigma_1\cdots\sigma_p},\sigma_{p+1}=\sigma_p$$

若不相交则
$$\sigma_{p+1}\neq\sigma_p$$

这里的每一个 σ_i 是 1 或 2。注意到，给定任一整数 $k>0$，$\tilde{R}_1\supset\tilde{R}_{11\cdots1}$ 下符标的 1 重复 k 次，这就是

$$\tilde{R}_{11\cdots1}\subset f^k\tilde{R}_1\cap Q$$

特别是

$$f^k\tilde{R}_1\cap\tilde{R}_1\neq\varnothing$$

同样的关于 $\tilde{R}_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_p}$，$\sigma_i$ 可取 1 或 2 也是一样的。

讨论任一水平线 α 使 $\alpha\cap Q\neq\varnothing$，令

$$[a,b]=\alpha\cap Q$$

则 $[a,b]\cap fQ$ 是两个闭线段且是从 $[a,b]$ 移去三个非交线段的结果，再从这两个线段的每一个移去三个线段形成

$$[a,b]\cap fQ\cap f^2Q$$

如此下去，就可以得到

$$[a,b]\cap(\bigcap_{n\geqslant0}f^nQ)\tag{10.5.29}$$

是一个 Cantor 集合。再对垂直线用同样推理就得

$$\bigcap_{n\leqslant0}f^nQ\tag{10.5.30}$$

也是一个 Cantor 集合。由于 f 是一个仿射映射所以

$$\Lambda=\bigcap_{n\in Z}f^nQ\tag{10.5.31}$$

也是一个 Cantor 集合，它是一个在水平、一个在垂直的 Cantor 集合之积。

然后，我们可以证明 Λ 的双曲线，任何一点 $x\in\Lambda$ 的非游荡性，f 的周期点在 Λ 中稠性，以

及 $f:S^2\to S^2$ 的基本集合 $\Omega_1,\Omega_2=\Lambda,\Omega_3$ 都具有横截性，f 就满足了公理 A 与横截性的条件，所以是结构稳定的。

这种结构稳定性和总体生长模型式(10.3.19)一样是把浑沌部分包含在内的稳定性。

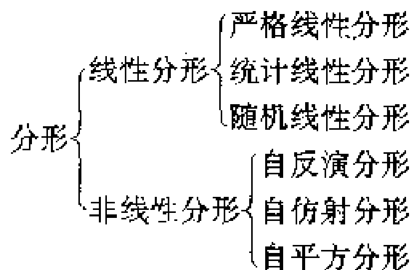
§10.6 分形简介

以上几节通过对生长模型和马蹄形映射的分析，我们概括并抽象出浑沌的意义，研究了它的特征及其数学基础。为了要理解浑沌系统中由于马蹄形映射所提出的伸缩和折叠变换所造成的复杂几何特征，传统的几何知识无济于事，必须运用分形几何学提供的新工具。为此本节扼要地阐述分形的意义，以及分形维数的定义和它的简单计算方法。

一、分形的意义

分形(fractal)概念并非纯数学的产物，而是对普遍存在的复杂几何形态的科学概括，有广泛的实际背景。自然界中到处存在着分形体，诸如坑坑洼洼的地面、曲曲折折的海岸线、层层分叉的树枝。地质学中的复杂褶皱、揉皱，遍布周身纵横交错的血管等，都是自然界的分形对象。分形和经典的几何学不同，它是研究那种不规则的、破碎的、琐屑的几何特征。传统的几何学描述的对象是由直线或曲线、平面或曲面、平面体或曲面体构成的各种几何形状，称之为整形几何学。整形的基本特征是具有光滑性(可切性)，至少是分段或分片光滑的。分形的基本特征是不光滑性，甚至是不连续的。自然界普遍存在的几何对象大多数是分形。整形是一种例外。

分形按数学性质划分，有线分形、面分形、体分形；按更深刻的数学性质来看，有如下分类：



分形是具有层次结构的几何对象。严格线性分形的不同层次之间具有严格的自相似性，而且是无限层次的嵌套结构。统计分形只有统计意义下的自相似性。在线性分形中，沿不同方向的伸缩比都一样。在非线性分形中，包括比较简单的自仿射分形，沿不同方向的伸缩比不一样。非线性分形更复杂，但更普遍、更能反映出自然界的本质几何特征。

现在介绍几个著名的数学分形例子，并指出它们产生的数学规则，这对于描述浑沌运动有重要意义。

在一维空间的各种分形中，一个典型例子就是我们已讨论过的 Cantor 集合(Cantor 尘埃)。它是最容易构造的分形，然而，它却显示出许多最典型的分形特征。从一个线段(如区间)[0,1]开始，把它三等分后去掉中间那一段。再把剩下的两段分别三等分并去掉中间一段，将这种操作过程无限进行下去，最后剩下的极限点集合，就是 Cantor 集合(图 10.34)。

设 $E_0=[0,1]$，$E_1=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]$，$E_2=\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]$，…，则 E_k 是由 2^k 个长度各为 3^{-k} 的区间组成。因此，Cantor 集合 $F=\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}E_k$。事实上，$F$ 是一不可数的无穷点集，在 F 中的任一个点的邻域中都包含 F 集内的无穷多个点，这些点处处稀疏，且长度

为 0。

下面列出三分 Cantor 集合的一些性质，许多分形也有类似的性质：

(1)F 是自相似的。显然，在区间 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ 和 $\left[\frac{2}{3},1\right]$ 内的 F 的部分与 F 是几何相似的，相似

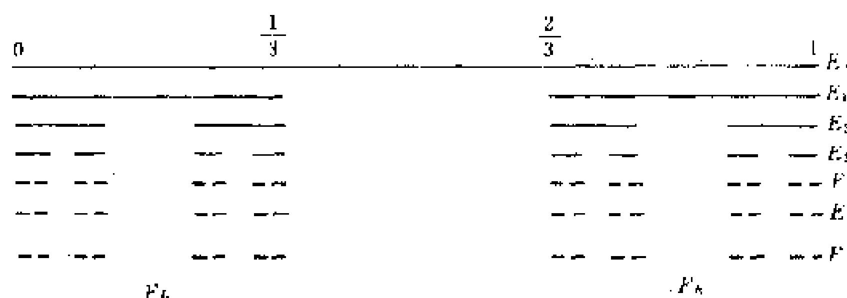


图 10.34

比为 $\frac{1}{3}$。进而 E_2 的四个区间内 F 的部分也与 F 相似，相似比为 $\frac{1}{9}$，以此类推，Cantor 集合 F 包含许多不同比例的与自身相似的样本。

(2)F 有"精细结构"，即它包含有任意小比例的细节，越放大 Cantor 集合的图，间隙就越呈现出来。

(3)虽然 F 有错综复杂的细节结构，但 F 的实际定义是非常简明的。

(4)F 是由一个迭代过程得到的，其结构是由反复地去掉区间 $\frac{1}{3}$ 得到的，持续的步骤得到的 E_k 是 F 的越来越好的逼近。

(5)F 的几何性质难以用传统的术语来描述，它既不是满足某些简单条件的点的轨迹，也不是任何简单方程的解集。

(6)F 的每点附近都有大量被各种不同间隔分开的其它点。

(7)F 在某种意义上是相当大的集合(是不可数无穷的)，但是它的大小不适合用通常的测度和长度来度量，用任何合理定义的长度，F 总是长度为零。

在二维空间中，典型的例子就是 Koch 曲线。它的构造法则是：给定一个源图，是由若干线段组成的，其中有两个点为特定点，每次变换都把上次变换的结果的每一直线段改换成与源图相似的图形，且源图中两个特定点的像就是两个直线段的端点；将这种变换不断进行下去，得到的极限图形便是 Koch 曲线(图 10.35)。

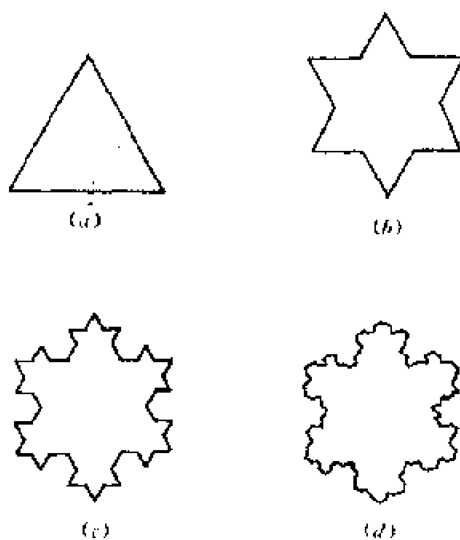


图 10.35

图 10.35 的源图为一个三角形，将每一边的中间 $\frac{1}{3}$ 段去掉，接上一个向外的三角形，边长为源图边长的 $\frac{1}{3}$，但无底边，反复操作这种变换，得到的极限情形是由分形曲线(Koch 曲线)围成 Coch 岛，岛的面积有限，但周长为无穷大。事实上，设源图正三角形每边长为 1，即 $E_0=3$，$E_1=3\left[\frac{4}{3}\right]$，$E_2=3$

$\left[\frac{4}{3}\right]^2,\cdots,E_k=3\left[\frac{4}{3}\right]^k$，于是，当 $k\to+\infty$ 时，$E_k\to+\infty$。

还有许多其它的构造方式也可以得到具有这种类似性质的集合，所有这些集合普遍地被称为分形。任何能称为分形的集合都有精细的结构；都有某种程度的自相似性，它们由以某种方式和整体相似的部分组成，这种相似性可以是近似的也可以是统计的。

经典的几何方法和计算方法不适合用来研究分形，需要另外的方法。分形几何的主要工具是它的许多形式的维数，这种维数能够反映出分形本身的比例性质和自相似性。

整形几何学研究的都是具有整数维的对象，点是0维的，线是一维的，面是二维的，体是三维的。抽象空间的几何对象也都是整数维的，将这些几何对象作拉伸、压缩、扭曲、折叠等变换都不改变它们的维数。这种维数称为拓扑维，记作 d。

分形的主要几何特征是关于它的结构不规则性和复杂性程度的度量，这就引出分数维数的概念。若以 D 记之，则 D 允许取分数值，并且 D 一般情况下都取分数，故称分数维数（简称分维）。从维数这一性质来看，分形的本质特征是它的分数维不小于它的拓扑维即

$$D>\mathrm{d}$$

分形尚无可以被普遍接受的精确定义。有一种意见认为：对分形似乎最好把它看成具有下面列出的性质的集合，而不去探求严格的定义，这种定义肯定几乎总要排除掉一些有趣的情形。从数学家的观点看来，这样处理不是什么坏事情。

综合以上的分析，我们可以对分形作一个描述性的定义。设 F 是一个集合，如果 F 具有以下的性质：

(1) F 具有精细的结构；

(2) F 是不规则的，它不能用传统的几何语言描述；

(3) F 通常有某种自相似的形式；

(4) F 的“分数维数”大于它的拓扑维数；

(5) F 可拟用简单的方法定义，可能由迭代产生。则这样的集合 F 称为分形。

二、分维的定义及其计算

在被使用的多种多样的“分形维数”概念中，以 Caratheodory 构造为基础的 Hausdorff 定义是最古老的，也可能是最重要的一种。Hausdorff 维数具有对任何集都有定义的优点，由于它是建立在相对比较容易处理的测度概念的基础上，因此在数学上也是较为方便的。

设 $U\subset R^n$ 为任何非空子集，U 的直径定义为 $|U|=\sup\{|x-y||x,y\in U\}$. 设集类 $\{U_i\}$ 为可数的或有限的且 $|U_i|\leqslant\delta,i=1,2,\cdots,n,\cdots$。如果集合 $F\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i$ 则称 $\{U_i\}$ 为 F 的一个 δ—覆盖。

定义 1 设 F 为 R^n 中的任何子集，S 为一非负数，对任何 $\delta>0$，有

$$\mathscr{H}_\delta^s(F)=\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s \mid \{U_i\}\text{ 为 }F\text{ 的 }\delta-\text{覆盖}\} \tag{10.6.1}$$

如果

$$\mathscr{H}^s(F)=\lim_{\delta\to 0}\mathscr{H}_\delta^s(F) \tag{10.6.2}$$

对任何 $F\subset R^n$ 这个极限都存在，但极限值可以是 0 或 ∞，那末称 $\mathscr{H}^s(F)$ 为 F 的 s—维 Hausdorff 测度。

特别地，$\mathscr{H}^s(\varnothing)=0$. 如果 $E\subset F$，则 $\mathscr{H}^s(E)\leqslant\mathscr{H}^s(F)$. 若 F_i 为任何可数不交的 Borel 集序列，则

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}^s(F_i)$$

Hausdorff 测度推广了长度、面积和体积等类似概念。可以证明 R^n 中任何子集的 n 维 Hausdorff 测度与 n 维 Lebesgue 测度，即通常的 n 维体积，相差一常数倍。更精确地，若 F 是 R^n 中 Borel 子集，则

$$\mathcal{H}^n(F)=c_n\mathrm{Vol}^n(F)$$

其中常数 $c_n=\pi^{\frac{1}{2}n}/2^n(\frac{1}{2}n)!$，即直径为 1 的 n 维球的体积。类似地，对于 R^n 中"好的"低维子集，$\mathcal{H}^0(F)$是 F 中点的数目；$\mathcal{H}^1(F)$给出了光滑曲线 F 的长度；若 F 为光滑曲面，则 $\mathcal{H}^2(F)=\frac{1}{4}\pi\times\mathrm{area}(F)$；而 $\mathcal{H}^3(F)=\frac{1}{6}\pi\times\mathrm{Vol}(F)$；若 F 为 R^n 中光滑 m 维子流形(即经典意义 F 的 m 维曲面)，则 $\mathcal{H}^m(F)=c_m\times\mathrm{Vol}^m(F)$。

长度、面积和体积的比例性质是从所周知的。当比例放大 λ 倍时，曲线的长度放大 λ 倍，平面区域的面积放大 λ^2 倍，3 维物体的体积放大 λ^3 倍。正如可以预料到的，s 维 Hausdorff 测度放大 λ^s 倍。这个比例性质是分形理论的基础。

定理 1 如果 $F\subset R^n$，$\lambda>0$，则

$$\mathcal{H}^s(\lambda F)=\lambda^s\mathcal{H}^s(F)$$

其中 $\lambda F=\{\lambda x\mid x\in F\}$，即 F 按比例放大 λ 倍。

证明 若$\{U_i\}$为 F 的一个 $\delta-$覆盖，则$\{\lambda U_i\}$为 λF 的一个 $\lambda\delta-$覆盖。所以

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda F)\leqslant\sum|\lambda U_i|^s=\lambda^s\sum|U_i|^s$$

因为对任何 $\delta-$覆盖$\{U_i\}$都成立，所以

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda F)\leqslant\lambda^s\mathcal{H}^s_\delta(F)$$

令 $\delta\to0$，即得 $\mathcal{H}^s(\lambda F)\leqslant\lambda^s\mathcal{H}^s(F)$。用$\frac{1}{\lambda}$替代 λ，用 λF 替代 F 则得到需要的反向不等式。

对一般变换作用下集合的 Hausdorff 测度，类似的讨论给出了下面的基本估计。

定理 2 设 $F\subset R^n$，$f:F\to R^m$ 为一映射，使得对常数 $c>0$ 和 $\alpha>0$，有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant c|x-y|^\alpha\quad(x,y\in F)\tag{10.6.3}$$

则对每一 s

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F))\leqslant c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F)\tag{10.6.4}$$

证明 若$\{U_i\}$为 F 的 $\delta-$覆盖，因为 $|f(F\cap U_i)|\leqslant c|U_i|^\alpha$，故知$\{f(F\cap U_i)\}$为 $f(F)$的 $\varepsilon-$覆盖，这里 $\varepsilon=c\delta^\alpha$。于是 $\sum_i|f(F\cap U_i)|^{s/\alpha}\leqslant c^{s/\alpha}\sum_i|U_i|^s$，所以 $\mathcal{H}^{s/\alpha}_\varepsilon(f(F))\leqslant c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s_\delta(F)$。当 $\delta\to0$ 时，有 $\varepsilon\to0$，即得式(10.6.4)。

条件式(10.6.3)称为指数为 α 的 Hölder 条件，这是一个使 f 为连续的条件。特别重要的是 $\alpha=1$ 的情形，即

$$|f(x)-f(y)|\leqslant c|x-y|\quad(x,y)\in F$$

这时 f 称为 Lipschitz 映射，且有

$$\mathcal{H}^s(f(F))\leqslant c^s\mathcal{H}^s(F)$$

作为中值定理的一个推论，任何具有有界导数的可微函数都为 Lipschitz 映射。若 f 是保距的，即 $|f(x)-f(y)|=|x-y|$，则有 $\mathcal{H}^s(f(F))=\mathcal{H}^s(F)$。特别地，Hausdorff 测度是平移不变的(即 $\mathcal{H}^s(F+z)=\mathcal{H}^s(F)$，这里 $F+z=\{x+z\mid x\in F\}$)，而是是旋转不变的，这无疑是我们所期望的。

根据(10.6.1)式，容易看出对于任意给定的集 F 和 $\delta>1$，$\mathscr{H}_\delta^s(F)$ 对 s 是不增的，因此由(10.6.2)式，$\mathscr{H}^s(F)$ 也是不增的。若 $t>s$，且 $\{U_i\}$ 为 F 的 δ－覆盖，我们有

$$\sum_i |U_i|^t \leqslant \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

取下确界得，$\mathscr{H}_\delta^t(F) \leqslant \delta^{t-s}\mathscr{H}_\delta^s(F)$。令 $\delta\to 0$，可见，对于 $t>s$，若 $\mathscr{H}^s(F)<\infty$，则 $\mathscr{H}^t(F)=0$。因此必存在 s 的一个临界值使得 $\mathscr{H}^s(F)$ 从∞"跳跃"到 0。

定义 2 在定义 1 的意义下，如上所述，使 $\mathscr{H}^s(F)$ 从∞"跳跃"到 0 的临界值 s，称为 F 的 Hausdorff 维数，记为 $\dim_H F$。精确地

$$\dim_H F = \inf\{s \mid \mathscr{H}^s(F) = 0\} = sup\{s \mid \mathscr{H}^s(F) = \infty\}$$

$$\mathscr{H}^s(F) = \begin{cases} +\infty, & 若\ s < \dim_H F \\ 0, & 若\ s > \dim_H F \end{cases}$$

如果 $s=\dim_H F$，则 $\mathscr{H}^s(F)$ 可以为零或者无穷或者满足

$$0 < \mathscr{H}^s(F) < +\infty$$

满足最后这个条件的 Borel 集称为 s－集。在数学上经常遇到的集大都是 s－集。

例 1 设 F 为 R^3 中具有单位半径的半圆盘。于是由长度、面积和体积的性质知，$\mathscr{H}^1(F)=\text{length}\mathscr{H}^s(F)=+\infty$，$0<\mathscr{H}^2(F)=\frac{1}{4}\pi\times\text{area}(F)<+\infty$，$\mathscr{H}^3(F)=\frac{1}{6}\pi\times\text{Vol}(F)=0$，因而如果 $s<2$，则 $\mathscr{H}^s(F)<+\infty$；如果 $s>2$，则 $\mathscr{H}^s(F)=0$。所以 $\dim_H F=2$。

Hausdorff 维数满足下面的性质。

开集　若 $F\subset R^n$ 为开集，因 F 包含一个具有正 n 维体积的球，所以 $\dim_H F=n$。

光滑集　若 F 为 R^n 中的光滑(即连续可微)m 维流形(即 m 维曲面)，则 $\dim_H F=m$。特别地，光滑曲线维数为 1，光滑曲面维数为 2。

单调性　若 $E\subset F$，则 $\dim_H E\leqslant\dim_H F$。

可数稳定性　若 $F_1,F_2,\cdots$ 为一可数集序列，则 $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i=\sup_{1\leqslant i<\infty}\{\dim_H F_i\}$。

可数集　若 F 是可数的，则 $\dim_H F=0$。

定理 3 设 $F\subset R^n$，$f:F\to R^m$ 满足 Hölder 条件

$$|f(x) - f(y)| \leqslant c|x-y|^\alpha, \quad (x,y\in F)$$

则

$$\dim_H f(F) \leqslant \frac{1}{\alpha}\dim_H F$$

证明 若 $s>\dim_H F$，由定理 2 得 $\mathscr{H}^{s/\alpha}(f(F)\leqslant c^{s/\alpha}\mathscr{H}^s(F)=0$，这表示对所有的 $s>\dim_H F$ 有 $\dim_H f(F)\leqslant s/\alpha$。

推论 (1)若 $f:F\to R^m$ 是 Lipschitz 变换，则 $\dim_H f(F)\leqslant\dim_H F$；

(2)若 $f:F\to R^m$ 是双 Lipschitz 变换，即

$$c_1|x-y| \leqslant |f(x)-f(y)| \leqslant c_2|x-y|, (x,y\in F)$$

其中 $0<c_1\leqslant c_2<\infty$，则 $\dim_H f(F)=\dim_H F$。

证明 (1)中的结论在定理 3 中取 $\alpha=1$ 得到。利用这个结论到函数 $f^{-1}:f(F)\to F$，可得到满足(2)要求的另一方向不等式。

定理 4 集 $F\subset R^n$ 且 $\dim_H F<1$，则它是全不连通的。

证明 设 x,y 是 F 中不同的两点，定义映射 $f:R^n\to[0,+\infty)$，$f(z)=|z-x|$。因为 f 不增加距离，即 $|f(z)-f(w)|\leqslant|z-w|$，由推论(1)得 $\dim_H f(F)\leqslant\dim_H F<1$。于是 $f(F)$ 为 R 中 $\mathscr{H}^1$－测度或长度为零的子集，所以有稠密余集。选取 r 使 $r\overline{\in} f(F)$ 且 $0<r<f(y)$，则

$$F = \{z \in F \mid |z - x| < r\} \cup \{z \in F \mid |z - x| > r\}$$

所以 F 包括于两个不交开集中，而 x 与 y 分别属于其中之一，所以 x 与 y 在 F 的不同的连通区域内。证毕。

定理和推论揭示了 Hausdorff 维数的基本性质：Hausdorff 维数是双 Lipschitz 变换下的不变量。于是若两集有不同的维数，则两集之间不存在双 Lipschitz 映射。在分形几何中，如果两集之间存在双 Lipschitz 映射，则认为两集为"同一"的。Hausdorff 维数(及其他维数定义)提供了分形之间更进一步的特征区别。

下面通过一个例子，阐述 Hausdorff 维数的计算方法。

例 2 设 F 是三分 Cantor 集，若 $s=\log2/\log3=0.6309\cdots$，则 $\dim_H F=s$ 且 $\frac{1}{2}\leqslant\mathscr{H}^s(F)\leqslant 1$。

分析 Cantor 集分为左半部分 $F_L=F\cap\left[0,\frac{1}{3}\right]$和右半部分 $F_R=F\cap\left[\frac{2}{3},1\right]$。显然两部都几何相似于 F，比例系数为$\frac{1}{3}$，且 $F=F_L\cup F_R$ 为不交并。所以对任何 s，由 Hausdorff 测度的比例性质(1)即定理 1 得

$$\mathscr{H}^s(F) = \mathscr{H}^s(F_L) + \mathscr{H}^s(F_R) = \left(\frac{1}{3}\right)^s\mathscr{H}^s(F) + \left(\frac{1}{3}\right)^s\mathscr{H}^s(F)$$

假设在临界值 $s=\dim_H F$，我们有 $0<\mathscr{H}^s(F)<+\infty$，可以除以 $\mathscr{H}^s(F)$得到 $1=2\left(\frac{1}{3}\right)^s$ 或者 $s=\log2/\log3$。

计算 称 F 的构造中组成的集 E_k 的长度为 $3^{-k}(k=0,1,2,\cdots)$的区间为基本区间。E_k 中的长度为 3^{-k}的 2^k 个区间为 F 的一个覆盖$\{U_i\}$，由此得到，若 $s=\log2/\log3$，则 $\mathscr{H}^s_{3^{-k}}(F)\leqslant\sum|U|^s=2^k3^{-ks}=1$。令 $k\to+\infty$，得到 $\mathscr{H}^s(F)=1$。

为了证明 $\mathscr{H}^s(F)\geqslant\frac{1}{2}$，说明对 F 的任何覆盖$\{U_i\}$有

$$\sum|U_i|^s\geqslant\frac{1}{2}=3^{-s} \tag{10.6.5}$$

显然，只要假定$\{U_i\}$为区间就可以了。通过稍微的扩展，并且由 F 的紧性，只需在$\{U_i\}$为[0,1]中有限个闭子区间的情形下证明式(10.6.3)成立。事实上，对每一 U_i，设 k 为满足

$$3^{-(k+1)}\leqslant|U_i|<3^{-k} \tag{10.6.6}$$

的整数。由于基本区间的间隙至少是 3^{-k}，所以 U_i 最多可能与 E_k 的一个基本区间相交。若 $j\geqslant k$，由集的构造并利用式(10.6.5)，U_i 最多与 $2^{j-k}=2^j\cdot3^{-sk}\leqslant2^j3^s|U_i|^s$ 个 E_j 的基本区间相交。若我们选择充分大的 j 使得所有的 U_i 有 $3^{-(j+1)}\leqslant|U_i|$，则因为$\{U_i\}$与所有的 2^j 个长度为 3^{-j} 的基本区间相交，计算区间数目得到 $2^j\leqslant\sum_i 2^j3^s|U_i|^s$，简化得到式(10.6.5)。

Hausdorff 测度的计算通常是浅显的，但是即使是简单的集，维数的计数也可能比较复杂。通常维数的下界估计也很难得到。

在例中分析时提出的计算方法可以对很多自相似集的维数给出正确的结果。例如，Koch 曲线由与它相似的比例常数为$\frac{1}{3}$的四个部分组成，所以具有维数 log4/log3。更一般地，若 $F=\bigcup_{i=1}^m F_i$，其中 F_i 几何相似于 F 但比例系数为 c_i。假如 F_i 不互相重叠"太多"，则由分析讨论给出 $\dim_H F$ 为满足 $\sum_{i=1}^m c_i^s=1$ 中的 s 值。

三、维数的其它定义

要理解分形的数学机理，熟悉 Hausdorff 测度和维数是必要的。但由于分维是分形几何对象复杂性程度的度量，根据复杂性类型的不同，需要用不同定义的分维概念来表示，从不同角度刻划它的不规则性。因此除了前段介绍的 Hausdorff 维数外，本段继续讨论其它一些广泛应用的定义以及它们之间的内部联系。

大部分维数的定义都基于"用尺度 δ 进行量度"这样的思想，都用这样的方法进行测量；忽略尺寸小于 δ 时的不规则性，并且察看当 $\delta\to 0$ 时，这些测量值的状况如何。例如，当 F 是平面曲线，则测量值 $M_\delta(F)$ 可以用两脚距离长度为 δ 的两脚规度量整个 F 所需步数确定，而 F 的维数则由 $M_\delta(F)$ 服从的幂定律决定，即当 $\delta\to 0$，如果对常数 c 和 s，有

$$M_\delta(F) \sim c\delta^{-s}$$

则可以说 F 具有"维数"s，而 c 则可以看成是集 F 的"s—维长度"。取对数得

$$\log M_\delta(F) \simeq \log c - s\log\delta$$

在上式两端的差随 δ 趋于零而趋于零的意义下，有

$$s = \lim_{\delta\to 0}\frac{\log M_\delta(F)}{-\log\delta}$$

必须指出，决定一个维数定义是否可以被接受的因素更多的由经验和直觉确定。为确定一个量能否作为维数，通常是去寻找它的某种类型的比例性质；另外，应注意一些表面上很相似的维数定义，具有的性质可能差别很大，不应当假定不同的定义对同一个集合能给出相同的维数值，即使对很"规则"的集合也是如此。

计盒维数或称盒维数(Box—counting or Box dimension)是应用最广泛的维数之一，它的普遍应用主要是由于这种维数的数学计算及经验估计相对容易一些。对这种定义的研究可以追溯到三十年代，并且对它有各种各样不同称谓：Kolmogorov 熵、熵维数、容度维数、度量维数、对数密度和信息维数等等。我们将恒称它为盒维数或计盒维数以避免混乱。

定义 3 设 F 是 R^n 上任意非空的有界子集，$N_\delta(F)$是直径最大为 δ 可以覆盖 F 的集合的最小个数，则 F 的下、上计盒维数分别定义为

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \tag{10.6.7}$$

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \tag{10.6.8}$$

如果这两个值相等，则称这共同的值为 F 的计盒维数或盒维数，记为

$$\dim_B F = \lim_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \tag{10.6.9}$$

盒维数有一些等价的定义，有时这些定义更适合应用。考虑 R^n 中 δ—坐标网立方体，即下列形式的立方体

$$[m_1\delta,(m_1+1)\delta]\times\cdots\times[m_n\delta,(m_n+1)\delta]$$

其中 $m_1,\cdots,m_n$ 都是整数，设 $N'_\delta(F)$是 δ—网立方体与 F 相交的个数，显然这是 $N'_\delta(F)$个直径为$\delta\sqrt{n}$的覆盖 F 的集类，因此有

$$N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leqslant N'_\delta(F)$$

如果$\delta\sqrt{n}<1$，则

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log(\delta\sqrt{n})} \leqslant \frac{\log N'_{\delta}(F)}{-\log\sqrt{n}-\log\delta}$$

令 $\delta\to 0$，取下、上极限

$$\underline{\dim}_B F \leqslant \varliminf_{\delta\to 0}\frac{\log N'_{\delta}(F)}{-\log\delta} \tag{10.6.10}$$

$$\overline{\dim}_B F \leqslant \varlimsup_{\delta\to 0}\frac{\log N'_{\delta}(F)}{-\log\delta} \tag{10.6.11}$$

另一方面，任何直径最大为 δ 的集合包含在 3^n 个边长为 δ 的网立方体内（由包含这个集的一些点的一个立方体以及与此立方体相邻的全部立方体组成，因此

$$N'_{\delta}(F) \leqslant 3^n N_{\delta}(F)$$

取对数并取极限可以得与式(10.6.10)和(10.6.11)反向不等式。因此，为求出式(10.6.7)、(10.6.8)、(10.6.9)定义的盒维数，可以等价地取 $N_{\delta}(F)$ 为与 F 相交的边长为 δ 的网立方体的个数。

为计算一个平面集 F 的盒维数，我们可以构造一些边长为 δ 的正方形称为盒子，然后计算不同的 δ 值的“盒子”与 F 相交的个数 $N_{\delta}(F)$（计盒维数由此得名），这个维数是当 $\delta\to 0$ 时，$N_{\delta}(F)$ 增加的对数速率，或者可以由函数 $\log N_{\delta}(F)$ 相对于 $-\log\delta$ 图的斜率值来估计。

盒维数还可以有其他不同方式的等价定义，现概括定义如下。

定义 4 设 R^n 子集 F 的下、上盒维数由下两式给出：

$$\underline{\dim}_B F = \varliminf_{\delta\to 0}\frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log\delta} \tag{10.6.12}$$

$$\overline{\dim}_B F = \varlimsup_{\delta\to 0}\frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log\delta} \tag{10.6.13}$$

那末，若

$$\dim_B F = \lim_{\delta\to 0}\frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log\delta}$$

存在，则此极限值称为 F 的盒维数，其中 $N_{\delta}(F)$ 是下列五个数中的任一个：

(1)覆盖 F 的半径为 δ 的最少闭球数；

(2)覆盖 F 的边长为 δ 的最少立方体个数；

(3)与 F 相交的 δ—网立方体的个数；

(4)覆盖 F 的直径最大为 δ 的最少个数；

(5)球心在 F 上，半径为 δ 的相互不交的球的最多个数。

盒维数的下列基本性质反映了与 Hausdorff 维数类似的特点，同时也可以用许多同样的方法进行验证。

(1)R^n 上光滑的 m 维子流形 F，$\dim_B F=m$。

(2)$\underline{\dim}_B$ 与 $\overline{\dim}_B$ 是单调的。

(3)$\overline{\dim}$ 是有限稳定的，即

$$\overline{\dim}_B(E\cup F) = \max\{\overline{\dim}_B F, \overline{\dim}_B F\}$$

然而，$\underline{\dim}_B$ 没有这个性质。

(4)$\underline{\dim}_B$ 和 $\overline{\dim}_B$ 是 Lipschitz 不变的。这是因为，如果 $|f(x)-f(x)|\leqslant c|x-y|$，且 F 能被 $N_{\delta}(F)$ 个直径最大为 δ 的集覆盖，则在映射 f 之下，这 $N_{\delta}(F)$ 个集的象也组成 $f(F)$ 的一个直径最大为 $c\delta$ 的覆盖，因此 $\dim_B f(F)\leqslant\dim_B F$。类似地，盒维数也有象 Hausdorff 维数在双 Lip-

schitz 和 Hölder 变换下的性质。

应当指出，计盒维数也有不好性质，正是这种性质严格限制了盒维数的应用。尽管如此，盒维数不仅在实际上是方便的，而且在理论上也很有用，人们经常可以证明一些集的盒维数与 Hausdorff 维数相等。利用这两种维数的相互联系，可以在应用中产生很好的效果。

例 3 设 F 是三分 Caurtor 集，则

$$\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = \log 2/\log 3。$$

证明 由于 F 由 E_k 的 2^k 个长度为 3^{-k} 的区间所覆盖，如果 $3^{-k}<\delta\leqslant 3^{-k+1}$，则 $N_\delta(F)\leqslant 2^k$，由式(10.6.13)

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

另一方面，如果 $3^{-k-1}\leqslant\delta<3^{-k}$，任一长度为 δ 的区间最多与构造 F 中的一个长度为 3^{-k} 的基本区间相交，这样的区间有 2^k 个，所以为覆盖 F，至少需要长度为 δ 的区间 2^k 个，因此，$N_\delta(F)\geqslant 2^k$，即得 $\underline{\dim}_B F\geqslant\log 2/\log 3$。

因此，到少对于 Cantor 集，$\dim_H F=\dim_B F$。

例 4 $F=\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\}$ 是一个 $\dim_B F=\frac{1}{2}$ 的紧集。

证明 如果 $|U|=\delta<\frac{1}{2}$，k 是满足 $\frac{1}{k(k-1)}>\delta\geqslant\frac{1}{k(k+1)}$ 的整数，则 U 最多能覆盖 $\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{k}\}$ 中的一个点，因此覆盖 F 最少需要直径为 δ 的集 k 个，故

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \geqslant \frac{\log k}{\log k(k+1)}$$

令 $\delta\to 0$，得 $\underline{\dim}_B F\geqslant\frac{1}{2}$，而另一方面，如果 $\frac{1}{2}>\delta>0$，取 k 满足 $\frac{1}{k(k-1)}>\delta\geqslant\frac{1}{k(k+1)}$，则 $(k+1)$ 个长度为 δ 的区间覆盖 $\left[0,\frac{1}{k}\right]$，留下 F 的 $k-1$ 个总可以由另外 $k-1$ 个区间覆盖，则

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \leqslant \frac{\log(2k)}{\log k(k-1)}$$

故有 $\overline{\dim}_B F\leqslant\frac{1}{2}$，所以，$\dim_B F=\frac{1}{2}$。

这个集几乎每一点都是相互分离的，没有人把它看成是分形集，但它却有分数的盒维数。

§10.7 某些动力系统的浑沌现象的分析

一、Lorenz 方程

如何解释流体中的湍流现象，曾有多种数学方法的尝试。典型方法是把流体行为表示为微分方程的轨线，微分方程组又被设定依赖于一个参数 r，这个 r 参数常常相当于 Rayleigh 数或 Reynold 数，这种类型的分析，最引人注目的就是 1963 年 E. N. Lorenz 在大气科学杂志上提出的模型。

Lorenz 讨论的强迫耗散系统是

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x+\sigma y \\ \dot{y} &= -xz+rx-y \\ \dot{z} &= xy-bz \end{aligned}\right\} \tag{10.7.1}$$

这个常微分方程组是描述一个下部加热的流层中的幅流(amplitude convection),列出偏微分方程后,将未知函数展成 Fourier 级数,只留下三个系数不为零所得的结果。

在取式(10.7.1)中参数 $\sigma=10$,$b=8/3$ 时,Lorenz 从数值上发现当 Rayleigh 数超过一个临界值

$$r_2 = 24.74 \tag{10.7.2}$$

后,系统式(10.7.1)就出现浑沌动态;也就是说,所有的解不稳定,几乎所有的解是非周期的,虽然仍然有无穷多个不同周期的周期解。

设 X 是一个具有度量 $d(\cdot,\cdot)$ 的空间,$E\subset X$ 且令 $\tau:E\to X$,若 $C\subset E$,$\tau(C)=C$,则称集合 C 是不变的。

对于这个 τ 的不变集 C 来说,若对每一个 $\varepsilon>0$,有一个 $\delta\in(0,\varepsilon]$使当 $d(x,C)\leqslant\delta$ 时就有:对每一个正整数 n,$d(\tau^n(x),C)\leqslant\varepsilon$;也就是,当其开始时充分近于 C,它就始终近于 C 时,称 C 是稳定的,是 Liapunov 稳定的。

我们说 C 是吸引的或者说是一个"吸引子"(attractor),若对每一个充分近于 C 的 x,$\tau^n(x)$趋于 C,即当 $n\to\infty$时,

$$d(\tau^n(x),C)\to 0$$

这种仔细地把吸引从稳定分离开来的说法,是拓扑动态和动力系统研究的标准方法。早在1932年,A. Denjoy 在论述一个环面 T^2 上微分方程的例子时就强调了这种分开说法的必要性。在他的例子中,有一个非空连通紧不变集

$$C\neq T^2$$

它既不是一点,也不是一个周期轨道,但它是一个吸引子。所以,它是一个"奇异吸引子"(strange attractor)。一个奇异吸引子按 1971 年 D. Ruelle 与 F. Takens 的定义:奇异吸引子本质上是任一紧连通吸引集,它既不是一个静止点,也不是一个周期轨道,还不是任何维的一个曲面。不过,Deujoy 的例子是不稳定的奇异吸引子,Ruelle 与 Takens 的例子与 Guckenheiner 的例子都是稳定吸引子。现在讨论的 Lorenz 奇异吸引子也可能是稳定的,这样,后三种情况就可以统称为"奇异稳定吸引子"(Strange stable attractors).但是,由于没有大家都能接受的湍流的定义,所以很难说一个奇异吸引子的存在就能肯定湍流的存在。

不过,Ruelle 和 Takens 是识别出不规则行为和浑沌行为的一种起源。

如何描述不变集 C 上的 τ 出现浑沌,Kaplan 与 Yorke 更为严格的修改了 Lorenz 所欠缺的动态描述。

我们说,C 上的动态灵敏地依赖于初始条件,若在 C 中每一条轨线是 Liapunov 不稳定的,即使动态限于 C 也是如此。更清楚地说,对每一个 $x\in C$,有一个 $\varepsilon>0$ 和一个序列$\{y_i\}\subset C$ 使 $y_i\to x$ 且对每个 y_i 有一个正的 $n(=n(i))$使

$$d(\tau^n(y_i),\tau^n(x))>\varepsilon \tag{10.7.3}$$

这样的描述显然和我们在§10.2 的说明相一致,而且式(10.7.3)正是李天岩—James A. Yorke 定理中式(10.3.9)关系。这里 Yorke 又一次用 Liapunov 不稳定性与他 1975 的工作衔接起来。

一个紧不变集 C 是浑沌的(chaotic),若 C 是固有的不稳定且在 C 中有一个稠轨道,即集合

$$\{\tau^n(x)\mid n=1,2\cdots\}=T$$

的闭包是 C。事实上,$C\backslash T$ 常常是无穷个排斥周期点,不加这个条件等于把浑沌定义推广。

若 C 有千个稠轨道，则 C 的"最大多数"(most)点有稠轨道，这里的"最大多数"解释为"贝利类"(baire category)的拓扑意义。马蹄形例子所含的浑沌集既不是稳定也不是吸引的，Lorenz 系统的"预湍流"参数值也有一个显然是不稳定、不吸引的浑沌集。

关于式(10.7.1)中的给定 r，对于任一个初始点 p，定义 $\sigma(p)$ 是 $x(t)$ 符号改变的个数，$x(t)$ 是解表示角速度的坐标。它本质上就是计算轨道符合绕一临界点振荡到绕另一临界点振荡的次数。对于不同的 r 值，我们从近于非吸引浑沌集的范围随意选很多点，结果突出表现出不同，当 r 是很大的时候

$$22 < r < r_1, r_1 \approx 24.06 \qquad (10.7.4)$$

在随机选一些点的时候，很多的 $\sigma(p)$ 是 0 或 1，也有一些其它的点产生 $\sigma(p)$ 的大值，除了那些 $\sigma(p)$ 是 0 或 1 的点之外，其余的情况是按一种离散指数分布，其均值显出当 $r \to r_1$ 时趋向无穷。而在 $r=23$ 时，这些 $\sigma(p)$ 值的平均总是超过 100，但是，当 r 近 24 时，要得到统计所需的时间变成很难捉摸，而在这个范围却是最值得研究的。

当 r 稍小于 24.06 时，试验表出一种"亚稳定浑沌"(metastable chaos)。也就是，浑沌行为保持一个很长的时间，Yorke 称这种试验出现的预湍流状态是一种内中包括两个稳定吸引点和一个浑沌振荡的其它部分，看起来好似轨线作用停留在浑沌范围有一半部分；如果一个轨线在 T 时间中观察到是处于浑沌状态，它一点不说明有多长时间它还停留在浑沌范围。

当 $r \to r_1$ 时，在围绕奇异集合的亚稳定浑沌区域的视范围中有小小变化，当 $r<r_1$ 时，在浑沌域中几乎每一点最终将被吸收到一个吸引临界点，前面振荡的平均数很大；当 r 超过 r_1 时，平均时间变为无穷，突然间病态浑沌域变成奇异吸引子的吸引域。

Lorenz 提出 $r=24.74$ 时过渡到湍流，是因为这是非零静止点的两个吸引域消失存在的临界点。

1979 年，两位 Yorke 用 $r=22$ 研究式(10.7.1)的解在 $x(t)$ 的表现，出现从过渡浑沌行为突然转变为振荡衰变为平衡点 $x=\pm[(r-1)(8/3)]^{1/2}$ 的模式。平均来说，浑沌行为在 60 次振荡后转变为阻尼行为。对于较大一些的 $r<r_1 \simeq 24.06$，浑沌行为保留得长些，当 $r=23.0$ 时，可以平均振荡 300 次才衰变(图 10.36)。

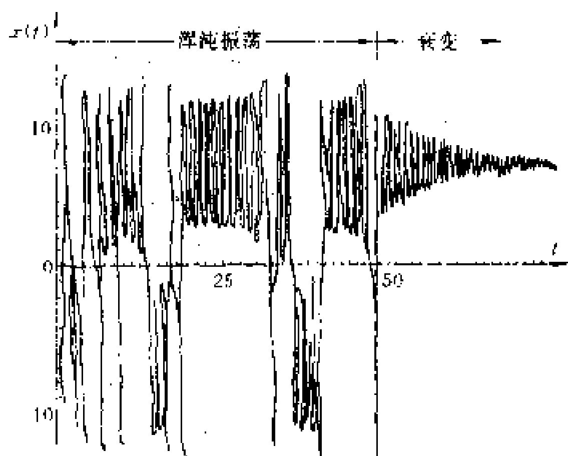


图 10.36

Lorenz 也曾将系统设法转变为一个标量函数来研究，他的第一个办法就是在 R^3 中指出有一个椭球，使每一条轨线最终要穿过而进球内，一旦在里面以后并一直留在里面。也就是，椭球在微分方程下是"正向不变的"(positively invariant)。令 $\Phi(p,t) \in R^3$ 表示开始在 $p \in R^3$，t 时后(10.7.1)解在 R^3 中的位置。对于一个集合 $S \subset R^3$，记

$$\Phi(S,t) = \{\Phi(p,t) \mid p \in S\} \qquad (10.7.5)$$

用 Vol(S)表示 S 的三维体积，Lorenz 观察(10.7.1)右边是常数 $-(\sigma+b+1)$ 的发散情况，所以

$$\mathrm{Vol}[\Phi(S,t)] = \exp[-t(\sigma+b+1)] \cdot \mathrm{Vol}(S) \qquad (10.7.6)$$

设 E 是上述正向不变椭球，由于当 t 是正时，$\Phi(E,t) \subset E$，所以有

$$\Phi(E,t_1) \subset \Phi(E,t_2), (若\ t_1 > t_2 > 0)$$

在 t 趋向无穷时，每一条轨线渐近趋向极限集

$$E_{\infty}=\bigcap_{t>0}\Phi(E,t)$$

从式(10.7.6)得知这个集合体积为零。

当 $r>r_0\simeq 13.9$ 时，E_{∞} 的形状特别复杂，而当 $r>r_0$ 时，E_{∞} 包含有一些轨线，它永远是非周期的振荡。当 $r\simeq r_1\simeq 24.06$，数值试验中反映出的振荡的平均时间可渐近于 2/3。考虑系统的这种特征，对应的体积压缩因子是

$$\exp\left[-\left(\frac{2}{3}\right)\left(10+\frac{8}{3}+1\right)\right]\approx 0.00013$$

所以，在一般关注的范围中任何初始点的轨线迅速趋向集合 E_{∞}。

Lorenz 还将式(10.7.1)经过数值解，相当任意性的，选 $z(t)$ 坐标的相继峰值。用 M_n 表示 $z(t)$ 的第 n 个极大值，他描下相继的序对 (M_n,M_{n+1})，发现它们落在一个很尖的峰型的曲线上，一种 Λ 型曲线，在湍流 z 舍入误差范围内，发现一种很明显的 M_n 与 M_{n+1} 之间的二对一关系，也就是图示显示出一种函数

$$M_{n+1}=\Lambda(M_n)=\Lambda(r,M_n) \qquad (10.7.7)$$

这种关系当然无法严格成立，但是这种差别是非常小的。如图 10.37 表示 $r=24.06$ 取样 2000 个峰值所得结果。差不多每一个浑沌轨道线所取 z 的峰值都描出同一曲线。

图 10.37

这和我们在 §10.8 中所介绍的方法是一样的，它的根据就是：动态映射的离散表示是和这种数值关系十分接近的。

在 $r<r_1$ 时，我们不能仅有单一的轨线就产生出整个图形，因为超过某时刻以后，轨线将趋于一个常数，所以序对 (M_n,M_{n+1}) 渐近趋向 $(r-1,r-1)$。要详细描出 $\Lambda(r,M_n)$ 的图示，应选一些初始点，然后选 35～45 对极大值。图 11-37 就是 $r=22$ 的一种典型情况，排除开始的一些极大，相继的极大都是从数据曲线非常不规则的振荡部分选得的。然后用形如

$$\lambda(M)=z_{\max}-A_1|M-M_0|^{\beta}(1+A_2|M-M_0|+A_3|M-M_0|^2) \qquad (10.7.8)$$

来粘合一条曲线表出 $\lambda(M)$，式(10.7.8)中的 A_1,A_2,A_3,β 和 M_0 都是用最小二乘方法求得，$z_{\max}$ 是从相当近(0,0,0)的一点开始所选出的第一个极大值。

二、虫口偏微分方程的浑沌解

1981 年，A. Lasota 成功的对虫口(Cell population)一阶非线性偏微分方程给出稳定解和浑沌解。这位波兰学者 A. Lasota 曾与美国 Maryland 大学专门从事于浑沌研究多年的 James A. Yorke 合作写过多篇相关的文章，所以，他对浑沌分析的思路也与 Yorke 的研究方法相一致。1983 年，捷克 Pavol Brunovsky 就 Lasota 的证明方法与结果做了修改和发展。

我们曾在 §10.2 中初步介绍了虫口偏微分方程的浑沌解问题，A. lasota 所研究的偏微分方程是

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c(x)\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,u) \qquad (10.7.9)$$

$$(t,x)\in D=[0,+\infty)\times\Delta,\Delta=[0,1]$$

这个方程描述了虫口的一些类型的生长繁殖动态，特别是红血球细胞的生长动态，就 c 和 f 的一些很自然的条件下，方程式(10.7.9)在 $\Delta=[0,1]$ 上的非负连续函数空间 $C_+(\Delta)$ 中，生成一

种半流(semiflow)S_t，$t\geqslant 0$。它有一个不变集 V_ω，在这个不变集上，S_t 轨线的行为是浑沌的，也就是在 V_ω 中 S_t 有一个稠轨道，而且 V_ω 的每一点是不稳定的，即对每一点 $v\in V_\omega$，有一个邻域：$S_{(0,\infty)}v$ 在 $C(D)$ 中的邻域 U 和一个序列 $v_n\to v$，使 v_n 的轨道对某 $t>0$ 将离开 U。

Brunovsky 给出与 Lasota 一样的四种假定：

(1)函数 c,f 是连续可微的；

(2)$c(0)=0$，且当 $x>0$ 时，$c(x)>0$；

(3)存在一个 $u_0\in(0,1]$ 使 $f_u(0,u_0)<0$，且在 $u>0$，$u\neq u_0$ 时，$f(0,u)(u-u_0)<0$；

(4)对某 $k_1,k_2\geqslant 0$ 及所有 $x\in\Delta$，$u\geqslant 0$，$f(x,u)\leqslant k_1u+k_2$。

而把 Lasota 的假设

(5)′当 $x\in\Delta$ 时，$f(x,0)\geqslant 0$，且 $f(0,0)=0$ 改为

(5)对所有的 $x\in\Delta$，$f(x,0)=0$。

非常重要的一点，Brunovsky 文章特别指出：在只有(5)′而没有(5)时，S_t 就不是在整个 V_ω 中形成浑沌。

事实上，如果模型式(10.7.9)是具有增殖率 p 的一种再生，经常在分化生长的虫口时，例如

$$f(x,u)=(p(x,u)-c(x))u \tag{10.7.10}$$

就有(5)出现。

在(1)～(4)、(5)′的假定下，Lasota 已经证得以下四个结论：

(1)当 $G\subset R^n$，$n>0$ 时，用 $C_+(G)$，$C^1_+(G)$ 表示所有在 G 上非负连续函数的集合与所有在 G 上非负连续可微函数的集合。对每一个 $v\in C^1_+(\Delta)$，式(10.7.9)在 $C^1_+(D)$ 中有唯一解，满足

$$u(0,x)=v(x)，(\text{当 } x\in\Delta \text{ 时}) \tag{10.7.11}$$

一个函数 $u\in C_+(D)$ 称为式(10.7.9)的广义解，如果它是式(10.7.9)解的一个极限，这个极限在 D 的紧子集上是一致的，对每一个 $v\in C_+(\Delta)$，都有(10.7.9)的唯一广义解满足式(10.7.11)。

所以，对 $v\in C_+(\Delta)$ 讨论可以略去"广义"二字。

对于满足式(10.7.9)和式(10.7.11)的 u，用

$$S_tv(x)=u(t,x)$$

定义的映射

$$S:[0,\infty)\times C_+(\Delta)\to C_+(\Delta) \tag{10.7.12}$$

是一个连续半流，即对每一个 $t\geqslant 0$，

$$S_t:C_+(\Delta)\to C_+(\Delta) \tag{10.7.13}$$

是连续的，而且

$$S_0=id \tag{10.7.14}$$

对每对 $t,s\geqslant 0$，有

$$S_t\cdot S_s=S_{t+s}。$$

(2)满足初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=c(x) \tag{10.7.15}$$

的解曲线

$$x=\varphi(t;t_0,x_0) \tag{10.7.16}$$

称为式(10.7.9)的特征线,沿着这条特征线,式(10.7.9)满足初始条件

$$y(0) = v(\varphi(0;t_0,x_0)) \tag{10.7.17}$$

的常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(\varphi(t;t_0,x_0),y) \tag{10.7.18}$$

的解 $u(t,x)$。经过式(10.7.17)、(10.7.18)的解的表示方法

$$\Psi(t,\varphi(0;t_0,x_0),v(\varphi(0;t_0,x_0))$$

式(10.7.9)、(10.7.11)的解就可以表示为

$$u(t,x) = \Psi(t;\varphi(0,t_0,x_0),v(\varphi(0;t,x)) \tag{10.7.19}$$

特别是,若将 $\varphi(t;0,x)$ 写成 $\varphi_x(t)$,则从条件(2)得知

$$\varphi_0(t) = 0$$

在 $x>0$ 时,$\varphi_x(t)$ 对 t,x 都是严格上升,而在 $0<x\leqslant 1$ 时,$\varphi_x^{-1}(t)$ 良义,且是连续下降的函数。

(3)平稳方程

$$c(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f(x,u), x \in \Delta \tag{10.7.20}$$

有一个唯一解 $w_0(x)$ 满足 $w_0(0)=u_0$,对每一个使 $v(0)>0$ 的 $v\in C_+(\Delta)$,有对 x 一致的有

$$S_t v(x) \to w_0(x), t \to \infty \text{ 时} \tag{10.7.21}$$

(4)设

$$V_0 = \{v \in C_+(\Delta) | v(0) = 0\} \tag{10.7.22}$$

$$V_w = \{v \in V_0 | v(x) < w_0(x), x \in \Delta\} \tag{10.7.23}$$

集合 V_0,V_w 是对 S_t 不变的,而且对每一个 $v\in V_0$ 有一个 $T_0\geqslant 0$,使当 $t>T_0$ 时

$$S_t v \in V_w \tag{10.7.24}$$

在(1)~(4)结论的基础上,Brunovsky 再提出两点直接推论:

(5)由于对所有 $t\geqslant 0$,$\varphi_0(t)=0$,故从式(10.7.19)得知式(10.7.9)、(10.7.11)的解将在

$$D^0 = [0,\infty) \times \Delta^0, \quad \Delta^0 = (0,1].$$

对 $v\in C_+(\Delta^0)$ 良义,换句话说,半流 S_t 可以扩张到 $C_+(\Delta^0)$,用 S_t^0 表示这种扩张的半流。

(6)由于 $u(t,x)$ 是一阶常微分方程沿每一个特征线的解,故从式(10.7.19)得知半流 S_t 保序,也就是当 $t\geqslant 0$ 时,若 $v_1\leqslant v_2$,则

$$S_t v_1 \leqslant S_t v_2 \tag{10.7.25}$$

其中 $v_1\leqslant v_2$ 表示对所有 $x\in\Delta$,$v_1(x)\leqslant v_2(x)$,这个结论对 S_t^0 也成立。

随后,Brunovsky 又证明了 V_w 是 S_t 的浑沌不变集。

1. 周期点的存在及其在 V_w 中稠

首先,我们在 $C_+[0,\infty)$ 中用移位半群来表示 S_t,这种表示是由映射

$$\Phi: C_+(\Delta) \to C_+[0,\infty) \tag{10.7.26}$$

定义 $\quad v \mapsto \Phi(v)(t) = (S_t v)(1) = u(t,1)$

用式(10.7.19),可以将 Φ 表示为

$$\Phi(v)(t) = \Psi(t;\varphi(0;t,1),v(\varphi(0;t,1))) \tag{10.7.27}$$

$t\geqslant 0$ 的移位映射簇下 T_t 就定义为

$$(T_t g)(s) = g(t+s), g \in C_+[0,\infty) \tag{10.7.28}$$

它是一个半群,故有

$$T_t\Phi = \Phi S_t, \qquad \begin{array}{ccc} & S_t & \\ \Phi\downarrow & & \downarrow\Phi \\ & T_t & \end{array} \tag{10.7.29}$$

事实上，

$$(T_t\Phi(v))(s) = \Phi(v)(s+t) = (S_{t-s}v)(1)$$
$$= (S_sS_tv)(1) = \Phi(S_tv)(s)$$

我们可以将 Φ 扩张为 $C_+(\Delta^0)$上的映射 Φ_0，定义为

$$\Phi_0(v)(t) = (S_t^0v)(1)$$

则用 S_t^0,Φ_0 分别代替式(10.7.29)中的 S_t,Φ 以后，交换式仍成立。

设 $g\in C_+[0,\infty)$，从式(10.7.19)立即得知

$$\Phi_0(v) = g \text{ 当且仅当 } v(x) = \Psi(-\varphi_x^{-1}(1);1,g(\varphi_x^{-1}(1))), x\in\Delta^0 \tag{10.7.30}$$

再用关于式(10.7.25)的论证，从条件的设定与式(10.7.30)得

$$v(x) \geqslant \Psi(-\varphi_x^{-1}(1);1,0) = 0$$

所以有

(1)映射 $\Phi_0:C_+(\Delta^0)\to C_-[0,\infty)$有一个逆，表为式(10.7.30)，还可以证明：

(2)设 $v\in C_+(\Delta)$满足 $v(0)>0$，则 $t\to 0$ 时

$$\Phi(v)(t) \to w^c(1)$$

(3)设 $g\in C_+[0,\infty)$，且对某 $\eta>0$ 与每一个当 $t\geqslant 0$ 有

$$g(t) \leqslant w_0(1) - \eta \tag{10.7.31}$$

则 $g\in\Phi(V_w)$。

由于当 $g\in C_+[0,\infty)$在$[0,w_0(1))$中有周期值时，总有 $\eta>0$ 使式(10.7.31)成立，从而 $g\in\Phi(V_w)$，所以函数 $g\in C_+[0,\infty)$具素周期 $\tau\geqslant 0$ 值在$[0,w_0(1))$为周期当且仅当 $\Phi^{-1}(g)$是 S_t 在 V_w 具基础周期 τ 的一个周期点。也就是有

第一个肯定：对每一个 $\tau\geqslant 0$，有基础周期 τ 的，S_t 在 V_w 中周期点的分布。

另外，对任一个 $c\geqslant 0$，可用 C 表示在 Δ 上取值 c 的常数函数，且

$$h_c(t) = \Phi(C)(t)$$

设 $\delta>0$ 是使当 $x<\delta$ 时，$v(x)<\varepsilon$ 者，则可证明 $z\in V_w$ 使当 $\delta\leqslant x\leqslant 1$ 时

$$z(x) = v(x)$$

并且有

$$|z(x)-v(x)| \leqslant |z(x)| + |v(x)| \leqslant 2\varepsilon, 0\leqslant x\leqslant\delta$$

所以得到

第二个肯定：S_t 的所有周期的集合在 V_w 中稠。

2. 稠轨线的存在性

在上述论证中，已得 V_w 是 S_t 的一个不变集，即

$$S_t:V_w\to V_w$$

且在 V_w 中有 S_t 的无穷多个周期点，它们在 V_w 中稠。

现在还要证明，有一条稠轨线在 V_w 中稠分布，且对每一点 $v\in V_w$ 的不稳定性则是当然的。

设$\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$是V_w是一个稠子集，且设当$n\to\infty$时，$\epsilon_n\searrow 0$。用$g_n=\Phi(v_n)$表示，则有一个序列$\{t_n\}$使$t_1=0, t_{n+1}\geqslant t_n+1$，当$0\leqslant j\leqslant n$时，

$$h_{\epsilon_j}(t_{n+1}-t_n)\geqslant \epsilon_{j+1}(=h_{\epsilon_{j+1}}(0))$$

对所有t及所有$1\leqslant j<n$

$$g_n(t)\leqslant h_{\epsilon_j}(t+t_n-t_j) \tag{10.7.32}$$

且对所有$t\geqslant 0, g_n(t)\leqslant h_{\epsilon_n}(t+t_n)$。注意到，可以找出一个连续函数序列

$$\widetilde{g}_n\in C_+[0,t_{n+1}-t_n]$$

使

$$\widetilde{g}_n(t)=g_n(t), 0\leqslant t\leqslant t_{n+1}-t_n-1$$

$$\widetilde{g}_n(t_{n+1}-t_n)=g_{n+1}(0)$$

则用$\widetilde{g}_n$代表g_n，而t限制在$t_{n+1}-t_n$时，式(10.7.32)仍成立。

我们规定，$k\in C_+[0,\infty)$，$0\leqslant t<\infty$时$k(t)<w_0(1)$，而且当$t_n\leqslant t\leqslant t_{n+1}$时，$k(t)\leqslant h_{\epsilon_n}(t)$，从式(10.7.30)有

$\Phi_0^{-1}(k)(x)\leqslant\epsilon_n$，当$\varphi(0,t_{n+1},1)\leqslant x\leqslant\varphi(0,t_n,1)$，故$\lim\limits_{x\to 0}\Phi_0^{-1}(k)(x)=0$，且对某$z\in V_w$，$k\in\Phi(z)$。

现在，我们有

$$(T_{t_n}k)(t)=g_n(t)，当\ 0\leqslant t\leqslant t_{n+1}-t_n-1 \tag{10.7.33}$$

$$(T_{t_n}k)(t)\leqslant h_{\epsilon_n}(t)，当\ t\geqslant t_{n+1}-t_n-1 \tag{10.7.34}$$

从而有

$$(S_{t_n}z)(x)=v_n(x)，当\ \varphi(0;t_{n+1}-t_n-1,1)\leqslant x\leqslant 1$$

$$(S_{t_n}z)(x)\leqslant\epsilon_n，当\ 0\leqslant x\leqslant\varphi(0;t_{n+1}-t_n-1,1).$$

所以，从式(10.7.32)得

$$v_n(x)\leqslant\epsilon_n，当\ 0\leqslant x\leqslant\varphi(0;t_{n+1}-t_n-1,1)$$

故对所有$x\in\Delta$，

$$|(S_{t_n}z)(x)-v_n(t)|\leqslant 2\epsilon_n \tag{10.7.35}$$

这表明z构成一个稠轨线。

Lasota 与 Brunovsky 所处理的虫口方程很容易在其他邻域出现。这里不作介绍。

三、受热板的浑沌振动

受热板的非线性振动一直受到科学和技术界的重视。根据浑沌振动研究的发展以及浑沌研究由单自由度系统向多自由度系统和连续系统发展的这一趋向，现在我们研究受热板的浑沌振动问题。

1．基本假设

(1)板的材料是各向同性、均质的线弹性材料；

(2)忽略板挠曲振动中的转动惯性和剪切效应；

(3)板的厚度是很小的；

(4)板的性能参数 E、G、α、λ 是与温度无关的常数；

(5)温度场与应变场互不耦合；

(6)温度 $T(x,y,t)$不随板的厚度变化而变化；

(7)板中温度低于板的屈曲温度。

2. 基本方程

$$\left.\begin{aligned}&D\nabla^4 W+\rho h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\alpha(1-v)D\nabla^2 M_T\\&-hL(\varphi,W)+\delta\frac{\partial W}{\partial t}=P\cos\tilde{\omega}t\\&\nabla^4\varphi+E\alpha\nabla^2 N_T=-\frac{1}{2}EL(W,W)\end{aligned}\right\}\tag{10.7.36}$$

其中 $L(\varphi,W)\triangleq\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$

$\nabla^2\triangleq\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$

$M_T-\frac{12}{h^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}T(x,y,t)z\mathrm{d}z=0$

$N_T=\frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}T(x,y,t)dz=T(x,y,t)$

相应的无量纲方程是

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^4\overline{W}+\frac{\partial^2\overline{W}}{\partial\Omega^2}-12(1-v^2)\overline{L}(\Psi,\overline{W})+\bar{\delta}\frac{\partial\overline{W}}{\partial\Omega}=\overline{P}\cos\frac{\tilde{\omega}}{\omega_0}\Omega\\&\nabla^4\Psi+\frac{1}{2}\overline{L}(\overline{W},\overline{W})+\nabla^2\overline{N}_T=0\end{aligned}\right\}\tag{10.7.37}$$

其中$\nabla^2\triangleq\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$，$\overline{L}(\overline{W},\overline{W})=2\left[\frac{\partial^2\overline{W}}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\overline{W}}{\partial\eta^2}-\left(\frac{\partial^2\overline{W}}{\partial\xi\partial\eta}\right)^2\right]$，$\xi=\frac{x}{a}$，

$\eta=\frac{y}{a}$，$\overline{W}=\frac{W}{h}$，$\bar{u}=\frac{u}{a}$，$\bar{v}=\frac{v}{a}$，$\lambda=\frac{a}{b}$，$c=\frac{a}{h}$，

$\Omega=\omega_0 t=t\left[\frac{D}{\rho h a^4}\right]^{1/2}$，$\overline{N}_T=\frac{N_T a^2\alpha}{h}$，$\Psi=\frac{\varphi}{Eh^2}$，

$\bar{\delta}=\frac{\delta\omega_0 a^4}{D}$，$\overline{P}=Pa^4/(Dh)$。

3. 周边固支受热板非线性振动控制方程的分析

(1)边界条件

$$\left.\begin{aligned}&x=a,x=0,W=\frac{\partial W}{\partial x}=0\\&y=0,y=b,W=\frac{\partial W}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\tag{10.7.38}$$

中面条件

$$\left.\begin{aligned}&x=0,x=a,u=v=0\\&y=0,y=b,u=v=0\end{aligned}\right\}\tag{10.7.39}$$

相应的等效条件为

$$\int_0^1\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2}-v\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}+\overline{N}_T-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{W}}{\partial\xi}\right)^2\right]d\xi=0\tag{10.7.40}$$

$$\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}-v\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2}+N_T-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{W}}{\partial\eta}\right)^2\right]\mathrm{d}\eta=0\tag{10.7.41}$$

$$\int_0^{\frac{1}{\lambda}}\int_0^1\left[2(1+v)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial\overline{W}}{\partial\xi}\frac{\partial\overline{W}}{\partial\eta}\right]d\xi d\eta=0 \tag{10.7.42}$$

(2)使用 Galerkin 方法求解方程(10.7.36)

设 $\overline{W}^0=\overline{W}_nA(\Omega)\sin^2\pi\xi\sin^2\pi\lambda\eta$

$$\left(\overline{W}_n=\overline{W}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2\lambda},0\right)\right) \tag{10.7.43}$$

$$T(x,y,t)=R_r sin^2\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\ (R_r=const) \tag{10.7.44}$$

于是

$$\overline{N}_T=\left[\frac{a^2\alpha R_r}{h^2}\right]\sin^2\pi\xi\sin^2\pi\lambda\eta\triangleq\overline{W}_n c\sin^2\pi\xi\sin^2\pi\lambda\eta \tag{10.7.45}$$

其中 $c=\text{const}$，将式(10.7.45)代入(10.7.36)，可得

$$\begin{aligned}\nabla^4\Psi=&(H_1-H_2)\cos2\pi\xi+(H_1-\lambda^2H_2)\cos2\pi\lambda\eta\\&+(-2H_2+(1+\lambda^2)H_2)\cos2\pi\xi\cos2\pi\lambda\eta\\&-H_1\cos4\pi\xi-H_1\cos4\pi\lambda\eta+H_1\cos2\pi\xi\cos4\pi\lambda\eta\\&+H_1\cos4\pi\xi\cos2\pi\lambda\eta\end{aligned} \tag{10.7.46}$$

其中 $H_1=\left(\frac{1}{2}\right)\overline{W}_n^2\pi^4\lambda^2A^2,H_2=\overline{W}_n\pi^2c$

设式(10.7.46)的非齐次特解是

$$\Psi_p=\sum R_{mn}\cos2m\pi\xi\cos2n\pi\lambda\eta \tag{10.7.47}$$

将上式代入式(10.7.46)，可得

$$R_{10}=\frac{H_1-H_2}{(2\pi)^4},R_{01}=\frac{H_1-\lambda^2H_2}{(2\lambda\pi)^4}$$

$$R_{11}=\frac{(1+\lambda^2)H_2-H_1}{(2\pi)^4(1+\lambda^2)^2}$$

$$R_{20}=\frac{-H_1}{(2\pi)^4},R_{02}=\frac{-H_1}{(4\pi\lambda)^4}$$

$$R_{12}=\frac{H_1}{(2\pi)^4(1+4\lambda^2)^2}$$

$$R_{21}=\frac{H_1}{(2\pi)^4(4+\lambda^2)^2}$$

级数式(10.7.47)中其它诸项皆为 0，方程式(10.7.46)的齐次通解是

$$\Psi_c=H_3\left(\eta-\frac{1}{2\lambda}\right)^2-H_4\left(\xi-\frac{1}{2}\right)\left(\eta-\frac{1}{2\lambda}\right)+H_5\left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2 \tag{10.7.48}$$

其中

$$H_3=\frac{3(v\lambda^2+1)}{16(1-v^2)}\overline{W}_n^2\pi^2A^2-\frac{\overline{W}_nc}{2(1-v)}$$

$$H_4=0$$

$$H_5=\frac{3(v+\lambda^2)}{16(1-v^2)}\overline{W}_n^2\pi^2A^2-\frac{\overline{W}_nc}{2(1-v)}$$

它们都是由式(10.7.40)、(10.7.41)、(10.7.42)导出的，于是式(10.7.46)的解是

$$\Psi=\Psi_p+\Psi_c \tag{10.7.49}$$

将式(10.7.43)和式(10.7.39)代入式(10.7.36),并用 Calerkin 方法解之,可得 A 的方程为

$$\ddot{A}+\delta\dot{A}+K_1A+K_2A^3=\frac{16\overline{P}}{9\overline{W}_n}\cos\frac{\widetilde{\omega}}{\omega_0}\Omega \tag{10.7.50}$$

其中 $\dot{A}=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\Omega},\ddot{A}=\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}\Omega^2}$

$$K_1=\frac{16}{9}\pi^4(3+2\lambda^2+3\lambda^4)-\frac{4\overline{W}_n\pi^2c}{3(1+v^2)}[(1+v^2)(5-2v)+6\lambda^2(2-v)]$$

$$K_2=\frac{8\pi^4\overline{W}_n^2(1-v^2)}{3}\left[\frac{9(1+2v\lambda^2+\lambda^4)}{16(1-v^2)}+\frac{v^4}{(1+v^2)^2}+\frac{17}{32}(1+\lambda^4)+\lambda^4\frac{17(1+\lambda^4)+16\lambda^2}{4(1-4\lambda^2)^2(4+\lambda^2)^2}\right]$$

方程式(10.7.50)是一个 Duffing 型非线性微分方程,它的解可有复杂的性状,但在一般情形下无法求得其精确解。

4. 受热板的浑沌振动

由于无法求取方程式(10.7.50)的解,只得通过具体数例来阐明之。

设板的材料是高强度铝合金。

$$\begin{aligned}&E=69.6297\text{GPa},\rho=2.78\times10^3\text{kg/m}^3\\&\alpha=22.7\times10^{-6}\text{C}^{-1},\mu=0.3\\&a=0.50\text{m},\lambda=0.5,h=0.01\text{m}\\&\overline{W}_n=0.1651,P=1.7457\times10^5\text{Pa}\\&\delta=233\text{Pa}\cdot\text{sm}^{-1},R_r=326.69\text{C}\\&f=\frac{\widetilde{\omega}}{2\pi}=26.77\text{Hz}\end{aligned} \tag{10.7.51}$$

于是可得 $K_1=0$,方程式(10.7.50)成为

$$\ddot{A}+\bar{\delta}\dot{A}+K_2A^3=\frac{16\overline{P}}{9\overline{W}_n}\cos\frac{\widetilde{\omega}}{\omega_0}\Omega \tag{10.7.52}$$

设 $\Lambda=\frac{\widetilde{\omega}\Omega}{\omega_0},X=\sqrt{K_2}\omega_0A/\widetilde{\omega}$,且因 $\omega_0\bar{\delta}/\widetilde{\omega}=0.0498$,$\sqrt{K_2}\omega_0^3\cdot16\cdot\overline{P}/(\widetilde{\omega}^3\cdot9\cdot\overline{W}_2)=7.5089$,于是方程式(10.7.50)归约为

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}\Lambda^2}+0.0498\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\Lambda}+X^3=7.5089\cos\Lambda \tag{10.7.53}$$

Duffing 型方程 $\ddot{x}+\delta\dot{x}+x^3=H\cos t$ 又叫 Hajashi 方程。它的动力学性状已由 Ueda(1980)很好地研究过,已知在一定参数条件下该系统可以发生浑沌振动,并在参数平面(H,δ)上对系统动力学性状作了完整研究,画出了各种类型运动之间的分界线。据此可查出在系统式(10.7.53)中是可以发生浑沌振动的。

对于系统式(10.7.53),浑沌研究的关键是要核实这个论断。因此对于该系统就不需按常规分析那样,分三、四种途径分别进行判定。为了具体核实只需采取一种途径就可以了。另一方面,在对 Hajashi 方程研究中,还未见有从分维方面进行研究的,因此本节采用分维方法研究系统式(10.7.53)。这样,以下这部分工作既是前人工作的核实,又是前人工作的补充,而不是前人工作的重复。下面对式(10.7.53)作 Poincaré 映射和分维计算。

研究式(10.7.53)的相平面$(X(\Lambda),Y(\Lambda))$,其中 $Y(\Lambda)=\mathrm{d}Y/\mathrm{d}\Lambda$。方程式(10.7.53)的 Poincaré 映射点集是

$$H=\{(X(\Lambda_k),Y(\Lambda_k))\mid\Lambda_k=2\pi k,k=0,1,2,\cdots\} \tag{10.7.54}$$

为了计算方便,估计点集 H 的相关维 d_c,其结果示于图 10.38。一般认为,Duffing 型方程

容量维 D～相关维 d_c，由图可见点集 H 是分数维的。于是系统式(10.7.53)的在(t,X,Y)空间中的轨线的维数是 $1+D$，即是分数维的。结合(H,δ)图上的结论，可见在系统式(10.7.53)中确有浑沌发生，即在一定参数条件下，受热板可作浑沌振动。

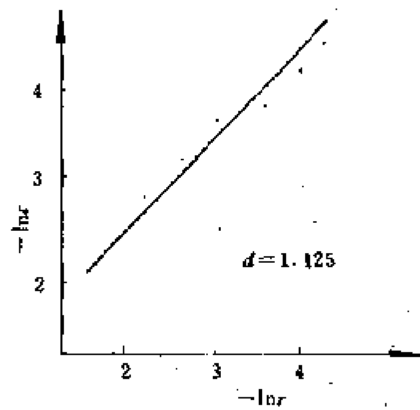


图 10.38

研究上述问题的实际意义如下：已知在存在浑沌振动的参数条件下，系统响应对初值的微小改变极为敏感，但在数值计算或实验研究中，数值误差是不可避免的，这样由于系统对初值的敏感性，初值的微小误差会导致系统未来(实际上是在一定长的时间后)性状的不确定性。在这种情形下受热板振动的未来性状是不可能被预知的。

因此为估计受热板未来的振动状态，必需研究受热板的浑沌振动，使其避开发生浑沌振动的条件(如上面分析中涉及的参数条件)，否则对受热板的动力特性进行数值计算或实验研究可能将是毫无意义的。

参考文献

[1] 夏道行、吴卓人、严绍宗、舒五昌. 实变函数论与泛函分析. 北京：人民教育出版社，1979.

[2] 赵义纯. 非线性泛函分析及应用. 北京：高等教育出版社，1989.

[3] 陈文嫄. 非线性泛函分析. 兰州：甘肃人民出版社，1982.

[4] M. 斯皮瓦克. 齐民友、路见可译. 流形上的微积分，北京：科学出版社，1981.

[5] John D. Baum. 蒲思立译. 点集拓扑学原理. 北京：高等教育出版社，1981.

[6] 尤秉礼. 常微分方程补充教程. 北京：高等教育出版社，1981.

[7] 张锁春. 现代振荡反应的数学理论和数值方法. 郑州：河南科技出版社，1991.

[8] 李云主编. 工程数学基础. 武汉：武汉交通科技大学，1996.

[9] 张筑生. 微分动力系统原理. 北京：科学出版社，1987.

[10] 陆启韶. 常微分方程的定性方法和分叉. 北京：航空航天大学出版社，1989.

[11] Looss, G. and Joseph, D. D., Elementary Stability and Bifurcation Theory. Springer—Verlag, 1981.

[12] Falconer, K., Fractal Geometry—Mathematical Foundations and Applicatins, John Wiley and Sons 1989.

[13] Smale, S.. Differentiable Dynamical Systems, Bull. A. M. S., 73, 1967.

[14] 程极泰. 浑沌的理论与应用. 上海：上海科学文献出版社，1991.

[15] 李 云. 应用数学模型. 武汉：华中理工大学出版社，1993.

[16] Nayfeh, A. H. Perturbation Methods, Wiley, New york, 1973.

[17] 李大华. 应用泛函简明教程. 武汉：华中理工大学出版社，1989.

[18] Golubitsky, M. Schaeffer, D. G., Singularites and Groups in Bifurcation Theory, Springer—Verlag, Vol. I, 1985; Vol. II, 1988.

[19] 王铎. 常微分方程的规范形理论综述. 北京：全国动力系统及其应用学术讨论会会议论文集，1988.

[20] 张锦炎. 常微分方程几何理论与分支问题. 北京：北京大学出版社，1981.

[21] Arnold, V. I., Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations, Springer—Verlag, 1983.

[22] Temam, Infinite—Dimensional Dynamical System in Mechanics and Physics, Springer—Verlag, 1988.

[23] Kubicek. Mand Marek. M., Computational Methods in Bifurcation Theory and Dissipative Structure, Springer—Verlag, 1983.

[24] Antmam, S. S., Bifurcation Problem for Nonlinearly Elastic Strutures, Application Theory (ed. by Rabinowitz, P. H.), Academic press, 1977.

[25] Fife, P. C., Asymptotic States for Equation of Reaction and Diffusion, Rull. Amer.

Math,Soc. ,84,693—726,1978.

[26] Fife. P. C. ,Mathematical Aspects of Reaction—Diffusion Systems,Springer—Verlag,1979.

[27] Gunduz Caginaip, An Analysis of a Phase Field Model of a Free Boundary, Arch. Rational Mech. Anal. , Vol. 92, No. 3, 205—243,1986.

[28] Fife, P. C. , Dynamics of Internal Layers: Asymptotic and Matching, 在中国科学院 数学研究所讲学所用讲义,1—6,1987.

[29] Ladyženskoga, O. A. ,Linear and Quasi—Linear Equations of Parabolic Type, Vol. 23, Translated from the Russion by S. Smith,1968.

[30] Li Yun, The Matching and Expanding Solution of the Kind of the Phase Field Equation,Proceedings of the 2nd international conference on nonlinear mechanics, 851—854,1993.

[31] Stefan,P. ,A Theorem of Sarkovskii on The Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphims of the Real Line ,Communications in Mathematical Physics, 54, 237—248,1977.

[32] Carr, J. , Applications of Centre Manifold Theory,Springer—Verlay,1981.

[33] Golubitsky, M. and Schaeffer, D. , A Theory for Imperfect Bifurcation Theory Via Singularity Theory ,Commun. pure and appl. Math . 32,21—98,1979.

[34] Chow, S. N. and Mallet—Paret,J. ,Integral Averaging and Bifurcation,J. Diff. Eqns. 26,112—159,1977.

[35] Lorenz,E. N. ,Deterministic Nonperiodic Flow,Atmos.Sci. 20,130—141,1963.

[36] Guckenheimer, J. , A Strange Attractor in the Hopf Bifurcation Theorem and its Applications ,Marsden,J. E. , Mccracken, M. (ed.),368—381,Springer,1976.

[37] Yorke, J. A. and Yorke, E. D. , Metastable Chaos: the Transition to Sustained Chaotic Behavior in the Lorenz model, J. of Statistical Physics, Vol. 21, No. 3, 263—277, 1979.

[38] Kaplan, J. L. and Yorke, J. A. ,Preturbulence: A Regime Observed in a Fluid Flow Model of Lorenz,Commun. in Mathematical Physics,67,93—108,1979.

[39] Dupertuis,M. A. ,Salomaa,R. R. E. and Siatrist,M. R. ,The Conditions for Lorenz Chaos in an Optically—Pumped far—Infrared Laser, Opticso Communications , Vol. 57, No. 6,410—411,1986.

[40] Furumochi, T. , Existence of Periodic Solutions of One—Dimensional Differential—Delay Equation,Tohoku Math. J. 30,13—35,1978.

[41] Maddox, J. , Order in the Midst of Chaos, Nature Vol. 347, 421, 1990.

[42] Coppel, W. A. , Stability and Asymtotic Behavior of Differential Equations, Heath, D. C. , 1965.

[43] Xiao-Biao lin, Exponential Dichotomies and Homoclinic Orbits in Functional Differential Equations, J. of Differential Equations, 63, 227—254, 1986.

[44] Ladota,A. ,Ergodic Problems in Biology, Asterisque 50,239—250,1977.

[45] Mackey, M. and Glass, L. , Oscillattion and Chaos in Physiological Con-

trol Systems,Science197,287—295,1977.

[46] Marotto,F.M. ,Snap—Back Repellers Imply Chaos in R^n,J. Math. Anal. Appl. 63, 199—223,1978.

[47] Freedman, H.I. and Waitman. H. , Mathematical Analysis of Some Three Species Food Chains Models. Math. Biosci, 33:257—276. 1977.

[48] Gard,T.C. and Hallam, T.G. , Persistence in Food Webes—1. Lotka— Volterra Food Chains. Bull. Math. Boil,41: 879—891. 1979.

[49] Gard, T. C. , Persistence in Food Webs; Holling — type Food Chains. Math. Biosci. , 49:61—69. 1980.

[50] Gard, T. C. , Top Perdator Persistence in Differential Equation Madels of Food Chains, the Effect of Omnivory and Extermal Forcing of Trophic Levels. J. Math. Biol, 14: 285—299. 1982.

[51] Freedman, H.I. and Waltman, P. , Persistence in Models of Interacting Predator —prey Population. Math. Biosci, 68:213—231. 1984.

[52] Freedman, H. I. and So,T. W. —,H. , Global Stability and Persisence of Simpe Food Chains. Math. Biosci, 76:69—86 1985.

[53] Butler, G. T. ,Freedman, H. I. and Waltman, P. Uniformly Persistems. Proc. Amer. Math. Soc. 96:425—430. 1986.

[54] Knowles, G. , An Introduction to Applied Optimal Contrel. Academic Press, New York, 1981.

[55] Hassad, B. D. , Kazarinoff, N. D. and Wan, Y. —H. , Theory and Application of Hopf Bifurcation. London Math. Soc. Lec. Note series 41, Combridge University Press, 224—238,1982.

[56] Marden, T. E. and Mecracken, M. , The Hopf Bifurcation and Its Application , Applied Math. Sciences, Vol. 19, Springer—Verlag XIII 408, 1976.

[57] Stepen, G. ,Great Delay in a Predator—Prey Model. Nonlinear Analysis, 10(9): 913～929. 1986.

[58] Chow, S. N. Hale, J. K. and Mallet—Paret, J. , An Example of Bifurcations, to Homoclinic Orbits, J. Differential Equations, 37,351—373,1980.

[59] Chang, Jack S. K. ,Cheungand, S. C. ,Krinskg ,I. ,On the Derivation of Reinsurance Premiums,Insurance;Mathmatics and Economics,8,137—144. 1989.

[60] Moore, D. R. , Weiss, N. O. and Wilkins, M. J. , The Reliability of Numerical Experiments: Transitions to Chaos in Thermosolutal Convection, Nonlinearity, 3, 997—1014,1990.

[61] Guckenheimer,J. and Holmes,P. ,Nonlinear Oscillations,Dynamical Systems and Bifurcations of Vecttor Fields,2nd end. Springer,1986.

[62] Kunihiko Kaneko,Globally Couped Chaod Viodates the Law of Large Numbers but not the Central—limit Theorem,Physical Review Letter ,Vol. 65,No. 12,1391—1394,17 September 1990

[63] 李云.一类含时滞非线性微分方程组的 Hopf 分支.开封:数学季刊,Vol. 5. No. 4.

55—67. 1991.

[64] 李云. 具有群体防卫能力简单食物链的 Hopf 分支. 武汉：应用数学，Vol. 5. No. 1. 102—110. 1992.

[65] 李云. 一类由单模行波激光系统提出的数学模型的分析与计算. 华中师范大学(自然科学版)专辑，121—130. 1992.

[66] Li Yun. The Hopf Bifurcation for a class of Nonlinear Differenttial Equation Systen with Delays. Proceedings of the 2nd international conference on nonlinear mechanics, 543—547. 1993.

[67] 李云、石靖华. 一类时滞非线性微方程组 Hopf 分支的分析(II). 武汉：湖北大学学报，257—279. 1993.

[68] 李云. 具有扩散和群体防卫的简单食物链的 Hopf 分支. 北京：应用数学学报，289—299. 1994.

[69] 李云、彭德茂. 注入相干外场第二类激光系统 Hopf 分岔的分析. 北京：现代数学和力学(MMM)—VI，785—793. 1995.